



CANTOR KÜMELER KURAMI

Mehmet Sait Eroğlu

Ocak 2007



Bu sayfa bilerek boş bırakılmıştır.



Eşim Yıldız,
Kızım Ilgım,
Oğlum ve Meslektaşım K. Ilgar'a.



Teşekkür

Kitabın tamamlanacağına ilişkin umudunu çoktandır neredeyse yitirmiş olan eşim *Yıldız*'a ve kızım *İlgım*'a bana sağladıkları huzurlu çalışma ortamı için; bölümlerinde konuyu işleme fırsatı veren *Prof. Dr. Şahin Koçak*, *Doç. Dr. Mehmet Üreyen* ve *Prof. Dr. Orhan Özer*'e gösterdikleri ilgi ve misafirperverlik için içten teşekkür ederim. Ancak bir yandan eleştirilerini yöneltirlerken diğer yandan kitabın tamamlanması için sürekli destek veren iki kişiye, değerli dostum *Prof. Dr. Şahin Koçak* ve oğlum *Kemal Ilgar*'a –ki doktora tez aşamasında olmasına rağmen bilgisayarla boğuştuğum her an yardımcı olmak için zamanını esirgememiştir– ayrıca teşekkür etmek isterim.



İçindekiler

0 GİRİŞ	9
1 CANTOR KÜMELER KURAMININ BAZI AÇMAZLARI	21
1.1 CANTOR KÜMELERLE NİÇİN UĞRAŞTI?	21
1.2 CANTOR'UN KÜME TANIMI	23
1.3 CANTOR'UN AKSİYOMLARI	25
1.4 BAZI AÇMAZLAR	28
1.5 AÇMAZLARIN TARTIŞMASI	34
1.6 RUSSELL'IN TIPLER KURAMI	40
1.7 ZERMELO'NUN AKSİYOMLARI	43
1.8 SEZGİCİLER	50
1.9 NEUMANN, BERNAYS VE GÖDEL YAKLAŞIMI	54
2 CANTOR KÜMELER KURAMI	57
2.1 TEMEL KAVRAMLAR	59
2.2 BAĞINTILAR VE FONKSİYONLAR	68
2.3 DOĞAL SAYILAR	83
2.3.1 Tekrarlı Teorem	83
2.3.2 Peano Yapıları	89
2.3.3 Peano Yapılarında Aritmetik	91
2.3.4 Neumann Doğal Sayıları	93

6 İçindekiler

2.4	SAYILAR NEDİR VE NE OLMALILAR ?	96
2.4.1	Düzeltililebilir Dirençli Yanlıklar	104
2.4.2	Doğal Sayılarımızı Biliyor muyuz?	110
2.5	EŞGÜÇLÜ KÜMELER	111
2.6	SONLU, SONSUZ, SAYILABİLİR VE SAYILAMAZ KÜMELER	124
2.7	ÇOKLUK SAYILARI (İlk Bilgiler)	132
2.7.1	Çokluk Sayılarında İşlemler	135
2.8	SIRA SAYILARI	140
2.9	SIRALANMIŞ KÜMELERDE İŞLEMLER	156
2.9.1	Sıralanmış Kümelerin Çarpımları	158
2.9.2	Sıra Sayıların Toplamları	160
2.10	İYİ SIRALANMIŞ SINIFLAR	169
2.11	SIRALAMA TOPOLOJİSİ VE NORMAL FONKSİYONLAR	173
2.12	SONLU ÖTESİ TÜMEVARIM VE TEKRARLI TEOREM	180
2.13	SIRASAL ARİTMETİK	191
2.14	SEÇME AKSİYOMU	202
2.15	ÇOKLUK SAYILARININ TANIMI	207
2.16	SONDAŞLIK, DÜZENLİ VE TEKİL ÇOKLULUK	223
2.17	KOMBİNATORİK	231
2.18	SÜZGEÇLER, KAPALI VE SINIRSIZ KÜMELER	241
2.19	NEUMANN SİLSİLESİ	250
2.19.1	Kümesel Evrenler, Evrencikler	253
2.19.2	$(V, \in)$ Evreni	257
2.20	CANTOR'UN AKSİYOMLARI GERÇEKTE NELERDİR?	261
3	UYGULAMALAR	265
3.1	ÇARPIM UZAYLARI VE METRİK UZAYLAR	265
3.2	AĞAÇLAR VE POLONYA UZAYLARI	273
3.3	BAZI ÇOKLUK TEOREMLERİ	281
3.4	CANTOR KÜMESİ	284
3.5	$\aleph_1$ VE $\aleph_1 + 1$ TOPOLOJİK UZAYLARI	288
3.6	ÖLÇÜ UZAYLARI	291
4	PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ	307
	Kaynakça	335
	Index	342



Bu sayfa bilerek boş bırakılmıştır.



Bu sayfa bilerek boş bırakılmıştır.



0

GİRİŞ

Birinci kısımda kümeler kuramının ortaya çıkışına, yaşadığı sorunlara ve aşamalara değineceğiz. Kümeler kuramının çelişkilerine ve yararlı kısımlarına değinilecek ve aksiyomatik olarak ele alındığında kuramdan neleri korumak istediğimiz belirtilecektir. Ayrıca en çok kullanılan iki aksiyomatik dizgenin, ZFC ve NBG'nin aksiyomlarını vereceğiz. Bu bölümün amacı okura sorunsuz bir dünya sunmak yerine matematiğin temelinde, kümeler kuramı ve mantıkta yaşanmış olan tartışmaları bir parça olsun hissettirmektir. Ara sıra, örneğin çelişkileri tartışırken, kümeler kuramının ileride açıklayacağımız bazı kavramlarını ve bilgilerini kullanacağız. Bunlar çok yer tutmayacaktır.

İkinci kısımda, kümeler kuramını kullanmak isteyen bir matematikçinin bilmesi gereken temel kavram ve teoremler verilmiştir. **Cantor Kümeler Kuramı**, “**Safdil Kümeler Kuramı (Naive Set Theory)**” olarak da adlandırılır. Yanlış anlamalara yol açabileceğinden bu ismi yeğlemeyeceğiz. Bu kuram için **CKK** kısaltmasını kullanacağız.

CKK'nin evrenini $\tilde{U}$ ile göstereceğiz. Bu evren geleneksel matematiğin evrenidir. Bu evrende kümelerimizin öğelerinin küme olması gerekmez. Örneğin 3 doğal sayısını bir küme olarak düşünmeyiz. 3 ve 5 doğal sayılarımız $\tilde{U}$ evreninin küme olmayan ve birbirinden farklı iki öğesidir. Bu tür öğeler evrenimizin *temel (ilk veya asal)* öğeleridir. Geleneksel matematikte $\tilde{U}$ evrenindeki en önemli kümelerimiz kuşkusuz $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$ ile gösterdiğimiz, sırasıyla doğal, tam, rasyonel, gerçek, kompleks.... sayılar kümeleridir. Önce $\tilde{U}$ evreninde karşılaştığımız bazı çelişkileri ve onlardan kurtulma yollarını

birinci kısımda tartışacağız. Ardından aslında $\tilde{U}$ evreninin bir kısmının, bir anlamda boş kümeden başka asal ögesi olmayan, salt kümelerden oluşan U kısmının matematik için yeterli olduğunu göreceğiz. U yeterli olacaksa temel öğelerden oluşan $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$ sayı kümelerinin yerlerine, öğeleri kümeler olan ve bunların yerini alacak olan $\underline{\mathbb{N}}, \underline{\mathbb{Z}}, \underline{\mathbb{Q}}, \underline{\mathbb{R}}, \underline{\mathbb{C}}, \dots$ sayı kümelerini oluşturmamız. Bunun içinse sadece $\underline{\mathbb{N}}$ 'yi oluşturmak yeterlidir. $\tilde{U}$ evreninde herhangi iki Peano yapısının eşyapılı olduğunu biliyoruz. Bu nedenle öğeleri kümeler olan herhangi bir Peano yapısı işimizi görür. $\mathbb{N}$ olarak $\underline{\mathbb{N}}$ Neumann doğal sayılarını alacağız. U evreninde hiç öge içermeyen tek öge vardır, o da $\emptyset$ boş kümesidir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\underline{n}$ Neumann doğal sayıları tekrarlı teoremlerle aşağıdaki özelliklere sahip olacak biçimde tek olarak tanımlanır:

$$\underline{0} = \{\emptyset\} \text{ ve her } n \in \mathbb{N} \text{ için } \underline{n+1} = \underline{n} \cup \{\underline{n}\}$$

U 'da $\mathbb{N}$ olarak $\underline{\mathbb{N}}$ sayılarını alıp bilinen yöntemlerle $\underline{\mathbb{Z}}, \underline{\mathbb{Q}}, \underline{\mathbb{R}}, \underline{\mathbb{C}}, \dots$ sayı kümeleri oluşturulur. Eşyapılılara aynı gözüyle bakabileceğimiz için $\underline{\mathbb{N}}, \underline{\mathbb{Z}}, \underline{\mathbb{Q}}, \underline{\mathbb{R}}, \underline{\mathbb{C}}, \dots$ yerine yeniden $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$ yazıp yolumuza devam edeceğiz.

Aslında U evreninde hala sezgiye ters düşen gariplikler ve fazlalıklar vardır. Bu evrende $x \in x$ olabilir, dd. bir küme kendisini öge olarak içerebilir. Tek başına bu o kadar da dert edilecek bir durum değildir. Ancak kuramı fakirleştirmeden evrenimizi daraltıp bir yandan bundan kurtulabiliyor, diğer yandan evrenimizin çok daha iyi bir resmini çıkarabiliyorsak bunu da yapmak elbette daha mantıklı olacaktır. Aksiyomatik Kümeler Kuramında, geleneksel matematik açısından gerekli olmayan, ama kümeler kuramı açısından çok yararlı olan bir aksiyomla kümelerimizin temelli olmasını isteyeceğiz ve bu kısıtlamayla elde ettiğimiz V evreninde çalışacağız.

CKK'nin bitiminde V evreninde bu kuramı betimlemeye yeteceğini umduğumuz aksiyomlarımızı seçeceğiz ve $(V, \in)$ 'yi bu kitabı izleyeceğini umduğumuz Aksiyomatik Kümeler Kuramı kitabımızda (V, ϵ) olarak biçimselleştireceğiz.

Uygulamalar adını taşıyan üçüncü kısımda *Betimleyici Kümeler Kuramının* bazı konularına değineceğiz. Özellikle Polonya uzaylarını işleyecek, ağaçlar ve ağaç yöntemiyle tanışacağız. Ölçü problemine kısaca değinecek ve ister topolojide ister ölçü kuramında bazı durumlara karşı örnek oluşturmaya elverişli olan $\aleph_1$ ve $\aleph_1 + 1$ topolojik uzaylarını biraz yakından tanıyacağız. Dördüncü kısımda, az ileride soracağımız problemlerin çözümlerini vereceğiz. Problemleri hazırlarken özellikle [63] ve [17]'den yararlanılmıştır.

İlk kısımda tartıştığımız açmazlar yalnızca kümeler kuramını değil matematiğin tümünü ilgilendirmektedirler. İkinci kısımda kümeler kuramını kullanmak isteyen bir matematikcinin bilmesi gereken tüm önemli kavram ve teoremleri verdiğimiz umuyoruz. Bu bölüm kitabın ana gövdesidir. Doğru-

dan bu bölümle başlanabilir. Herhangi bir kümeler kuramı dersinde son-lütesi tümevarım ve tekrarlı teorem işlenmeli ve bir iki güzel örneklerle işe yararlılığı ve gücü vurgulanmalıdır.

Bu kitapta kullanacağımız tüm matematik imler içeriksel imler olacak-lardır; onlar Türkçe'mizde içeriksel bazı söylemler için kullandığımız kısalt-malar olacaklardır. Bunların en önemlileri $\neg, \vee, \wedge, \implies, \iff, \forall, \exists$ içeriksel *mantık imleri*, $=$ içeriksel *özdeşlik* ve $\in$ içeriksel *ögesi olma* imidir. İçeriksel mantık imleri sırasıyla Türkçemizdeki *değil, veya, ve, ise, ancak ve ancak, her ve en az bir* yerine kullanılan kısaltmalardır. Örneğin $\psi(x) \implies \xi(x)$ ifadesi " $\psi(x)$ ise $\xi(x)$ 'tir", veya " $\psi(x)$ 'ten $\xi(x)$ çıkar", $\psi(x) \iff \xi(x)$ ifa-desi " $\psi(x)$, ancak ve ancak $\xi(x)$ doğru ise doğrudur", veya " $\psi(x)$ 'in doğru olması için gerek ve yeter koşul $\xi(x)$ 'in doğru olmasıdır", $\forall x \psi(x)$ "(Söz konusu evrenimizdeki) Her x için $\psi(x)$ 'tir" ve son olarak $\exists x \psi(x)$ ise "(Söz konusu evrenimizdeki) En az bir x için $\psi(x)$ doğrudur" için kullanılan birer kısaltmadırlar. $x = y$ ile " x ve y nesnelerinin *özdeş* olduğunu" " $x \in M$ " ise x ögesinin M kümesinin *gerçekten* bir ögesi olduğunu belirtir, dd. ile M kümesi bir çuval içindeki patateslerin kümesi ise x ögesinin bu çuvaldaki patateslerden biri olduğunu belirtir. $\neg(x \in M)$ yerine $x \notin M$, $\neg(x = y)$ yerine ise $x \neq y$ de yazacağız ve bunlar sırasıyla " x , M 'nin ögesi değildir" ve " x , y 'ye özdeş değildir" demektir. $\iff$ yerine kullanılan diğer kısaltmalar "ancak ve ancak" anlamında kullanılan "ava." , "gerek ve yeter koşul" ye-rine kullanılan "gvyk." ve "genellikten bir şey kaybetmeden" yerine "gbk." kısaltmalarıdır. Ayrıca "diğer deyişle" yerine "dd." ve "benzer biçimde" yerine "bb." kısaltmalarını kullanacağız.

$a := b$, $a =: b$, $p : \iff q$ ve $p \iff q$ gösterimlerini de kullanacağız. Bu ifa-delerde : iminin bulunduğu taraf tanım gereğince öbür taraftır. Tanımlanan bir nesne olduğunda $:=, =:$, bir özellik, bir bağıntı, bir kavram olduğunda ise $: \iff, \iff$: kullanılacaktır.

Her alt bölümdeki tanımlar, teoremler, önermeler, lemmalar, örnekler ve notlar birlikte numaralandırılmıştır. Her bölümdeki problemler kendi içlerinde ayrıca numaralandırılmışlardır. Salt **(3.2.6)** yazıldığında üçüncü kısmın ikinci bölümündeki tanım, teorem, önerme, lemma, örnek ve notlar-dan bu numarayı taşıyana gönderme yapılmaktadır. Problemlere gönderme "problem **(3.2.6)**" şeklinde olacaktır. Sadece **(II.6)** yazdığımızda kastedi-len ikinci kısmın altıncı bölümüdür. **(2.1)** ise kitaptaki bu numaralı formülü-nü kastetmektedir. Bazen $=, \implies, \iff$ imleri üzerine yazılanlar bunların gerekçelerini göstermektedir. Örneğin $\stackrel{(2.4.11)}{=}$, bu eşitliğin gerekçesinin bu numaralı tanım, teorem, önerme veya lemma olduğunu belirtirken $\stackrel{(i)}{\implies}$ ise bu çıkarımda kanıtlamakta olduğumuz teorem, önerme veya lemmanın (i) şikkını kullandığımızı belirtir. Bazen tanım gereği olarak eşitlik üzerine bir

im koyduğumuz da olmuştur; örneğin $X \stackrel{top}{=} Y$ ile X, Y topolojik uzaylarının topolojik olarak eşyapılı olduklarını gösteriyoruz.

Problemlerimizde geçen ve okuyucunun bilmesi gerekenlerden bu kitapta açıklanmamış kavramları kısaca özetleyeceğiz.

Kümeler Kuramı: $\mathcal{A} := \{A_i \mid i \in I\}$ küme ailesine birbirinden farklı her $i, j \in I$ için $A_i \cap A_j$ sonlu ise **neredeyse ayrıktır** denir.

n bir doğal sayı olmak üzere $F : X^n \rightarrow [X]^{\leq \omega}$ verilsin. Bir $Y \subseteq X$ altkümese her $y = (y_1, \dots, y_n) \in Y^n$ için $F(y) \subseteq Y$ ise **F 'nin etkisi altında kapalıdır** denir. Bir $f : X^n \rightarrow X$ ve $Y \subseteq X$ verildiğinde her $y \in Y^n$ için $\{f(y)\} \subseteq Y$ ise Y kümesi **f 'nin etkisi altında kapalıdır** denir. $f^*(x) := \{f(x)\}$ olarak tanımlarsak Y kümesinin f altında kapalı olması Y 'nin $f^* : X^n \rightarrow [X]^1$ fonksiyonunun etkisi altında kapalı olmasına denktir. Şimdi bu tür fonksiyonların bir $\mathcal{F}$ ailesi verilsin, dd. bu aileye ait fonksiyonların tanım kümeleri ya bir X^n ya X , değer bölgeleri ise ya $[X]^{\leq \omega}$ ya da X 'dir. Burada $n \in \mathbb{N}$ ve fonksiyondan fonksiyona değişebilir. Bir $Y \subseteq X$ altkümese $\mathcal{F}$ ailesindeki her fonksiyonun etkisi altında kapalı ise Y kümesi **$\mathcal{F}$ 'nin etkisi altında kapalıdır** denir.

Doğrusal Cebir: $\mathbb{K}$ bir cisim ve V bir $\mathbb{K}$ vektör uzayı olsun. Vektör uzayı, doğrusal bağımsızlık ve baz (veya taban) tanımlarını geçiyoruz. $B \subseteq V$ vektör uzayımızın bir bazı ise her $0 \neq x \in V$ vektörümüz *tek* biçimde *sonlu* sayıda sıfırdan farklı $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sayıları ve $b_1, \dots, b_n \in B$ vektörleriyle $x = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ olarak yazılabilir. Biz bu durumu kısaca, ayrıca hiçbir şey söylemeden

$$x = \sum_{b \in B}^s \lambda_b b$$

ile göstereceğiz. Eğer vurgulamak gerekirse λ_b yerine $\lambda_b(x)$ yazacağız.

V bir $\mathbb{K}$ vektör uzayı ve $\mathbb{F} \subset \mathbb{K}$ bir alt cisim olduğunda V elbette aynı zamanda bir $\mathbb{F}$ vektör uzayıdır. Bunlardan hangisini kastettiğimizi vurgulamak istersek V yerine $V_{\mathbb{K}}$ veya $V_{\mathbb{F}}$ yazacağız. Örneğin $\dim V_{\mathbb{F}}$ ile V 'yi $\mathbb{F}$ vektör uzayı olarak düşündüğümüzde boyutunu kastedeceğiz. Herhangi bir $A \subseteq V$ altkümese verildiğinde bu kümenin gerdiği $\mathbb{K}$ alt vektör uzayını $\langle A \rangle$ ile $\mathbb{F}$ alt vektör uzayını ise $\langle A \rangle_{\mathbb{F}}$ ile göstereceğiz. $\langle A \rangle$ (benzer biçimde $\langle A \rangle_{\mathbb{F}}$) vektör uzayı V (benzer biçimde $V_{\mathbb{F}}$) vektör uzayının alt vektör (benzer biçimde $\mathbb{F}$ alt vektör) uzaylarının arakesitinden başka bir şey değildir. $\langle A \rangle$, A kümesinin sonlu sayıda öğelerinin $\mathbb{K}$ doğrusal kombinasyonlarının kümesidir. $\langle A \rangle_{\mathbb{F}}$ ise A kümesinin sonlu sayıda öğelerinin $\mathbb{F}$ doğrusal kombinasyonlarının kümesidir.

$\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ bir alt cisim ve V, W iki $\mathbb{K}$ vektör uzayı olmak üzere bir $f : V \rightarrow W$ fonksiyonu verilsin. Şu üç özelliğe bakalım:

- (1) $\forall x, y \in V \ f(x + y) = f(x) + f(y).$
- (2) $\forall \alpha \in \mathbb{K} \forall x \in V \ f(\alpha x) = \alpha f(x).$
- (3) $\forall \alpha \in \mathbb{F} \forall x \in V \ f(\alpha x) = \alpha f(x).$

f fonksiyonuna (1)'i sağlıyorsa **toplamsal**, (1) ve (2)'yi sağlıyorsa **doğrusal** veya $\mathbb{K}$ **doğrusal**, (1) ve (3)'ü sağlıyorsa $\mathbb{F}$ **doğrusal** denir. $\mathbb{K}$ doğrusal $f : V \rightarrow W$ dönüşümlerin kümesini $Hom_{\mathbb{K}}(V, W)$, $\mathbb{F}$ doğrusal $f : V \rightarrow W$ dönüşümlerinin kümesini ise $Hom_{\mathbb{F}}(V, W)$ ile göstereceğiz. Doğrusal Cebir dersinde her vektör uzayının bir bazı olduğunu öğreniriz, bunu biz de kitabımızda kanıtlayacağız. Ayrıca bize herhangi bir doğrusal bağımsız $D \subseteq V$ verildiğinde bunu içeren bir B bazını her zaman seçebiliriz. V vektör uzayımızın bir B bazı verilsin. Her $\varphi : B \rightarrow W$ fonksiyonu *tek* bir biçimde bir $f : V \rightarrow W$ doğrusal dönüşümüne ve *tek* biçimde bir $\mathbb{F}$ doğrusal $g : V \rightarrow W$ dönüşümüne

$$\begin{aligned} \text{her } x = \sum_{b \in B}^s \lambda_b b \ (\lambda_b \in \mathbb{K}) \text{ için } f(x) &:= \sum_{b \in B}^s \lambda_b \varphi(b) \text{ ve} \\ \text{her } x = \sum_{b \in B}^s \lambda_b b \ (\lambda_b \in \mathbb{F}) \text{ için } g(x) &:= \sum_{b \in B}^s \lambda_b \varphi(b) \end{aligned}$$

tanımlarıyla genişletilebilir. Bunu şöyle de okuyabiliriz: Her f doğrusal dönüşümü $f|B$ ile *tek* olarak belirlidir.

$f : V \rightarrow W$ doğrusal dönüşüm ise $f^{-1}(\{0\})$ uzayına f 'nin **çekirdeği** denir. Kendisi ve tersi de doğrusal olan bir $f : V \rightleftharpoons W$ tamesleşmesi varsa bu vektör uzayları **eşyapılıdır** ve f bir **eşyapı** dönüşümüdür denir.

Bizim problemlerimizde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ olacaktır. $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ uzayının bazlarına **Hamel bazları** denir.

Analiz: Sürekli $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları bilindiği gibi aradeğer özelliğine sahiptirler: $-\infty < a < b < +\infty$ ise $f(a)$ ve $f(b)$ arasındaki her değeri f fonksiyonu (a, b) aralığında en az bir kez alır. Aradeğer özelliğine sahip fonksiyonlara **Darboux fonksiyonları** denir. Aradeğer teoreminiz sürekli fonksiyonların Darboux fonksiyonları olduğunu söyler. Belki farkında olmadan sürekli olmayan Darboux fonksiyonlarını da tanıdık.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ türevlenebilirse } f' \text{ bir Darboux fonksiyonudur [50].}$$

Gerçekten de $-\infty < a < b < +\infty$ ve genellikle bir şey kaybetmeden $f'(a) < f'(b)$ olsun. $\lambda \in (f'(a), f'(b))$ keyfi verilsin. Bu durumda her $t \in \mathbb{R}$

için $g(t) := f(t) - \lambda t$ olarak tanımlanan g fonksiyonunda $\mathbb{R}$ 'de türevlenebilir. g fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında bir x noktasında minimumunu alır. Ancak $g'(a) < 0$ olduğundan bir $t_1 \in (a, b)$ ile $g(t_1) < g(a)$ ve $g'(b) > 0$ olduğundan bir $t_2 \in (a, b)$ ile $g(t_2) < g(b)$. Bu nedenle $x \in (a, b)$ ve analizden $f'(x) - \lambda = g'(x) = 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece $f'(x) = \lambda$.

Herhangi bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her açık aralıkta her değeri alıyorsa, dd. Her $I = (a, b) \neq \emptyset$ açık aralığı için $f[I] = \mathbb{R}$ ise, f bir **güçlü Darboux** fonksiyonudur denir.

Bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $x, y \in \mathbb{R}$ ve $\alpha + \beta = 1$ koşulunu sağlayan her $\alpha, \beta \geq 0$ gerçekte sayıları için

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

ise f fonksiyonuna **dışbükeydir** denir. Bu koşul sadece $\alpha = \beta = 1/2$ için istenirse **orta nokta dışbükey** fonksiyonlar elde edilir.

Geometri: $\mathbb{R}^2$ düzleminde verilen x_1, x_2, x_3 noktalarının gerdiği, bu noktaların kümesinin dışbükey örtüsü olan $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ üçgeninden

$$\Delta(x_1, x_2, x_3) := \left\{ \sum_{n=1}^3 p_n x_n \mid \forall 1 \leq n \leq 3 (p_n \in \mathbb{R} \wedge p_n \geq 0) \wedge \sum_{n=1}^3 p_n = 1 \right\}$$

kümesi anlaşılacaktır. $\Delta^\circ(x_1, x_2, x_3)$ ise bu kümenin $\mathbb{R}^2$ uzayının doğal topolojisine göre içidir.

İşte problemlerimiz

Problem 0.0.1 *Sonlu kümelerde olduğu gibi sonsuz kümeleri de, çoklukları üzerinden, anlamlı biçimde çift ve tek kümeler olarak sınıflandırabilir miyiz? Yanıtınızı gerekçelendiriniz.*

Problem 0.0.2 1. X bir sonsuz küme, $\kappa = \aleph X$ ve μ , $1 \leq \mu \leq \kappa$ koşulunu sağlayan herhangi bir çokluk sayısı olmak üzere X kümesinin bir $\mathcal{P}$ parçalanışının her $A \in \mathcal{P}$ için $\aleph A = \mu$ olacak biçimde bulunabileceğini gösteriniz

2. $\aleph X \geq 2$ ise sabit noktası olmayan $f : X \rightleftarrows X$ tameşlemelerinin varlığını kanıtlayınız.

3. $\aleph(X \setminus A) \geq 2$ koşulunu sağlayan her $A \subset X$ altkümesi için sabit noktalarının kümesi A olan bir $f : X \rightarrow X$ tameşlemesinin olduğunu kanıtlayınız.

Problem 0.0.3 $\leq$ ile kısmi sıralanmış sonsuz bir X kümesi verildiğinde bu kümenin aynı $\leq$ bağıntısına göre bağlantılı, ya da mutlak bağlantısız olan

sonsuz bir altkümünün olduğunu gösteriniz (İstenen sonsuz bir $Y \subseteq X$ altkümesi öyle ki $\forall a, b \in Y (a \leq b \vee b \leq a)$ veya $\forall a, b \in Y (a \not\leq b \wedge b \not\leq a)$).

Problem 0.0.4 Boş olmayan kümelerin herhangi bir sonsuz $\mathcal{A}$ ailesi verildiğinde bu ailenin sonsuz bir $\mathcal{B}$ alt ailesi ya $\mathcal{B}$ ayrık ya da birbirinden farklı herhangi iki $x, y \in \mathcal{B}$ için daima $x \cap y \neq \emptyset$ olacak biçimde bulunabileceğini gösteriniz.

Problem 0.0.5 Sayılabilir sonsuz X kümesinin sonsuz altkümelerinden oluşan sayılamaz çoklukta neredeyse ayrık bir $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ailesinin varlığını kanıtlayınız.

Problem 0.0.6 κ herhangi bir sonsuz çokluk sayısı, I gücü $\leq \kappa$ olan bir küme, $\{X_i\}_{i \in I}$ ise her bir X_i kümesinin gücünün yine κ olduğu bir kümeler ailesi olsun. Her bir $i \in I$ için gücü yine κ olan $Y_i \subseteq X_i$ altkümelerinin $\{Y_i\}_{i \in I}$ ayrık olacak biçimde bulunabileceğini gösteriniz.

V sonlu boyutlu bir $\mathbb{K}$ vektör uzayı ise her birebir doğrusal $f : V \rightarrow V$ dönüşümün örten ve her örten doğrusal $f : V \rightarrow V$ dönüşümün birebir olduğunu Doğrusal Cebir dersinde öğreniriz. Ancak Doğrusal Cebir derslerinde genellikle sonlu boyutlu vektör uzaylarında çalıştığımızdan bu sonuçlar bizi yanlış koşullandırabilir. Aşağıdaki problem bunu önlemeyi amaçlamaktadır.

Problem 0.0.7 V sonsuz boyutlu bir vektör uzay, $\dim V = \kappa$ ve $1 \leq \mu \leq \kappa$ olsun.

1. Birebir ancak örten olmayan doğrusal $f : V \rightarrow V$ dönüşümlerinin varlığını kanıtlayınız.
2. Çekirdeğinin boyutu μ olan örten doğrusal $f : V \rightarrow V$ dönüşümlerinin varlığını kanıtlayınız. Bu doğrusal dönüşümler elbette örten ancak birebir değildir.
3. Bir vektör uzayının sonsuz boyutlu olması için gerek ve yeter koşul bu vektör uzayının bir öz alt vektör uzayıyla eşyapılı olmasıdır, kanıtlayınız.

Problem 0.0.8 Her toplamsal $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun $\mathbb{Q}$ doğrusal olduğunu kanıtlayınız.

Problem 0.0.9 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{Q}$ doğrusal ve sürekli ise $\mathbb{R}$ doğrusal olduğunu ve tek olarak belirli bir $a \in \mathbb{R}$ ile her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = ax$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 0.0.10 $\dim \mathbb{R}_{\mathbb{Q}} = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{h}Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathfrak{c}$ ve $\mathfrak{h}Hom_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = 2^{\mathfrak{c}}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 0.0.11 Toplamsal ancak sürekli olmayan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının varlığını kanıtlayınız.

Problem 0.0.12 Toplamsal ancak sürekli olmayan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının kümesinin çokluk sayısının $2^{\mathfrak{c}}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 0.0.13 Orta nokta dışbükey fonksiyonların sürekli olması gerekmediğini kanıtlayınız.

Problem 0.0.14 $C, S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (1) \quad & C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y) \\ (2) \quad & S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y) \end{aligned}$$

denklem sisteminin tüm çözümlerini bulunuz (Analizcilere uyarı: Bu denklem sisteminin $\cos x$ ve $\sin x$ fonksiyonlarının açılımları olması sizi “bu denklemlerin çözümleri varsa türevlenebilir olmalıdır” veya benzeri düşüncelere yöneltmesin. Bu denklem sistemini çözümlerinin çoğu, $2^{\mathfrak{c}}$ kadarı sürekli değildir).

Problem 0.0.15 Bir önceki problemde sorulan denklem sisteminin tüm sürekli çözümlerini bulunuz.

Problem 0.0.16 α herhangi bir sıra sayısı ve $(A_{\xi})_{\xi < \alpha}$ ise $\mathbb{R}^n$ uzayımızın açık (kapalı) altkümelerinin kesin genişleyen (daralan) bir dizisi olsun. α 'nın sayılabilir olduğunu kanıtlayınız.

Problem 0.0.17 Bir α sıra sayısının sayılabilir olmasının, $\leq$ gerçek sayılar arasındaki doğal sıralamayı göstermek üzere, $\alpha \cong (S, \leq)$ olacak biçimde bir $S \subseteq \mathbb{R}$ altkümesinin bulunmasıyla eş anlamlı olduğunu kanıtlayınız.

Problem 0.0.18 $\mathbb{R}^n$ 'deki her kusursuz altkümenin gücü $\mathfrak{c}$ 'dir.

Problem 0.0.19 $\mathbb{R}^n$ 'deki her kapalı ve sayılamaz küme, bir kusursuz küme ve bir sayılabilir kümenin ayrık birleşimi olarak yazılabilir. $\mathbb{R}^n$ 'deki her kapalı kümenin gücü $\leq \aleph_0$ veya $= \mathfrak{c}$ 'dir.

Problem 0.0.20 $\mathbb{R}^n$ 'deki Borel kümelerinin $\mathcal{B}^n$ kümesinin gücü $\mathfrak{c}$ 'dir.

X topolojik uzayımız $\emptyset$ veya tek ögeli ise κ ve μ , sıfırdan farklı herhangi iki çokluk sayısı olmak üzere bu tipten basit uzaylar için $X^{\kappa} \stackrel{top}{=} X^{\mu}$ olduğu apaçıktır. Diğer yandan Brouwer “ $\mathbb{R}^n \stackrel{top}{=} \mathbb{R}^m \iff n = m$ ” olduğunu kanıtlamıştır. Bu teoremin yaratacağı yanlış şartlanmayı önlemek için bununla taban tabana zıt aşağıdaki iki problemi veriyoruz.

Problem 0.0.21 $C \subset \mathbb{R}$ Cantor kümesi ve $\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrasyonel sayıların kümesi olmak üzere her $1 \leq \mu \leq \aleph_0$ için $C \stackrel{top}{=} C^\mu$ ve $\mathbb{I} \stackrel{top}{=} \mathbb{I}^\mu$ olduğunu gösteriniz.

Problem 0.0.22 Her X topolojik uzayı ve her sonsuz κ çokluk sayısı için X topolojik uzayının bir Y topolojik uzayına, her $1 \leq \mu \leq \kappa$ için $Y \stackrel{top}{=} Y^\mu$ olacak biçimde gömülebileceğini gösteriniz.

Problem 0.0.23 1. $\mathbb{R}^2$ düzleminin, x -eksenine koşut her doğruyla arakesiti bu doğruda yoğun bir kümeden, y -eksenine koşut her doğru ile arakesiti ise tek noktadan oluşan altkümelerinin varlığını kanıtlayınız.

2. $\omega \leq \mu \leq \mathfrak{c}$ ise her $y \in \mathbb{R}$ değerini tam μ kez alan $\mathbb{Q}$ -doğrusal $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümlerinin varlığını kanıtlayınız.

Problem 0.0.24 $\mathbb{R}^2$ düzleminin bu düzlemdeki her doğruyu tam iki noktada kesen altkümelerinin varlığını kanıtlayınız.

Problem 0.0.25 $\mathbb{R}^2$ düzleminin ayrık çemberlerin birleşimi olarak yazılabileceğini kanıtlayınız.

Problem 0.0.26 $\mathbb{R}^3$ uzayımızın ayrık çemberlerin birleşimi olarak yazılabileceğini kanıtlayınız.

Problem 0.0.27 $n \geq 2$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ bir bölge ve $B \subseteq A$ sayılabilirse $A \setminus B$ de bir bölgedir. $A \setminus B$ kümesinin herhangi iki noktası bu kümedeki sonlu sayıda çember parçalarıyla birleştirilebilir. Kanıtlayınız.

Problem 0.0.28 $\mathbb{R}^2$ düzleminde her sonsuz A altkümесinden sonsuz bir B altkümесinin izleyen koşul sağlanacak biçimde seçilebileceğini kanıtlayınız: B kümesinden rastgele dört farklı a, b, c, d noktaları verildiğinde a noktası b, c, d noktalarının gerdiği $\Delta(b, c, d)$ üçgeninin içinde değildir.

Problem 0.0.29 $\mathbb{R}$ 'de yoğun ve gücü $\mathfrak{c}$ olan birinci kategoriden altkümelerin varlığını kanıtlayınız.

Problem 0.0.30 Her sayılamaz ve kapalı $K \subseteq \mathbb{R}^n$ için $A \cap K \neq \emptyset$ ve $A^c \cap K \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan $A \subseteq \mathbb{R}^n$ altkümelerinin varlığını kanıtlayınız.

Problem 0.0.31 1. $\mathbb{R}^n$ 'de, kapalı her altkümесi sayılabilir olan sayılamaz bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin varlığını kanıtlayınız.

2. $\mathbb{R}^n$ 'de ne $\mathbb{R}^n \setminus A$ ne de A 'nın kusursuz bir altküme içermediği A altkümelerinin varlığını kanıtlayınız.

Problem 0.0.32 V bir $\mathbb{K}$ vektör uzayı ise iyi sıralama aksiyomunu kullanarak V vektör uzayının bir bazının varlığını kanıtlayınız. Ayrıca baştan bir $A \subseteq V$ doğrusal bağımsız kümesi verilirse $A \subseteq B$ olmasının sağlanabileceğini kanıtlayınız.

Problem 0.0.33 $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ uzayının Lebesgue ölçülebilir ve ölçüsü sıfır olan bir Hamel bazı olduğunu kanıtlayınız. Not: Cantor'un süreklilik hipotezi altından Lebesgue ölçülemeyen Hamel bazları da vardır.

Problem 0.0.34 $A \subseteq \mathbb{R}$ ve sayılabilir sonsuz bir $I \subseteq \mathbb{R}$ kümelerini her $i \in I$ için $A_i := i + A$ ötelemesi $\mathbb{R}$ 'de yoğun ve $\{A_i\}_{i \in I}$ ise $\mathbb{R}$ 'nin bir parçalanışı olacak biçimde bulunuz.

Problem 0.0.35 $\mathbb{R}$ gerçekte sayılar kümesinin bir A öz altkümesinin, her $r \in \mathbb{R}$ için $\mathcal{A}_r := \{A + nr \mid n \in \mathbb{N}\}$ ailesi sonlu olacak biçimde bulunabileceğini kanıtlayınız.

Problem 0.0.36 $\mathcal{A} = \{x + A \mid x \in \mathbb{R}\}$ sayılabilir olacak biçimde $\mathbb{R}$ 'nin bir A öz altkümesininbin olduğunu kanıtlayınız.

Problem 0.0.37 Cantor kümesini oluştururken atılan her açık aralıkta sabit olan sürekli bir $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunun ayrıca $f(0) = 0$ ve $f(1) = 1$ olacak biçimde bulunabileceğini kanıtlayınız.

Problem 0.0.38 X bir küme ve $\mathcal{F}$ ise değer bölgeleri $[X]^{\leq \omega}$ veya X , tanım bölgeleri ise $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere X^n tipinde kümeler olan bir fonksiyonlar ailesi olsun. Burada n doğal sayısı farklı fonksiyonlarda farklı olabilir. $\mathcal{F}$ sayılabilir olsun. Bu durumda:

1. Her $Z \subseteq X$ altkümesine karşılık bu kümeyi içerip $\mathcal{F}$ 'nin etkisi altında kapalı olan kümeler içinde $\subseteq$ bağıntısına göre en küçük olan bir Y kümesi vardır. Bu kümeyi $kp_{\mathcal{F}}(Z)$ ile göstereceğiz. $\aleph_0 \leq kp_{\mathcal{F}}(Z) \leq \aleph_0$, dolayısıyla Z sonsuz ise $\aleph_0 \leq kp_{\mathcal{F}}(Z) = \aleph_0$;
2. $\aleph_0 < \kappa$ ise X kümesinin, $\mathcal{F}$ 'nin etkisi altında kapalı olan altkümelerinin artan bir $(X_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ dizisi her $\alpha < \kappa$ için $\aleph_0 < \aleph_\alpha$, $X = \bigcup_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ ve her limit λ için $X_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ olacak biçimde vardır.

Problem 0.0.39 $\mathbb{R}^2$ düzleminin her X altkümesinin sayılabilir bir $\mathcal{A}$ parçalanışının her $A \in \mathcal{A}$ kümesinin farklı iki noktasının birbirine uzaklığı daima irrasyonel olacak biçimde bulunabileceğini kanıtlayınız.

Problem 0.0.40 $\mathbb{R}^2$ düzlemimizin aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\{A, B\}$ parçalanışının olamayacağını gösteriniz:

1. y -eksenine koşt her doğru B kümesini en fazla sayılabilir noktada keser.
2. x -eksenin koşt her doğru A kümesini en fazla sonlu noktada keser.

Problem 0.0.41 X ve Y güçleri $\aleph_\mu$ olan iki küme ve $\aleph_\nu < \aleph_\mu$ bir başka çokluk sayısı olsun. $Z = X \times Y$ kümesinin bir $Z = A \sqcup B$ parçalanışının her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $\aleph(B \cap \{x\} \times Y) \leq \aleph_\nu$ ve $\aleph(A \cap X \times \{y\}) \leq \aleph_\nu$ olacak biçimde bulunabilmesi için gerek ve yeter koşulun $\mu = \nu + 1$ olduğunu gösteriniz.

Problem 0.0.42 Cantor'un süreklilik hipotezi, $\mathbb{R}^2$ düzleminin x -eksenine koşt her doğruyla sayılabilir noktada kesişen bir A kümesiyle y -eksenine koşt her doğruyla sayılabilir noktada kesişen bir $B = \mathbb{R}^2 \setminus A$ kümesine parçalanabilmesine denktir. Kanıtlayınız.

Problem 0.0.43 a, b, c gerçekte sayıları $\mathbb{Q}$ üzerinden doğrusal bağımsızlar $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının, f fonksiyonu a , g fonksiyonu b ve $f + g$ fonksiyonu c periyodlu olacak biçimde bulunabileceklerini kanıtlayınız.

Problem 0.0.44 $\mathbb{R}$ uzayının her kusursuz altkümesinde her x değerini $\mathfrak{c}$ kez alan bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun varlığını kanıtlayınız

Problem 0.0.45 Her gerçekte değeri her açık aralıkta sonsuz kez almasına karşın yine de Lebesgue ölçüsüne göre hemen her yerde sıfır olan bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun varlığını kanıtlayınız.

Problem 0.0.46 Her $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun Lebesgue ölçüsü sıfır olan bir küme dışında bir Darboux fonksiyonuna eşit olduğunu kanıtlayınız.

Problem 0.0.47 Hiçbir aralıkta sabit olmamasına karşın sürekli türevlenebilir bir $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\{f(x) \mid f'(x) = 0\}$ tekil değerler kümesinin sayılamaz olabileceğini kanıtlayınız.

Problem 0.0.48 κ bir sonsuz çokluk sayısı olsun. X ve Y güçleri κ olan iki küme, $F := \{f \mid \text{tan} f \subseteq X \wedge f : \text{tan} f \rightarrow Y\}$ ve $\aleph F = \kappa$ olsun. Bir $g : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun X kümesinin gücü κ olan hiçbir altkümesinde hiçbir $f \in F$ ile çakışmayacak biçimde bulunabileceğini gösteriniz.

Problem 0.0.49 Bir $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun, gücü $\mathfrak{c}$ olan hiçbir altkümeye sürekli olmayacak biçimde bulunabileceğini kanıtlayınız.

Problem 0.0.50 Bir X normal Hausdorff uzayında normlanmış bir μ ölçüsünün, dd. $\mu(X) = 1$ koşulunu sağlayan bir μ ölçüsünün desteğinin ölçüsünün 0 olabileceğini örnekleyiniz.



1

CANTOR KÜMELER KURAMININ BAZI AÇMAZLARI

Önce Cantor'un küme tanımını, sonra CKK'nın aksiyomlarını vereceğiz. Cantor Kümeler Kuramı, Cantor, Burali-Forti ve Russell çelişkileri gibi bir takım çelişkileri içermektedir. Bunlarla tanışacağız. Başka açmazlarla tanımlarda özenli olmamız gerektiğini öğreneceğiz.

1.1 CANTOR KÜMELERLE NİÇİN UĞRAŞTI?

Georg Cantor 1845-1918 yılları arasında yaşamış bir Alman matematikçidir¹. Cantor'un çalışmalarından önce, dar bir alanda, matematiğin o dönemdeki durumunu kısaca hatırlayalım. Sonsuzluk kavramı hakkında henüz bir görüş birliği yoktur. Matematikçiler ve filozoflar *gerçek* ve *potansiyel sonsuzluk* tartışmaları yapmaktadırlar. Potansiyel sonsuzluk, asla tamamlanmamış, belli bir işlemle sürekli oluşum durumunda olan sonsuzluktur. Örneğin bu görüşü savunanlar için doğal sayılar 0 ile başlayıp daima bir sonra gelen sayının oluşturulduğu ve asla tamamlanmayacak bir sonsuzluktur. Siz sürekli bir sonraki doğal sayıyı oluşturarak ilerleyebilirsiniz ama

¹George Cantor (3.3.1845, St. Petersburg - 6.1.1918, Halle). Eğitimi 1862-1867 arasında Zürich, Göttingen ve Berlin'de yaptı. Berlin'de Weierstrass, Kummer ve Krononecker'in yönetiminde çalıştı. Doktorasını 1867'de Kummer'in denetiminde yaptı. Bir süre Berlin'de matematik öğretmeni olarak çalıştıktan sonra 1869'dan itibaren Halle Üniversitesinde çalıştı ve oradan 1913'te emekli oldu. Alman Matematikçiler Birliği'nin kurucusu (1890) ve ilk başkanıdır.

asla tüm doğal sayıları oluşturulmuş bir bütün olarak ele alamazsınız. Bu görüşe bir örnek, Gauss'un, arkadaşı Schumacher'e 12.07.1831'de yazdığı bir mektuptan alınan aşağıdaki alıntıdır:

“Böylece her şeyden önce, matematikte asla izin verilmemiş olan tamamlanmış bir sonsuz büyüklüğün kullanımı protesto ediyorum. Sonsuzluk aslında bir yandan kısıtlamasız büyümesine izin verilen bazı oranların kendilerine istenildiği kadar yaklaşıldığı sınırlardan konuşma tarzıdır.”

Herhangi iki farklı gerçek sayı arasında sonsuz çoklukta rasyonel sayı olduğu bilinmektedir. Öbür yandan Liouville'in cebirsel olmayan sayıları keşfinden sonra, irrasyonel sayıların rasyonel sayılardan bir biçimde “*daha fazla*” olduğu sezilmeye başlanmıştı, ancak bu “*daha fazla*”nın nasıl tanımlanması gerektiği bilinmemekteydi. İşte böyle bir ortamda Cantor fonksiyonların bir aralıkta trigonometrik serilere açılımlarıyla uğraşmaktaydı ve özellikle bu açılımın tekliğine yoğunlaşmıştı. 1870'teki bir çalışmasına ek olarak 1871'de yazdığı bir notta teklik için serinin fonksiyonun değerine sonlu noktada yakınsamamasının önemli olmadığını belirtti. Ve serüven böyle başladı. Bu sonuçla da hoşnut değildi. Serinin fonksiyonun değerine yakınsak olması gerekmeyen noktaları araştırması ister istemez onu gerçek sayıların belli özellikli bir takım altkümelerinin incelenmesine, bu ise her şeyden önce gerçek sayılarla daha yakından ilgilenmeye yöneltti. Sonluötesi tekrarlı tanımlamalar henüz bilinmiyorken onların kullanılmasını zorunlu kılan durumlar baş gösterdi. A^0 bir gerçek sayılar kümesi olmak üzere A^1 ile bu kümenin yığılma noktalarının kümesini gösterelim². Bu işlemi yineleyerek her n doğal sayısı için A^n 'nin yığılma noktalarının A^{n+1} kümesini oluşturalım. Böylece tüm doğal sayıları tüketerek

$$A^0, A^1, A^2, \dots$$

kümelerini oluşturduktan sonra Cantor'un işi henüz bitmemişti! Cantor $\bigcap_{n=0}^{\infty} A^n$ arakesitini oluşturup A^0 ile yaptığı işlemi bu arakesitle tekrarlamak istiyordu. Bu durumda

$$\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots$$

gibi *yeni sıra sayılarına* gereksinim duydu. Böylece $A^\omega := \bigcap_{n=0}^{\infty} A^n$ olmak üzere bu kümenin yığılma noktalarının kümesini $A^{\omega+1}$ ile ve tekrarlı

² α gerçek sayısını içeren her açık aralıkta A kümesinin sonsuz çoklukta ögesi varsa ve ancak bu durumda α sayısı A kümesinin bir yığılma noktasıdır denir

tanımla her n doğal sayısı için $A^{\omega+n}$ kümesinin yığılma noktalarının kümesini $A^{\omega+n+1}$ olarak tanımladı. Bu yeni sıra sayıları yardımıyla oluşturduğumuz kümelerle elimizdeki küme dizimiz şimdi şu şekli alır:

$$A^0, A^1, A^2, \dots, A^\omega, A^{\omega+1}, A^{\omega+2}, \dots$$

Tüm bu kümelerin arakesitini alıp aynı işlemi tekrarlamak istediğinde bu kez Cantor

$$\omega 2, \omega 2 + 1, \omega 2 + 2, \dots$$

ile gösterdiği yeni sıra sayılarına gereksinim duydu. Bu öykünün nasıl devam edeceğini okuyucunun doğru sezdiğini düşünüyoruz ve ileride sıra sayılarını ayrıntılı olarak inceleyeceğiz³. Tümüyle klasik matematiğe ait bir problem Cantor'u, gerçek anlamda kümeler kuramına ilişkin ilk çalışmasına [5]'e yöneltti. Bu çalışmada önce cebirsel sayıların sayılabilir olduğunu kanıtladıktan sonra gerçek sayılar ve doğal sayılar kümesinin farklı türden sonsuz kümeler olduğunu, gerçek sayıları doğal sayılarla numaralamanın söz konusu olamayacağını kanıtlamıştır. İkinci bölümün beşinci bölümünde bu önemli teoremin Cantor tarafından verilen ilk kanıtını da vereceğiz. Bu çalışmayı izleyen bir dizi çalışmada, [6], [7], [8], [9], [10], [11] ve [12]'de, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^n$ uzaylarının altkümelerini yalnızca çokluları açısından incelememiş, aynı zamanda bu uzaylarının topolojilerine ilişkin önemli teoremler de kanıtlamıştır. Yoğunlaşılan bir problemin öngörülme yeni ufuklar açması matematikte hiç de ender değildir.

1.2 CANTOR'UN KÜME TANIMI

Cantor'un kümeler kuramına ilişkin en önemli çalışmaları kuşkusuz [14] ve [15]'tür. Bu çalışmalarda Cantor aşağıdaki ünlü küme tanımını vermiştir:

“Bir “küme” den, algımızın veya düşüncemizin iyi ayrırtedilmiş belirli nesnelerinin (bunlara kümemizin “öğeleri” denecektir) bir bütün oluşturmak üzere M biraraya getirilişini anlıyoruz [14].”

Tıpkı Öklid'in “nokta” tanımı gibi: “Nokta parçası olmayandır”, bu da gerçekte bir tanım değildir. Bu tanımda tanımlanan “Menge (küme)”, tanımlayan ise “Zusammenfassung von.(...lerin biraraya getirilişi,...lerin derlemi)”dir. Ancak burada tanımlayan da tanımlanan kadar bilinmiyor veya

³Eğer uyuyamıyorsanız Just-Weese [36]'de koyunları saymak yerine bu sıra sayılarına devam etmenizi önermektedir. İşiniz bitmeden uyuyacağınızdan emin olabilirsiniz!

tanımlananı ne kadar biliyorsak tanımlayanı da o kadar biliyoruz! Zihnimizdeki “küme” imgesi “derlem, topluluk, koleksiyon...” gibi ne daha fazla ne de daha az bilinen benzerleriyle değiştiriliyor, o kadar! Bugün bile çoğu kitapta aynı tanımları görmekteyiz!! Biz artık her aksiyomatik kuramın *tanımsız terimleri* olduğunu biliyoruz. Nokta geometrinin tanımsız terimidir. Sınıflara girmeden kümeler kuramı yaparsanız o zaman *küme* bu kuramın tanımsız terimi olacaktır. Bu kitabı izleyecek Aksiyomatik Kümeler Kuramı kitabında tanımsız terimimiz *sınıf* olacaktır ve kümeyi onlar yardımıyla tanımlayacağız. *Herhangi bir sınıfın ögesi olan sınıflara küme diyeceğiz.*

Cantor’un küme tanımına yakından bakalım. Çalışmakta olduğumuz evrenimizin nesnelere ilişkin bir $\varphi(x)$ önermesi veya özelliği verilsin. Cantor özetle şunu söylemektedir: Evrenimizin nesnelerinden φ özelliğine sahip olan x nesnelerini seçip ayırabilir, biraraya toplar ve bunlardan M ile göstereceğimiz ve küme olarak adlandırdığımız yeni bir bütün oluşturabiliriz. Bu durumda

$$M = \{x \mid \varphi(x)\}$$

yazacağız. Bu M artık “*zihninizde bir varlığa*” sahiptir ve bizzat kendisi artık düşünce veya kavrayışımızın bir nesnesidir. x nesnesi M kümesine aitse bu kısaca $x \in M$ ile, değilse $\neg(x \in M)$ veya $x \notin M$ ile gösterilecektir. Böylece her x için

$$x \in M \iff \varphi(x)$$

olacaktır. Cantor’un bu masum görünümlü küme tanımına ilişkin birkaç not düşmek gerekmektedir:

1. Nesnelerimize ilişkin *her* $\varphi(x)$ önermesi bir küme tanımlamaktadır. $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ önermeleri mantıksal olarak denk önermelerse, dd. her x için $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ önermeleri aynı anda doğru veya aynı anda yanlış iseler, ki bu durumda $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ yazılır, bunlar aynı kümeyi tanımlarlar: $\{x \mid \varphi(x)\} = \{x \mid \psi(x)\}$. Örneğin evrenimiz $\{2, 3, 5, 6, 8, 9, 12\}$ ve $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ önermeleri (özellikleri) sırasıyla “ x asaldır” ve “ $x \leq 5$ ” olsun. Bu iki özellik **anlamsal farklıdır** ancak **kaplamsal eşittirler** ; gerçekten

$$\{x \mid \varphi(x)\} = \{2, 3, 5\} = \{x \mid \psi(x)\}$$

Denk önermelere aynı gözüyle bakmak koşuluyla, *önermelerle çalışmak yerine* onların tanımladıkları *kümelerle çalışabiliriz*.

2. M ile çalışabilmek için önüme konan herhangi bir x nesnesinin bu kümeye ait olup olmadığını bilmek zorunda değilim. Çalışma olanağınızın ne kadar genişlediğine dikkat ediniz. Örneğin çalıştığımız evren $\mathbb{R}$ gerçek

sayılar kümesi ve $\varphi(x)$ önermemiz ise “ x bir irrasyonel sayıdır” olsun⁴. Bize verilen bazı gerçel sayıların irrasyonel olup olmadığını bilemeyebiliriz, yine de $\mathbb{I} = \{x \mid \varphi(x)\}$ irrasyonel gerçel sayılar kümesi ile çalışabilir ve teoremler kanıtlayabiliriz. Örneğin doğal sayılar kümesinden bu kümeye birebir ve örten bir dönüşümün verilemeyeceğini dd. $\mathbb{I}$ kümesinin *sayılamaz* olduğunu kanıtlayabiliriz.

3. $\varphi(x)$ önermesini doğru kılan x nesnelerinin *niceliğine ilişkin hiçbir kısıtlama konmamıştır!* Bunun en yalın anlamı şudur: *Gerçek (aktüel) sonsuzluk ve potansiyel sonsuzluk tartışmalarına nokta konulmuş ve gerçek sonsuzluk benimsenmiştir.* Tüm akıl almaz gerçek sonsuzluklara kapılar sonuna kadar açılmıştır. φ özelliklerine *niceliksel bir kısıtlama getirilmemiştir!* Getirilen yegane *niteliksel* kısıtlama ise *üçüncünün olmazlığı ilkesi* bazında ya $\varphi(x)$ ya da $\neg\varphi(x)$ olduğudur. Daha önce adı geçen Cantor, Burali-Forti ve Russel çelişkilerinde bu sınırsız özgürlüğün payı büyüktür. Biz sonlu bir evrende yaşamaktayız ve sezgilerimiz bu sonlu evrende oluşmaktadır. Sonsuzluklara kapıları açtığımız bir evren fantazi bir evrendir ve oradaki ilişkilerin sezgilerimizle örtüşmesi gerekmez. Bunun örneklerine çok sık tanıklık edeceğiz.

1.3 CANTOR'UN AKSİYOMLARI

“Öğelerin bir çokluğuna (bir kümesine), *hem* aynı kavram alanına ait herhangi bir nesnenin bu çokluğa ait bir öğe olup olmadığı *hem de* bu kümeye ait iki öğenin verilmiş biçimlerindeki biçimsel farka rağmen eşit olup olmadıkları bu kümenin tanımı ve üçüncünün olmazlığı mantık ilkesi temelinde *içerden belirlenmiş* görülmek zorundaysa, **iyi tanımlıdır** diyeceğim.

Genelde elimizdeki yöntemler ve yeteneklerimiz kesin ve tam kararı vermemize yetmeyecektir. Burada söz konusu olan bu değildir, önemli olan *sadece içsel belirlenmişliktir (interne Determination)*, ki bu somut durumlarda, amaçlar gerektirdiğinde, yardımcı araçlar geliştirilerek bir *gerçek (dışsal) belirlemeye (aktuelle (externe) Determiniertheit)* dönüştürülmelidir [8].”

Mantık bağlamında Cantor açıkça “*Üçüncünün Olmazlığı İlkesi*”ni benimsemiştir. Cantor yalnızca iyi tanımlı çokluklarla çalışmıştır. Bu son derece önemlidir. Cantor’un kümeler kuramının üç aksiyomu olduğu söylenir.

⁴ $\mathbb{R}$ kümesi için “gerçel sayılar kümesi” ismi yaygındır, ancak biz gerçel sayılar demeyi yeğliyoruz.

Bunun böyle olup olmadığını ikinci bölümün sonunda tartışacağız. İlki iki kümenin eşitliğine ilişkindir ve akla gelen en doğal aksiyomdur: *İki küme ancak ve ancak aynı öğeleri içeriyorlarsa, dd. matematik evrenimizde aynı yeri kaplıyorlarsa birbirlerine eşittirler*. Açıktır ki burada *eşitlik*, Cantor'un sezgisel evreninde, **özdeşlik** olarak alınmaktadır.

Uzantı Aksiyomu (UzC) : *y ve z kümeler olmak üzere*

$$y = z \iff \forall x (x \in y \iff x \in z) \quad (1.1)$$

Bu aksiyoma **Kaplam Aksiyomu** da diyeceğiz. $x \in y$ koşulunu sağlayan tüm x öğelerinin kümesini $u(y, \in)$ ile gösterir ve buna y kümesinin $\in$ bağıntısına göre **uzantısı** veya y kümesinin $\in$ bağıntısına göre **başlangıcı** dersek (UzC) aksiyomu özetle *uzantıları eşit olan kümelerin birbirine eşit olduğunu* söyler: Her y, z kümeleri için $y = z \iff u(y, \in) = u(z, \in)$.

İkinci aksiyomumuz küme tanımında verilen “küme oluşturmaya” ilişkindir ve *verilen her $\varphi(x)$ özelliğine karşılık öğeleri tamı tamına bu özelliğe sahip olan x nesnelerinden oluşan bir kümenin varlığını* ileri sürer. Yukarıdaki alıntı ışığında derleme alanımızdaki *her x nesnesi için $\varphi(x)$ ve $\neg\varphi(x)$ ’ten birinin ve ancak birinin doğru olması*, diğer yandan $\varphi(x) = \varphi(y)$ ise $x = y$ olup olmadığının da alıntıda belirttiği anlamda içerden belirli olması gerekmektedir. Bu durumda $\varphi(x)$ önermesinin doğru kılan x öğeleri bir bütün oluşturacak biçimde derlenebilirler. İmlerle gösterirsek

(DerC) : **Cantor Derleme Aksiyomu :** *Her $\varphi(x)$ özelliğine karşılık bir y kümesi*

$$\forall x (x \in y \iff \varphi(x)) \quad (1.2)$$

olacak biçimde vardır.

Derleme aksiyomu y kümesinin *varlığını* ileri sürer, öte yandan uzantı aksiyomuyla bu kümenin *tek* olduğu apaçıktır. Bu nedenle genellikle $y = \{x \mid \varphi(x)\}$ yazarız. Bu aksiyoma **derleme, ayıklama, sıkıştırma** veya **bir arada tutma** aksiyomları da denir. Aslında Cantor açıkça belirtmeden az ileride öğreneceğimiz **Seçme Aksiyomunu** da kullanmıştır.

“İyi tanımlı her kümenin iyi sıralanmış küme biçimine getirelebileceğine gelince, bana göre temel ve sonuçta zengin, genel geçerliliğiyle özellikle dikkate değer bu düşünce yasasına ilerideki çalışmalarımda tekrar döneceğim [10].”

Burada Seçme Aksiyomuna denk olan İyi Sıralama Teoremi’yle karşı karşıyayız. Cantor ona bir *düşünce yasası* olarak bakmaktadır, tıpkı belirtmeden kullandığı Seçme Aksiyomu gibi! Buna denk olan Seçme Aksiyomunu verelim.

(Seç): Seçme Aksiyomu : $\mathcal{A}$ öğeleri boştan farklı kümeler olan bir küme ise her $x \in \mathcal{A}$ için $f(x) \in x$ koşulunu sağlayan bir $f : \mathcal{A} \rightarrow \bigcup \mathcal{A}$ fonksiyonu vardır. Burada f fonksiyonuna $\mathcal{A}$ için bir **seçen fonksiyon** denir ve bu fonksiyonun her $x \in \mathcal{A}$ kümesinden bir $f(x)$ öğesinin seçtiği söylenir.

Daha önceleri rahatlıkla kullanılan bu aksiyom Zermelo tarafından bir aksiyom olarak dile getirilip her kümenin iyi sıralanabileceğinin gösteriminde kullanıldıktan sonra sürüp giden tartışmaların konusu olmuştur [65], [66]. $\mathcal{A}$ sonlu olduğunda bu bir teoremdir ve kolayca kanıtlanır. Sorun $\mathcal{A}$ sonsuz olduğunda başlar ve aksiyomun kurucu olmaması ayrı bir derttir: Aksiyom f 'nin varlığını ileri sürer, ama tanımını vermez! Buradaki zorluk f 'yi $\mathcal{A}$ kümesinin sonsuz olması durumunda gerçekten herkesin ondan aynı şeyi anlayabileceği bir biçimde bir küme olarak verebilmektir, dd. kuramımızın bir φ formülü yardımıyla bu kümeyi tanımlayabilmeliyiz. İşte bu genelde mümkün değildir ve aksiyom bize böyle bir φ vermez, sadece onun varlığını ileri sürer. Yine bunu sevilen çorap veya bilya örneğiyle açıklamaya çalışalım. Her n doğal sayısına karşılık bir b_n beyaz bilya ile bir s_n siyah bilya içeren iki öğeli bir A_n kümesi verilmiş olsun. $\mathcal{A} := \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $f := \{(A_n, s_n) \mid A_n \in \mathcal{A}\}$ olarak tanımlandığında kendisinden herkesin aynı şeyi anladığı bir $f : \mathcal{A} \rightarrow \bigcup \mathcal{A}$ fonksiyonu her $A_n \in \mathcal{A}$ için $f(A_n) \in A_n$ olacak biçimde tanımlanmıştır. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için iki siyah bilya içeren iki öğeli A_n^* kümeleri verilmiş ve $\mathcal{A}^* := \{A_n^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ olsun. Bu durumda kendisinden herkesin aynı şeyi anlayacağı ve her A_n^* için $g(A_n^*) \in A_n^*$ koşulunu sağlayan bir $g : \mathcal{A}^* \rightarrow \bigcup \mathcal{A}^*$ fonksiyonunu kümeler kuramı dilinde tanımlamayı deneyiniz.

Seçme Aksiyomunun gerçekten bir aksiyom olması gerektiğini ona eşdeğer ancak hiç de aşikar olmayan başka önermeleri tanıdığımızda anlarız. Sadece Seçme Aksiyomu kullanarak kanıtlayabildiğimiz çok önemli teoremler var. Örneğin, her vektör uzayının bir bazı olduğunu, Hahn-Banach Teoremi'ni, Lebesgue ölçülemez kümelerin varlığını, kompakt uzayların çarpım uzaylarının çarpım topolojisiyle yine kompakt olduğunu vb. ... gibi her biri çok önemli teoremler ancak seçme aksiyomu kullanılarak kanıtlanabilmişlerdir. Yine Seçme Aksiyomu ile kanıtlanan Banach-Tarski paradoksuna göre $\mathbb{R}^3$ uzayında birim küre beş ayrık parçaya o şekilde bölünebilir ki bu parçalar izometrik dönüşümlerle bir araya getirilerek ikisinden yeni bir birim küre ve diğer üçünden bir başka bir birim küre yapılır⁵.

⁵Yine [36]'daki espirili anlatımla, elbette Banach ve Tarski böyle bir şeyi kanıtlamamışlardır. Kanıtlamış olsalardı ilk yapacakları şey bu çalışmayı yayınlamak yerine doğru bir kuyumcuya gidip, tekrar tekrar bir altın küreden iki altın küre yaptırmak olurdu! Ancak onlar bu teoremi

Aslında pek tartışılmasa da en az Seçme Aksiyomu kadar sorunlu başka bir aksiyomumuz vardır. Bize herhangi bir A kümesi verildiğinde onun tüm altkümelerinin $\mathcal{P}(A)$ ile gösterdiğimiz bir küme oluşturduğunu varsayalım, dd.

$$\mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subseteq A\}$$

ile A kümesinin **güç kümesinin** tanımlandığını varsayalım. İlk bakışta $\mathcal{P}(A)$ 'nın öğelerinin *neler* oldukları net olarak belirtildiği için bu tanım kurucu olarak görünebilir. Ancak ileride öğreneceğimiz gibi A 'nın sonsuz olması durumunda öğelerinin büyük çoğunluğu bizim için hep karanlıkta kalacaktır, dd. ile onları kuramımızın bir φ formülü ile tanımlama şansımız asla olmayacaktır. Kümelerin büyüklerinin başını alıp gitmesinin kaynağının bu varsayım olduğunu göreceğiz.

1.4 BAZI AÇMAZLAR

Aşağıda bazı açmazlar vereceğiz. Bunların bir kısmı doğrudan kümeler kuramı açmazları iken diğerleri dilbilimsel açmazlar, mantık açmazları ve yapay açmazlar olarak adlandırılabilirler. İlk dört açmaz doğrudan kümeler kuramına ilişkindir. Değişik önermeler seçerek derleme aksiyomu yardımıyla bazı kümeler tanımlayacağız. Ancak her defasında bizi bir açmaz bekleyecektir. İlk iki açmazı tartışırken kümeler kuramından bazı bilgileri kanıtsız kullanacağız, üçüncüsü için hiçbir bilgiye gerek yoktur.

1. Cantor'un “Tüm Kümelerin Kümesi” Açmazı (1899) : $\varphi(x)$ olarak $x = x$ önermesini alacağız. Derleme aksiyomuna göre bir

$$\tilde{\mathbb{U}} := \{x \mid x = x\} \quad (1.3)$$

kümesi vardır. Her x matematiksel nesnesi için $x = x$ doğru olduğundan bu $\tilde{\mathbb{U}}$ kümesi tamı tamına bizim **matematik evrenimizdir**. Şimdilik şu iki bilgiyi kabullenelim: (a) M herhangi bir kümeysse $\mathcal{P}(M)$ güç kümesi M 'den daha güçlüdür, dd. M 'den $\mathcal{P}(M)$ 'ye birebir bir dönüşüm vardır ama birebir üzerine bir dönüşüm yoktur. Bu Cantor teoremi olarak bilinir ve ileride kanıtlayacağız. (b) Hiçbir kümenin herhangi bir altkümesi ondan daha güçlü olamaz. Şimdi bu bilgileri $\tilde{\mathbb{U}}$ evrenimize uygulayalım. Her küme evrenimizin bir altkümesidir, dolayısıyla $\mathcal{P}(\tilde{\mathbb{U}})$ kümesi $\mathbb{U}$ evrenimizin bir altkümesidir ve ondan daha güçlü olamaz; diğer yandan Cantor Teoremi'ne göre ise

gerçekten kanıtladılar ve kuyumcuya gitmediler, çünkü bu teorem *kurgusal değildir*. Kurgusal olsaydı bile matematiğin $\mathbb{R}^3$ uzayının bu paradoksun kanıtındaki işlemlerini bizim gerçek dünyamızdaki bir altın küreye uygulama şansımız olamazdı!

daha güçlüdür. Bu bir çelişkidir!! $\tilde{U}$ bir küme olamaz! Ayrıca $\tilde{U}$ bir kümeysen $\tilde{U} \in \tilde{U}$ olmalıdır.

2. Cantor (1895) ve Burali-Forti (1897)⁶ “Sıra Sayıları Açmazı” : Bu açmazı tartışabilmek için ileride öğreneceğimiz birkaç bilgi gereklidir. Sıra sayıları özel bir takım kümelerdir ve kendi aralarında bir $<$ sıralaması açıklanmıştır öyle ki α ve β sıra sayıları için $\alpha < \beta$ bağıntısı $\alpha \in \beta$ bağıntısıyla eş anlamlıdır. Srs ile tüm sıra sayılarının derlemi gösterelim, dd.

$$Srs := \{x \mid x \text{ bir sıra sayısıdır}\}. \quad (1.4)$$

Srs bir kümeysen bir sıra sayısı olacağı kanıtlanır. Bu bilgiler bir açmaz elde etmemiz için yeterlidir. Srs bir küme ise $Srs \in Srs$ olur ve bu bize $Srs < Srs$ çelişkisini verir. Dolayısıyla Srs bir küme olamaz!

3. Russell⁷ Açmazı (1903) : Hiçbir ön bilgi gerektirmediği için açmazların en bilinenidir. Matematikte karşılaştığımız kümeler kendilerinin ögesi değildirler, dd. $x \notin x$; bu tipten kümelere *iyi*, $x \in x$ ise x kümesine *kötü* diyelim. Derleme aksiyomunda önerme olarak “ $x \notin x$ ” olarak

$$\mathcal{R} := \{x \mid x \notin x\} \quad (1.5)$$

kümesini oluşturalım. Şimdi soru şu: $\mathcal{R}$ iyi midir yoksa kötü müdür? $\mathcal{R}$ ’nin tanımından dolayı her x kümesi için $x \in \mathcal{R} \iff x \notin x$ olacaktır. Burada x olarak özellikle $\mathcal{R}$ alırsak $\mathcal{R} \in \mathcal{R} \iff \mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ elde ederiz!! Sözlerle: $\mathcal{R}$ ancak ve ancak kötü ise iyidir. Bu elbette bir çelişkidir.

4. Temelli Kümeler Kümesi: Bir X kümesinde bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi

$$\dots \in x_2 \in x_1 \in x_0 \in X$$

olacak biçimde bulunabiliyorsa X kümesi **temelsizdir**, aksi halde **temellidir** diyelim. $\mathcal{T}$ ile tüm temelli kümelerin kümesini gösterelim. $\mathcal{T}$ ’nin temelli olup olmadığını araştıralım.

Varsayalım ki $\mathcal{T}$ bir temelli küme olsun, dd. $\mathcal{T} \in \mathcal{T}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n := \mathcal{T}$ olarak tanımlarsak $\dots \in t_2 \in t_1 \in t_0 \in \mathcal{T}$ elde ederiz. Bu ise $\mathcal{T}$ kümesinin temelsiz, dd. $\mathcal{T} \notin \mathcal{T}$ olması demektir.

Şimdi $\mathcal{T} \notin \mathcal{T}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\dots \in t_2 \in t_1 \in t_0 \in \mathcal{T}$ olacak biçimde $\mathcal{T}$ ’de bir (t_n) dizisi bulabiliriz. Ancak $t_0 \in \mathcal{T}$ bize t_0 ’ın

⁶Cesare Burali-Forti (13.8.1861, Arezzo - 21.1.1931, Turin). Doktorasını 1884 te Pisa Üniversitesinde yaptı. Esas ilgi alanı vektörel analiz ve doğrusal dönüşümlerdir. 1894-96 arası Peano’nun asistanlığını yaptı ve bir süre onun çalışmalarını tanıtmaya çalıştı.

⁷Bertrand Arthur William Earl of Russel (18.5.1872, Ravenscroft (İngiltere) - 2.2.1970, Plas Penrhyn (Wales)). Cambridge’te Matematik ve Sosyalbilimler eğitimi gördü. Değişik ülkelerde çalıştı. 1950 Edebiyat Nobel ödülünü kazandı. En önemli eseri hocası Alfred North Whitehead ile yazdığı Principia Mathematica’dır. Çelişkisiz bir kümeler kuramı için Tipler Kuramını geliştirdi.

temelli olduğunu söylerken $\dots \in t_2 \in t_1 \in t_0$ bize t_0 'ın temelsiz, dd. temelli olmadığını söyler. Bu bir çelişkidir ve $\mathcal{T} \in \mathcal{T}$ olmalıdır. Sonuçta yine $\mathcal{T} \in \mathcal{T} \iff \mathcal{T} \notin \mathcal{T}$ çelişkisine ulaştık.

Az sonra tartışacağımız Richard, üst oyun ve 8. açmazlardaki bir noktayı belirtmekte yarar vardır. Bu açmazlarda sırasıyla “sonlu kelimeyle tanımlanabilen ondalık sayı”, “sonlu oyun” ve “doğal sayılara ilişkin özellikler” gibi kavramlarla karşılaşacağız. Herhangi bir dönemde tanımlayabileceğimiz sayılar, oyunlar veya özellikler elbette o dönemdeki bilgi birikimimiz ve yeteneklerimize bağlı olarak değişir. Bu açmazları tartışırken bu belirsizliği yok sayıp tüm tanımların neler olduğunda uzlaştığımızı varsayacağız. Önemli olan ve vurgulanmak istenen bu koşulda bile karşımıza açmazların çıktığıdır.

5. Richard Açmazı: Herhangi bir dilde, örneğin Türkçede sonlu sayıda kelimeyle tanımlanabilen ondalık sayıların kümesine M diyelim. Diller sonlu sayıda kelime içerdiklerinden M kümesi sayılabilir bir kümedir, dd. ile bu kümenin elemanlarını $m_1, m_2, m_3, \dots$ olarak numaralayabiliriz. m_k sayısının n . ondalığını m_{kn} ile gösterelim. Şimdi sonlu kelime kullanarak n . ondalığı p_n olan bir p sayısı tanımlayacağız. “ p ondalık sayısı $0 \leq m_{nn} \leq 8$ ise $p_n := m_{nn} + 1$ ve $m_{nn} = 9$ ise $p_n := 0$ ” olarak tanımlansın. Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \neq m_{nn}$ olduğundan $p \neq m_n$ olur. Bu ise $p \notin M$ demektir. Diğer yandan p sayısı sonlu sayıda kelime kullanarak tanımlanmıştır ve $p \in M$ 'dir. Bu bir çelişkidir.

5*. Russell: Richard açmazını Russell'e uyarak şu sevimli şekle dönüştürelim. “ n_0 , Türkçede onsekizden az sözcükle tanımlanamayan doğal sayıların en küçüğü olsun.”. Türkçede sonlu sayıda sözcük bulunduğundan en fazla 17 sözcük kullanarak tanımlayabileceğim doğal sayılar sonlu tanedir. Tanımında en az 18 sözcük kullanılan m doğal sayılarının M kümesi boş değildir ve n_0 gibi bir en küçük ögesi vardır. $n_0 \in M$ olduğundan tanımında en az 18 kelime kullanılmıştır. Diğer yandan yukarıda “ ” içindeki tümceyle bu sayıyı onsekizden az sözcükle tanımlamış olduk!

6. Üst Oyun Açmazı: $s(x)$ özelliği “ x , iki kişilik sonlu bir oyundur” olsun. Burada *sonlu* oyundan, beraberlik de dahil olmak üzere sonlu hamlede tamamlanan oyunlar anlaşılacaktır. $S := \{x \mid s(x)\}$ ile sonlu oyunlar kümesini tanımlayalım. Kullandığımız dil hangi dil olursa olsun sonlu sayıda kelime içereceğinden ve her oyunun anlatımı yine sonlu sayıda kelime ile yapılacağından S kümesi sayılabilir bir kümedir.

Açmazı öne çıkarmak için, daha önce de söylediğimiz gibi tüm mızık-maların önünü keselim. Kullandığımız dilin alfabesindeki her harf, her noktalama imi ve bırakılan her boşluk bir birim olarak alınsın. Oyunların anlatımına da bir üst sınır koyalım. n yeterince büyük bir doğal sayı, örneğin

on milyar olsun. Bu durumda içindeki birim sayısı $\leq n$ olan anlamlı anlamsız tüm metinler sonlu sayıda olacaktır. Bunlardan oyun olanlar da sonlu sayıda olacaktır. Bazı oyunlar uzun sürebilir, ancak ilke olarak bir oyun ya sonludur ya da değil. Bu oyunlardan sonlu oyun olanlar da belirlenmiş olsun. Böylece elimizde sonlu oyunlardan oluşan iyi tanımlı sonlu S kümemiz olacaktır.

Şimdi bir h üst oyununu şu şekilde tanımlayalım: Birinci oyuncu ilk hamlesinde S kümesinden bir oyun seçer, ikinci oyuncu ilk hamlesinde seçilen bu oyunu başlatır. h oyunun anlatımındaki birim sayısı açıkça $< n$ koşulunu sağlar. Eğer $h \notin S$ ise ilk oyuncunun seçtiği oyun sonlu olduğundan h de sonlu olur, dd. $h \notin S \implies h \in S$. Şimdi $h \in S$ olsun. Bu kez ilk oyuncu h oyununu seçebilir. Ama ikinci oyuncu da h oyununu, sırası gelen her oyuncu sürgit h oyununu seçebilir. Bu durumda artık h sonlu bir oyun değildir, dd. $h \notin S$ olur. Yani $h \in S \implies h \notin S$ ve sonuçta $h \in S \iff h \notin S$ olur.

7. Weyl'in Kısır Döngüsü [61]: Bu örneği 5. ve 6. açmazları fazla sözle bulanlar için vereceğiz. $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ da iki işlem tanımlayalım. $O_1(n) := n + 1$ ve $O_2(n) := 2n$. 1 ile başlayıp bu işlemleri herhangi bir sırada en fazla dört kez uygulayarak elde edilemeyen en küçük doğal sayıya a diyelim ($\mathbb{N}^*$ 'nin boştan farklı her altkümesinin en küçük ögesinin bulunduğunu biliyoruz). Örneğin

$$O_1(O_1(1)) = O_1(2) = 3,$$

$$O_1(O_2(O_2(O_1(1)))) = O_1(O_2(O_2(2))) = O_1(O_2(4)) = O_1(8) = 9.$$

Bu şekilde elde edilen sayıların $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 16\}$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla $a = 11$ 'dir. Şimdi olaya yeni bir R işlemi katabalım.

- $R(n)$ sayısı, O_1, O_2 ve R 'nin kendisi de kullanılarak en fazla n adımda elde edilemeyen doğal sayıların en küçüğü olsun.

Şimdi b sayısı O_1, O_2 , ve R işlemleri herhangi bir sırada en fazla dört kez kullanarak elde edilemeyen doğal sayıların en küçüğü olsun. b sayısını bulmayı bir deneyiniz!

8. Anlam Belirli Kavramların Kaplam Belirsizliği [59], [60], [61]. M herhangi bir küme ve ψ bu kümenin öğelerine ilişkin bir özellikse, M kümesinin bu özelliğe sahip öğelerinin kümesini M_ψ ile gösterelim.

Şimdi $\mathbb{N}$ doğal sayılarına ilişkin tüm özelliklerin kümesi M_0 ile gösterilsin. $M_0 := \{\varphi \mid \varphi \text{ doğal sayılara ilişkin bir özellik}\}$. M_0 kümesinin öğelerine doğal sayılara ilişkin 0. tipten özellikler diyelim. $M_1 := \{\varphi^1 \mid \varphi^1, M_0 \text{ kümesinin öğelerine ilişkin bir özellik}\}$ olsun, dd. φ^1 özelliklere ilişkin bir özelliktir ve bunlara 1.tipten özellikler denir. Örnek vermek gerekirse $\varphi_0(x)$,

“ x çifttir”, $\psi_1^1(\varphi)$, “ $\mathbb{N}_\varphi$ sonsuzdur”, dd. “sonsuz çoklukta doğal sayı için $\varphi(x)$ doğrudur” ve $\psi_2^1(\varphi)$ ise “ $\mathbb{N}_\varphi$ kümesinde tam bir tane asal sayı vardır” olsun. Açıkça $\psi_1^1(\varphi_0)$ ve $\psi_2^1(\varphi_0)$, dd. φ_0 özelliği ψ_1^1, ψ_2^1 özelliklerine sahiptir. Şimdi M_0 ’da olmayan doğal sayılara ilişkin yeni bir özellik tanımlayacağız. $\psi^1 \in M_1$ keyfi seçilsin. Bunun yardımıyla ψ_0 şöyle tanımlansın:

$$\psi_0(x) : \Longleftrightarrow \exists \varphi \in M_0 (\varphi(x) \wedge \psi^1(\varphi)).$$

Sözlerle söylersek: x doğal sayısının tanım gereği ψ_0 özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul bu ögenin sahip olduğu en az bir $\varphi \in M_0$ özelliğinin ψ^1 özelliğine sahip olmasıdır. Elbette ψ_0 doğal sayılara ilişkin bir özelliktir, ancak tanımı *tüm* M_0 kümesini kullandığı için $\psi_0 \notin M_0$! ψ_0 özelliği hiçbir $\varphi \in M_0$ özelliği ile anlamsal eşit olamaz, ancak bazı $\varphi \in M_0$ özellikleriyle kapsamsal eşit olabilir, dd. $\mathbb{N}_{\psi_0} = \mathbb{N}_\varphi$ olabilir; ancak bu başka konudur. Böylece doğal sayılara ilişkin *tüm* özelliklerin derlemi olan M_0 kümesi *kesin belli bir kavram değildir* ve bizi çelişkiye götürmektedir.

9. Yalancı Açmazları: Önce işe bazı tanımlarla başlayalım. *Yalancılar* her söylediği yanlış olan kimseler olsunlar. Bu tanımla *yalancı olmayan* bir kişi en az bir kez doğru söyleyen birisidir, her söylediğinin doğru olması gerekmez ve arada yalan söyleyebilir. Bir önermenin doğruluğu bizi bir çelişkiye götürdüğü gibi, yanlışlığı da bir çelişkiye götürüyorsa önümüzde bir *tam açmaz* var diyelim. Bu iki durumdan sadece birinde bir çelişkiye ulaşıyorsak bir *yarı açmaz* söz konusudur diyelim. Bu tanımlar ışığında, tam açmaz olarak bilinen bazı yalancı açmazlarının gerçekte bir yarı açmaz olduğunu göreceğiz.

a) Giritli bir filozof olan Epimenides bir gün “*Bütün Giritliler yalancıdır*” der. Bu önermeye p diyelim. Eğer Girit’te bir tek Epimenides yaşıyor olsaydı söylediği söz “*Ben yalancıyım*” söylemine dönüşürdü ki bunu b) şıkında tartışacağız. Girit’te birden fazla insan yaşadığını varsayalım. p doğru olsun. O zaman bütün Girit’liler yalancıdır ve Epimenides de bir Girit’li olduğundan, o da bir yalancıdır. Dolayısıyla söylediği yanlıştır. Öyleyse $\neg p$ doğrudur ve bir çelişkiye ulaştık. Şimdi p yanlış, dd. $\neg p$ doğru olsun. O zaman tüm Giritliler yalancı değildir. Örneğin Epimenides yalancı olmayabilir, ancak “*Bütün Giritliler yalancıdır*” derken yalan söylüyor olabilir. Veya yalancı olmayan bir Giritli vardır, ancak Epimenides yalancıdır ve yalan söylüyordur. Bu durumda bir çelişki yoktur. Bir yarı açmazla karşı karşıyayız.

b) Şimdi p önermesi “*Ben yalancıyım*” olsun. p doğru olsun. O zaman ben bir yalancıyım ve her söylediğim yanlıştır. Bu söylediğim de yanlıştır ve ben bir yalancı değilim, dd. $\neg p$. Bir çelişkiye ulaştık. Şimdi p yanlış olsun. O zaman ben bir yalancı değilim, ancak “*Ben bir yalancıyım*” derken yalan söylüyor olabilirim. Bir çelişki yok ve bir yarı açmaz var.

c) p önermesi “*Şu an yalan söylüyorum*” olsun. p doğru ise şu an yalan söylüyorum ve söylediğim doğru değildir, yani şu an yalan söylemiyorum. p doğru ise $\neg p$ doğrudur ve bu bir çelişkidir. Şimdi p yanlış, dd. $\neg p$ doğru olsun. O zaman şu an söylediğim, ki bu p dir, doğrudur. Yine çelişki! Tam bir açmazımız var.

10) Mantık Açmazları:

a) p önermesi “ p yanlıştır” olsun. Bu durumda p önermesi doğruysa yanlış, yanlışsa doğrudur. Bir tam çelişkimiz var.

b) p_1 önermesi “ p_2 yanlıştır”, p_2 önermesi ise “ p_1 doğrudur” olsun. Yine kolayca $p_1 \iff \neg p_1$ ve $p_2 \iff \neg p_2$ olduğu görülür ve tam bir açmazla karşı karşıyayız. Bu açmazı sevimli biçimlere dönüştürebilirsiniz. Örneğin elinize bir kağıt tutuşturuluyor. Kağıdın bir yüzünde: “Arka tarafta yazılan yanlıştır” yazılıdır. Kağıdı çevirdiğinizde şu tümceyle karşılaşıyorsunuz: “Arka tarafta yazılan doğrudur”. Bu durumda herhangi bir taraftaki yazılanın doğru olduğundan yola çıkarsanız yanlış olduğunu, yanlış olduğundan yola çıkarsanız doğru olduğunu çıkarırsınız. Veya gündelik yaşamda karşılaşılabilecek bir duruma dönüştürelim. Ali ve Veli davalı olsunlar. Ali hakime “Veli doğru söylemiyor”, Veli ise hakime “Ali doğru söylüyor” dediğinde hakim hiçbirinin ne doğru söylediğine ne de yanlış söylediğine karar veremez!

11) Yapay Açmazlar :

a) **Eşkenar Dik Üçgen:** Bir dik açılı üçgene kenarları birbirine eşitse eşkenar dik üçgen diyelim. Bize dik kenarları a, b ve hipotenüsü h olan bir Δ eşkenar dik üçgeni verilsin. Pisagor Teoremi’nden dolayı $h > a$, Δ eşkenar dik üçgen olduğundan ise $h = a$ olur ve bir çelişkiyle karşı karşıyayız.

b) **Berber Açmazı:** Bir adada bir berber bu adada kendi kendini tıraş etmeyenleri tıraş ediyor. Bu berberi kim tıraş eder? Bu berber kendi kendini tıraş ediyorsa kendini tıraş etmemesi gerek; kendi kendini tıraş etmiyorsa, kendini tıraş etmesi gerek ve bir açmaz var!

c) **Finsler Açmazı [22]:** Bir sınıfta tahtada 0,1,2,3 sayıları yazılı olsun. Öğretmen öğrencilerine “Tahtada yazılı olmayan doğal sayıların en küçüğü”nün kaç olduğunu sorsun. Yanıt net olarak 4 olacaktır. Şimdi tahtada 0,1,2,3 rakamları ile “Tahtada yazılı olmayan doğal sayıların en küçüğü” yazılı olsun. Tahtaya bu verilerle bir takım belirlenmiş doğal sayıların yazıldığını varsayacağız. Soru şimdi kısaca şudur: 4 tahtaya yazılmış mıdır? 4 tahtaya yazılmışsa ancak bu tümceyle yazılmıştır. Bu tümce ise tahtaya yazılı olmayanların en küçüğünü belirliyor, öyleyse 4 tahtada yazılı olamaz! Şimdi 4 tahtaya yazılı olmasın. Bu durumda tahtaya yazılı olmayan doğal sayıların en küçüğü 4 ’tür. Diğer yandan tahtaya yazılı bu tümce tahtaya

yazılı bir sayı belirler ve açıkça belirttiği gibi bu sayı 4 olmalıdır. Burada bir çelişki var mıdır?

1.5 AÇMAZLARIN TARTIŞMASI

Bir tek çelişkinin bile kuramı tümüyle çökerttiğini, artık o kuramın bütün formüllerinin bir teorem olduğunun kolayca kanıtlanacağını biliyoruz. Öyleyse çelişkilerden kurtulmalıyız.

Tüm bu açmazlara karşın kümeler kuramının işlerimizi kolaylaştırdığını ve büyük bir kısmının doğru olduğunu biliyoruz. Diğer yandan açmazlar var ve bu geçiştirilemez. Bu gibi durumlarda kuramı tümüyle çöpe atabilir veya çelişkilerden arınmak için gerekli ayarlamaları yapabiliriz. Genelde ikinci yol izlenir.

Kesin olan bir şey varsa kullandığımız mantık veya kuramımızın aksiyomları değiştirilmeden çelişkilerden kurtulamayacağımızdır. Mantıkta veya aksiyomlarda veya her ikisinde de değişiklikler yapmak zorunda kalabiliriz. Bir grup araştırmacı, örneğin Russell, König, Brouwer, Poincaré ve Weyl mantıksal temel yapıyı yeniden eleştirel bir biçimde ele alıp tüm kesin bilimleri yeniden sağlam bir temele oturtmayı amaç edindiler. Bu arada matematikte kendi payına düşeni alacak ve bilinen çelişkilerinden kurtulacaktı. Aralarında Zermelo, Fraenkel, Schönfiels, Neumann ve Gödel'in bulunduğu bir diğer grup mantığa dokunmayıp küme kavramını ve özellikle Cantor'un derleme aksiyomunu mercek altına aldılar. Her iki grup da, her şeyden önce derleme aksiyomunda kullanılacak $\varphi(x)$ önermelerinin veya özelliklerinin neler olacağı ve nasıl tanımlanacağını açıklığa kavuşturmak zorunda kaldılar. Her ne kadar doğrudan kümeler kuramının çelişkileriyle uğraşmasa da matematiğin mantıksal temelleri ve yeniden yapılandırılması üzerindeki önemli çalışmalarından dolayı Hilbert'i de bu arada anmak zorundayız. Sezgicilere karşı ön safta onu görmekteyiz.

İlk dört açmaz doğrudan küme kuramına ilişkin açmazlardır. Algılayabildiğimiz ve düşünebildiğimiz her şeye nesne deyip bunlardan belli bir özelliğe sahip olanların bütününe birlikte bir bütün olarak düşündük ve bu bütüne küme dedik. Sonra bunlarla belli işlemler yayıp yeni kümeler oluşturacağımızı varsaydık. Bunlar bizi açmazlara götürdü!. Öyleyse bir şeylerden vazgeçmek gerekecektir: Ya herhangi bir özelliğin bir küme tanımladığı varsayımından, ya da küme işlemlerini kısıtlamasız kullanmaktan vazgeçeceğiz veya her ikisine de bazı kısıtlamalar getireceğiz. İlk dört açmazda bir ortak yan $\bar{U}$, Srs , $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{T}$ 'nin *bağımsız tanımlarla* tanımlanmış olmalarıdır. Bu sınıfların tanımında şema hep " $\varphi(x)$ özelliğine sahip tüm x nesnelerinin kümesi" biçimindedir. Burada x öğeleri önceden varlığı garanti edilmiş ve başımıza dert açmayan bir kümeden seçilmiyorlar, böyle bir kümenin varlığından *bağımsız* olarak tanımlanıyorlar. Aslında $\varphi(x)$ özelli-

ğine sahip x öğelerini derleyerek bir S_φ derlemi oluşturmanın mantıksız bir yanı yoktur. Ancak bazı φ özellikleri için S_φ derlemlerini bir küme olarak düşünmenin bizi açmazlara götürdüğünü gördük. Bu açmazlar bize bağımsız tanımlarda daha dikkatli olmamız ve derlenen çokluğun bir küme oluşturup oluşturmadığını kanıtlamamız gerektiğini öğretirler, ancak onları *yok sayma* hakkını bize vermezler! $\tilde{\mathbb{U}}, Srs, \mathcal{R}$ ve $\mathcal{T}$ derlemleri *vardır*, açmazlarımızda vardır. İzlenecek iki yol var: ya kuramın aksiyomlarını açmazları ortadan kaldıracak biçimde değiştirirsiniz, ya da bu derlemleri *küme olmayan* başka tür nesneler olarak kurama eklersiniz. İkinci durumda bu nesnelerin kümelere ilişkin tüm özelliklere sahip olması beklenemez. Bu açmazların bir başka ortak özelliği ise aşağıda açıklayacağımız döngülü tanımlardan sonra daha iyi anlaşılacaktır.

Tanımlarımızın genel şeması

tanımlanan := *tanımlayan*, veya *tanımlanan* : $\Longleftrightarrow$ *tanımlayan*

biçimindedir. Burada dikkat edilecek şey *tanımlananın tanımlayanda olmamasıdır*. Tanımlanan her nesne veya bağıntı elenebilir, dd. kendisini tanımlayanla değiştirildiğinde ortadan kaldırılabilir olmalıdır.

Her şeyden önce tanımlarda uymamız gereken şeyler var. Örneğin a ve b gibi iki nesne veya iki kavram tanımlamak istiyor ve a 'nın tanımında b 'yi ve b 'nin tanımında a 'yı kullanıyorsak bir **döngülü tanımla** karşı karşıyayız demektir ve bu bizi açmazlara götürebilir. Özel olarak $a = b$ ise **öz döngülü** veya **öz atıflı** diyeceğimiz bir tanım karşımıza çıkar. $\mathcal{R}, \mathbb{U}, Srs$ ve $\mathcal{T}$ derlemlerinin çok büyük olmaları dışında bir ortak özellikleri daha vardır. $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ varsaydığımız an $\mathcal{R}$ nin tanımı öz döngülü olur. $\tilde{\mathbb{U}} \in \tilde{\mathbb{U}}, Srs \in Srs$ ve $\mathcal{T} \in \mathcal{T}$ varsaydığımızda benzer biçimde $\tilde{\mathbb{U}}, Srs$ ve $\mathcal{T}$ 'nin tanımları da öz döngülü olur.

Diğer açmazlara değişik açıdan yaklaşılmıştır. Bu yaklaşımlar şu başlıklar altında toplanabilirler: İyi tanımlı olma, anlam belirli kaplam belirsizlik, döngülü tanım, yüklemsel tanım, oluşum halinde küme ve nesnedili - söze-dendil ayrımı. Şimdi üst oyun açmazına bu pencerelerden bakalım.

Üçüncünün olmazlığı ilkesi altında h oyunun S 'de olup olmadığına karar veremediğimize göre S çokluğu iyi tanımlı değildir: Dolayısıyla Cantor'a göre onun kuramında S bir küme değildir.

“Sonlu oyun” kavramı anlamsal belirlidir, ancak kaplamsal belli değildir. Siz “İşte tüm sonlu oyunlar bu S kümesinin öğeleridir” dediğiniz an tanımladığımız h üst oyunu *yeni bir sonlu oyun* olmak zorundadır. Gerçekten de birinci oyuncu ilk hamlesinde S kümesinden bir sonlu g oyunu seçer ve ikinci oyuncu bu sonlu g oyunun başlatır ve bu oyun ise sonlu adımda biter. Öyleyse h bir sonlu oyundur ve $h \in S$ olamaz! Çünkü daha önce tartıştığımız gibi $h \in S$ varsaymak $h \notin S$ çelişkisini verir.

Şimdi sezgicilerin bir yaklaşımını ele alacağız. S kümesi asla tamamlanmış bir küme değildir, oluşum halinde bir kümedir. Daha rahat tartışabilmek için daha önce yaptığımız gibi oyunların birim sayısına bir kısıtlama koymayalım. Şimdi diyelim ki p_1, p_2, p_3, p_4 oyunları sırasıyla pişti, poker, tavla ve satranç oyunları olsunlar. $S_0 := \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ olsun. Şimdi h_1 üst oyunu “Birinci oyuncu S_0 ’dan bir oyun seçer, ikinci oyuncu seçilen oyunu başlatır” olarak tanımlansın. Kuşkusuz $h_1 \notin S_0$ ve h_1 bir sonlu oyundur. $S_1 := S_0 \cup \{h_1\}$ olsun. Şimdi tümevarımla S_n ve h_{n+1} tanımlanacaktır. S_{n-1} ve h_n tanımlanmış olsunlar. $S_n := S_{n-1} \cup \{h_n\}$ olsun ve h_{n+1} ise “Birinci oyuncu S_n ’den bir oyun seçer, ikinci oyuncu seçilen oyunu başlatır” olarak tanımlansın. Kuşkusuz $h_{n+1} \notin S_n$ ve h_{n+1} bir sonlu oyundur. Ayrıca $S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \dots$ kesin artan bir dizidir. Tüm sonlu oyunların kümesi asla tamamlanamaz. Çünkü *tanımlanabilir sonlu oyunlar*, şimdiden tanımlanmış olduğumuz sonlu oyunlarla *değişirler*.

$h \in S$ varsaymak h oyununun tanımını döngülü yapar: Çünkü bu durumda S kümesinin tanımında h oyununu ve h oyununun tanımında ise S kümesini kullanmış oluruz ve bu bir döngülü tanımdır. Açmaz izin verilmeyen bir tanım kullandığımız için oluşmuştur.

Üst oyun açmazında bir noktanın altını çizmekte yarar vardır. Çelişki ancak $h \in S$ varsaydığımızda vardır. $h \in S$ varsaydığımızda S kümesinin h ögesini S kümesinin *tüm* öğelerini kullanarak tanımlamış oluruz. Bu tür tanımlara **yüklemsel değildir** denir. Tanımların yüklemsel olmasını istersek üst oyun açmazından kurtuluruz.

Açmazı nesnedili ve sözedendil bağlamında tartışmak için önce bunların ne olduğuna değineceğiz ve bu açmazı tartışmak yerine olayı daha iyi kavrayacağımız 5^* açmazını tartışacağız. Olayı ve önemini en iyi biçimsel kuramlarda anlarız.

Bir *biçimsel kuram*, hiçbir imine bir anlam yüklenmemiş, belli kurallarla başta verilen ve kuramın *ilksavları* (*aksiyomları*) denen belli oluşumlardan, kuramımızın geçerli önermeleri veya *teoremleri* diyeceğimiz yeni oluşumlar elde ettiğimiz bir oyun olarak düşünülebilir. Sevilen bir benzetme satranç oyunudur. Nesnelerimiz satranç tahtası ve figürlerdir. *Formüllerimiz* figürlerin tamamının veya bir kısmının satranç tahtasına dizilmesi ile elde edilen dizilişlerdir. Bu formüllerden bir kısmı kuramımızın aksiyomları olarak seçilirler. Kuramımızın amacı sonlu sayıda *çıkarım kuralları* yardımıyla aksiyomlardan yola çıkarak ulaşabileceğimiz formülleri bulmaktır: Bu tür formüllere kuramımızın teoremleri veya geçerli önermeleri denir.

Her biçimsel kuramın **nesnedili** denen bir kendi dili, bir de o kuramdan bahsederken kullandığımız **sözedendili** (veya **metadili**) vardır. Örneğin satranç oyununun dili satranç tahtası ve figürlerden oluşur. Yine her ku-

ramın kendi dilinde ifade edilen kendi öz teoremleri bir de o kuramın teoremi olmayıp, ondan bahseden **sözedenteoremler** (veya **metateoremler**) vardır. Bunları birbirinden ayırmak çok önemlidir. Satranç oyunun bir tek aksiyomu vardır, o da figürlerin başlangıç dizilişidir. Çıkarım kurallarımız figürlerin oynama kurallarıdır. Geçerli önermelerimiz kurallara uygun olarak oynanan oyunlarda karşılaştığımız dizilişlerdir. Ama satranç oyununa ilişkin, bu oyunun formülleri olmayan önermeler de vardır. Örneğin “Hiç bir zaman satranç tahtasında 10 tane beyaz kraliçe olmaz”, bu oyun hakkında bir önermedir, doğrudur. Bu önerme satranç oyunu kuramının dilinde ifade edilmemiştir ve satranç oyunun bir teoremi değildir ve kanıtı bu oyunda verilemez. Bu bir sözedenteoremdir. Bunun gibi satranç bilmeyen bir kimseye satranç öğretirken kullandığım dil ise bir sözedendildir.

Şimdi 5* açmazını nesnedili - sözedendil bağlamında tartışalım. n_0 sayısının tanımını açmazı ortadan kaldıracak biçimde değiştirip olayı yeniden inceleyelim. “ n_0 , Almancada onsekizden az sözcükle tanımlanamayan doğal sayıların en küçüğü olsun”. Şimdi *nesnedilimiz* Almanca ve *sözedendilimiz* Türkçe’dir. Almancada, yani nesnedilimizde, doğal sayıları tanımlar ve tanımlarında en az 18 sözcük kullanmak zorunda olduğumuz m doğal sayılarının M kümesini oluşturabiliriz. Boş olmayan bu kümenin gerçekten de bir n_0 en küçük ögesi vardır. Buraya kadar bir sorun yoktur. Diğer yandan “ n_0 , Almancada onsekizden az sözcükle tanımlanamayan doğal sayıların en küçüğü olsun” dersek de bir sorun yoktur, çünkü bu tanım nesnedilimize değil sözedendilimize aittir. Gerçekten de n_0 sayısının nesnedilimiz olan Almancada onsekizden az sözcükle bir tanımı yoktur ama sözedendilimizde böyle bir tanımı vardır. Ortada hiçbir açmaz yoktur!

Şimdi 5* açmazının ilk şekline dönelim. “ n_0 , Türkçede onsekizden az sözcükle tanımlanamayan doğal sayıların en küçüğü olsun.” Burada nesnedilimiz Türkçe, ancak sözedendilimiz de Türkçedir! Kargaşa burada başlar ve açmaz bu dilleri ayırmadığımızda karşımıza çıkar. Türkçe nesnedili olarak kullanılarak az önce olduğu gibi doğal sayıların onsekizden az sözcükle tanımlanamayanlarının M kümesini oluşturabiliriz ve bunun bir n_0 en küçük ögesi vardır. Ancak bu tanımlar arasında “ n_0 , Türkçede onsekizden az sözcükle tanımlanamayan doğal sayıların en küçüğü olsun” yer alamaz çünkü bu sözedendilimizde bir tanımdır! Aslında yine bir açmaz yoktur, açmaz görüntüsü vardır. Sözedendili nesnedili olarak algılasak açmazla karşılaşırız. Richard ve üst oyun açmazlarını aynı biçimde iki aşamalı olarak tartışmanızı öneririz. Örneğin önce her iki tanımda da nesnedili olarak İngilizce, sözedendil olarak yine Türkçe seçiniz. Böylece S ve M kümelerinin tanımında İngilizce dili h üst oyunun ve p sayısının tanımında ise Türkçe kullanılmış olur.

Bir an için nesnedili ve sözedendil kavramlarından habersiz olduğumuzu varsayıp Richard ve üst oyun açmazlarına dönelim ve başımızı ağrıtan h ve p öğelerine yakından bakalım. Her ikisinde de ortak olan bir şey dikkatimizi çeker: h öğesi S kümesi, p öğesi ise M kümesi kullanılmadan tanımlanamaz. Çelişki ise $h \in S$ ve $p \in M$ varsaydığımızda, dd. yüklemsel olmayan tanımlar kullandığımızda vardır. Bu gözlem Russell'ı şu meşhur yasaklamaya götürmüştür: *Hiçbir çokluk, salt kendi üzerinden tanımlanan bir öğe içeremez!* Ancak yasaklamak çözmek değildir. Hadi Russell'a uyararak $h \in S$ ve $p \in M$ olmasını yasaklayalım. İyi de bu öğelerin tanımına bir diyeceğimiz olamaz. Peki o zaman bu öğelerin özellikleri nelerdir ve hangi kümenin öğeleridirler? Bu örneklerde yüklemsel olmayan bu tanımların söz konusu kümede olmayan öğeler tanımladığını gördük. Ancak $A \subseteq \mathbb{R}$ altkümесinin maksimumu bulunsun. Bu maksimumun tanımı da yüklemsel değildir, ancak bir $a \in A$ öğesini tanımlar ve hiçbir çelişki oluşturmaz!⁸

S (veya M) kümesinin tanımında kullandığımız nesnediline D ve h (veya p) öğesinin tanımında kullandığımız sözedendile D^* diyelim. Richard açmazına Richard'ın ve Poincaré'nin getirdikleri çözümün temel fikri şudur: M kümesi, D dilinde tüm söz konusu m sayıları *tanımlandıktan sonra* oluşturulur. Bu m sayılarının hiçbirinin tanımı M kümesini *kullanamaz*. Buna karşın p öğesinin tanımı M kümesini kullanır, dd. p öğesi *farklı bir dil* kullanılarak tanımlanmıştır ve bir açmaz yoktur. h (veya p) öğesi D^* dilinde tanımlanmış bir sonlu oyundur (veya sonlu sözcükle tanımlanmış bir ondalık sayıdır). Açmaz söz konusu olmadığı gibi h ve p öğelerinin tanımları da kusurlu değildirler. Dil ayrımı yapmaz, Russell yasağına da uymaz ve $p \in M$ olmasına izin verirse M kümesinin tanımında p sayısını ve p sayısının tanımında ise M kümesini kullanmış oluruz. Bu durumda bir döngü ile karşı karşıya kalırız.

Weyl'in kısır döngüsünü inceleyelim. Elimizde O_1, O_2 ve R işlemleri var. Bu işlemleri herhangi bir sırada en fazla 4 kez art arda uygularsak toplam en fazla $3^0 + 3^1 + \dots + 3^4 = 121$ doğal sayı elde ederiz. Bizden istenen bu şekilde elde edilemeyen doğal sayıların en küçüğü olarak tanımlanmış olan $R(4)$ sayısını bulmaktır. Bu 121 sayı arasında örneğin $R(O_2^3(1)) = R(O_2(O_2(O_2(1)))) = R(8)$ vardır. $R(4)$ sayısını bulabilmek için $R(8)$ sayısını

⁸Bu noktada meslektaşım ve oğlum Ilgar bu maksimumla diğer h ve p öğelerinin doğalarındaki bir ayrıma dikkatimi çekti. M ve S kümeleri tanımlamaya, oluşturmaya çalıştığımız kümeler ve problem karşımıza bazı tanımlarla verilmiş bir takım öğelerin, eğer iyi tanımlıysa bu kümelere ait olup olmadıklarına karar verirken çıkmaktadır. Diğerinde ise *verilmiş* bir A kümesi ve bu kümenin *verilmiş* bir $a \in A$ öğesi vardır. Bizden istenen ise $\varphi(y)$ önermesi $\forall x \in A (x \leq y)$ olmak üzere $\varphi(a)$ olup olmadığıdır. Böyle bir durumda bir çelişki söz konusu olamaz! Ayrıca $\max A = a : \iff a \in A \wedge \forall x \in A (x \leq a)$ tanımından da görüldüğü gibi burada elenebilir bir tanım söz konusudur; tanımlanan $\max A$ yalnızca sol tarafta yer alır.

hesaplamak zorunda kaldık. $R(8)$ sayısını bulmak için, tanım gereği $R(4)$ önceden bilinmelidir. Daha şimdiden bu işin içinden çıkamayacağımız kesin bellidir. $R(8)$ sayısını bulmak için hesaplamam gereken sayılar arasında $R(O_2^7(1)) = R(2^7) = R(128)$ sayısı vardır. $R(128)$ sayısını bulabilmek için hesaplamam gereken sayılar arasında ise $R(4)$, $R(8)$ sayıları da bulunduğu gibi $R(O_2^{127}(1)) = R(2^{127})$ sayısı vardır ve bu böyle sürüp gider. Son derece net ve kusursuz betimlenmiş $R(4)$ sayısını belirleyemem! Yine gittikçe çetrefilleşen döngüler içeren bir öz atıflı tanımla karşı karşıyayız.

10.a) “Şu an yalan söylüyorum” açmazının mantık açmazına dönüştürülmüş şeklidir. 10.b)’de ise birbirinin doğruluğu üzerinde uyumsuz söylemlerde bulunan iki önerme söz konusudur. Kuşkusuz bu mantık açmazları bize döngülü tanımları anımsatmaktadırlar.

Hatanın en kolay görüldüğü kuşkusuz eşkenar dik üçgen açmazıdır. Böyle bir üçgenin olmadığını, bu kavramın çelişkili olduğunu, dolayısıyla çelişkili bir kavramdan yola çıkınca her şeyin çıkarılabileceğini her okuyucu anında görmüştür. Her ne kadar berber açmazı ilk bakışta bu açmazla bir benzerlik göstermese de aynı karakterdedir. Önce normal olarak bir adada herkesin tıraş olması gerekmediğini varsayarsak, örneğin söz konusu berber asla tıraş olmayan biriyse hiçbir açmaz kalmaz. Bir açmaz oluşabilmesi için son derece yapay kısıtlamar gerekmektedir. Varsayalım ki bu adadaki herkes tıraş olur ve herhangi bir kimse ya sürekli kendi kendini tıraş eder, ya da sürekli berbere tıraş olur. Bu durumda bir açmaz var gibi görünür. Yine de bir açmaz yoktur! Az yukarıdaki yapay varsayımlar altında bu adada “kendi kendini tıraş etmeyenleri tıraş edenlere *berber* denir” tanımını yapalım ve şu soruya yanıt arayalım: Bu adada en fazla kaç berber olabilir? Bu soruya bir yanıt aradığımızda bu adada bu tanıma uyan bir berber olamayacağını görürüz. Berber yoksa elbette açmaz da yoktur. Berber açmazının ve eşkenar dik üçgen açmazının ortak yanları *çelişik tanımlara* dayanmalarıdır. Bu tanımlara uyan nesneler yoktur! Bu nedenle bir takım özelliklere sahip nesneler tanımladığımızda bu tanımın çelişkisiz olduğunu göstermek, bunun içinse bu özelliklere sahip en az bir nesnenin *var* olduğunu kanıtlamak zorundayız.

Finsler açmazında bir çelişki var mıdır? Hayır! Bu tümce “açık” olarak tahtaya yazılı olmayan bir doğal sayı tanımlar, diğer yandan “kapalı(örtülü)” olarak, kendisi tahtaya yazılı olduğu için, bu sayının tahtaya yazılı olmasını ister. *Hiçbir sayı*, elbette 4 sayısı da, *birbiriyle çelişen bu iki koşulu sağlayamaz* ve bu bir çelişki değildir. Bu açmazın tartışmalarındaki “yanlış çıkarım” işte bu kapalı savı baştan işin içine katmayıp sonradan katmaktan kaynaklanır. Bu tümceyle 4 kastedilmemişse 4 kastedilmiştir, 4 kastedilmişse 5 kastedilmiştir. Bu şekilde bu tümceyle ne 4 ne de bir başka sayının

tanımlanmadığı apaçıktır⁹. Elbette M tahtada yazılı doğal sayıların kümesi olsun dediğimizde Cantor için M iyi tanımlı değildir, dolayısıyla bir küme değildir. Burada son bir kez vurgulamak istediğimiz şey sorunların mutlaka çok büyük çokluklarda karşımıza çıkmadığıdır. Gerçekten de M iyi tanımlı olsaydı en fazla beş ögeli olurdu!

Açmazların tartışması bize şunları öğretmiştir:

- *Her özellik, sonlu çokluklar da bile derlenemez.*
- *Derlenebilen her özellik bir küme tanımlamaz.*
- *Sözeden ve nesne dillerini birbirinden ayırmaya özen göstermeliyiz. Bunları karıştırmak bizi yapay açmazlarla karşı karşıya getirebilir.*
- *Döngülü ve yüklemsel olmayan tanımlarda özenli davranmalı ve çelişkili tanımlardan sakınmalıyız. Bağımsız tanımlarda ise özenli olmalıyız.*

Derlenebilir özellikler, kümeler kuramının dilinde oluşturulan formüller olarak tanımlanacaktır. Böylece her şeyden önce öz atıflı tanımları da elimine edeceğiz. Yine de bir çelişkiyle karşı karşıya bulunuyorsak, bu çelişki bize derlenen nesnemizin bir küme olmayıp bir sınıf olduğunu anımsatmalıdır.

1.6 RUSSELL'IN TIPLER KURAMI

Russell ve Withehead'e göre *matematik mantığın bir kısmıdır*. Bu nedenle Russell elinden geldiğince mantıksal çelişkiler oluşturdu ve onların mantıksal yapısına odaklandı. Bu uğraşlarının sonunda çelişkilerden arınmak için uymamız gereken

Bir önerme fonksiyonu kendisini argüman olarak içeremez!

kuralına ulaştı. Bu mantıksal açmazları önlemek için yeterlidir. Matematiksel Mantıkta ne olduğunu öğreneceğimiz *önerme fonksiyonu* kavramını burada tam olarak bilmemize gerek yoktur. Şimdilik sonlu sayıda değişkenler içeren $\varphi, \psi, \phi, \dots$ gibi bir takım ifadeler olduğunu ve kümeler kuramı söz konusu olduğunda bunları doğru kılan nesnelerin evrenimizde kümeler tanımladığını bilmemiz yeterlidir. Farklı önerme fonksiyonları aynı kümeyi tanımlayabilirler.

⁹Aslında Finsler “Şu an yalan söylüyorum” açmazını da aynı kategoriye alır. Ona göre - bu önermeye q diyelim - q önermesi biçimselleştirilemeyen bir önermedir. Her önerme gibi q önermesi de kendi doğruluğunu öne sürer. Diğer yandan q açıkça kendi yanlışlığını savunur. Ortada bir açmaz yok yanlış bir önerme vardır.

Önerme fonksiyonlarından tanımladıkları kümelerle geçilirse, bu kural kümelerin *kendilerini öge olarak içermelerini* ve *döngülü tanımları* yasaklar.

Russell matematikçilere şu kurala mutlaka uymalarını öğütlemiştir: *Hiçbir çokluk, salt kendi üzerinden tanımlanan bir öge içeremez!*

Bu önlemle elbette çelişkiler, bilinen çelişkiler önlendi. Ancak bu gömlek matematikçilere dar geldi! Örneğin bu kurala tam olarak uyulmak istenirse, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon olmak üzere “ m sayısı $\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$ kümesinin minimumu olsun” diyemeyeceksiniz. Hiçbir matematikçi kendisini bir çelişkiye götürmeyen bu tür bir tanımdan vazgeçmez.

Russell’a göre bir takım öğeleri derleyerek bir M kümesi oluşturmak istediğimizde, M ’den bağımsız olarak daha önce tanımlanmış öğeleri, bunları M ile ilişkilendiren ek koşullar eklemekten derlemeliyiz. Bu irdelemeler Russell’ı tipler kuramına götürmüştür.

Basitleştirerek Russell’ın tipler kuramı şöyle özetlenebilir. Biz nesnelerimizi basamaklandıracağız. **Sıfırıncı basamaktan** diyeceğimiz bir takım nesnelerle işe başlayacağız. Bunlara **temel öğeler** veya temel nesneler de diyebiliriz. Cantor’un derleme aksiyomunda olduğu gibi bu temel öğelerden kümeler oluşturacağız. Bunlar bizim **birinci basamaktan nesnelerimizi** oluşturacaklar ve *birinci basamaktan hiçbir nesne aynı zamanda sıfırıncı basamaktan bir nesne olmayacaktır*. Birinci basamaktan nesnelerden benzer biçimde **ikinci basamaktan** nesneler oluşturulacaktır. Bu işlem sürekli yinelenerek her n doğal sayısına karşılık n . *basamaktan nesneler* oluşturulur. $x \in y$ ancak ve ancak y nin basamak sayısı x nesnesinin basamak sayısından bir fazla ise anlamlıdır. n .basamaktan herhangi bir nesneyi x^n ile gösterelim; n ’ye x ’in **tipi** denir. Russell derleme aksiyomunu aşağıdaki gibi kısıtlamıştır:

Russell Derleme Aksiyomu : φ, n . *tipten öğelere ilişkin bir önerme veya özellik ise bunu doğru kılan öğeler $(n+1)$.tipten bir küme oluştururlar, d.d*

$$\exists y^{n+1} \forall x^n (x^n \in y^{n+1} \iff \varphi(x^n)) \quad (1.6)$$

Bu derleme aksiyomu[36]’daki *mimar yaklaşımı* olarak adlandırılan yaklaşıma benzer. Matematik evrenimizde tüm nesnelerimiz kümeler olacaktır. Mimar yeni bir yapı (küme) oluştururken ancak *daha önce oluşturulmuş* yapı araçları (kümeleri) kullanabilir. Özellikle, oluşturulacak yapı *kendisinin* yapımında kullanılamaz.

Farklı tipten öge kavramına Russell’dan önce Cantor’da rastlamaktayız. Cantor gerçek sayıların altkümelerine ilişkin problemlerle karşılaştığında ilk iş olarak aslında gerçek sayıları titizlikle incelemesi gerektiğini fark etmiştir. İzlediği yol aynen şu olmuştur. Rasyonel sayılardan yola çıkmıştır.

Bunlara A **türünden gerçek sayılar** demiştir. Sonra rasyonel sayılarda, günümüzde Cauchy dizileri olarak bilinen temel diziler tanımını vermiş ve her temel diziye bir limit değeri karşılık getirmiştir. Bunlara B **türünden gerçek sayılar** demiştir. Sonra bunlar arasında eşitlik, büyükküçük, toplama, çarpma açıklamıştır. Aynı yöntemle $C, D, E, F, \dots$ türünden gerçek sayılar tanımlamıştır. Örneğin B 'nin A 'dan daha güçlü olduğunu, oysa B ile C 'nin eş güçlü olduğunu kanıtlamış ama yinede farklı türden gerçek sayıları birbirinden özenle ayırmıştır.

$n = 0, 1, 2, \dots$ için $\tilde{U}^n := \{x^n \mid x^n = x^n\}$ evrenini tanımlayalım, dd. bu n .tipten tüm nesnelerin evrenidir. Artık doğrudan kümeler kuramına ilişkin açmazlarımıza yer yoktur. Bu yeni aksiyomla Russell kümesi zaten anlamlı değildir. Tüm $\tilde{U}^n$ evrenlerinin birleşimi anlamına gelecek olan her tipten tüm nesnelerin kümesi de anlamlı değildir. Aynı şekilde Burali-Forti açmazına da yer yoktur.

Ancak Russell'ı izlersek bizi bazı önemli sorunlar beklemektedir. İlk zorluk basamaklamanın beraberinde getirdiği karmaşa ve çok çabuk ipin ucunun kaçmasıdır. Analiz için ne anlama geldiğine az önce değindik. Doğal sayılardan gerçek sayılara geçişte bu yol tıkanmıştır. Çıkış noktası sezgicilerinkinden tümüyle farklı olmasına karşın sonuçları açısından matematiği en az sezgicilerin ki kadar kısıtlamıştır. Fazla ayrıntıya girmeden buna değinelim.

Aslında Russell nesnelerle çalışmak yerine mantıkçı yaklaşımıyla önerme fonksiyonları ile çalışmıştır. Nesneler gibi önermeleri de tiplenmiştir. Kümeler kuramından bir örnekle başlayalım. Bir kümeye ilişkin özelliklerle onların öğelerine ilişkin özellikler Russell için farklı tipten özelliklerdir. Bir bütünle parçası arasındaki ilişki bir kümeyle öğeleri arasındaki ilişkiden tümüyle farklıdır. Bir kalıp peynirden koparılan bir parça aynı kimyasal yapıya sahip bir peynirken, bir takım peynir kalıplarının kümesinin bir peynirle uzaktan yakından bir ilişkisi yoktur! O yeni ve başka bir şeydir. Bir kümenin kendisini bir öğe olarak içermesi yanlış olmanın ötesinde eşkenar dik üçgen kavramında olduğu gibi *anlamsızdır!*

$\varphi^n(x)$ önerme fonksiyonları veya kısaca özellikleri şöyle tanımlanmıştır. $\varphi(x)$ özelliklerinin değişkenlerinin evreni bir takım bireylerdir. Serbest değişkenler yerine değerler konduğunda elde edilen ifade “Her...” ve “En az bir...” gibi niceleyicileri içermiyorsa 0.tipten veya temel özellik, içeriyorsa birinci tipten bir özelliğimiz vardır. φ^{n+1} özelliğinde x değişkeninin alabileceği değerler $\varphi^n(x)$ özellikleridir. Yukarıda belirttiğimiz zorluğun üstesinden gelmek için Russell kuşku ile karşılanan bir aksiyom, **indirgenibilirlik aksiyomunu** öne sürdü. Bu aksiyom herhangi tipten bir $\varphi^n(x)$ önermesinin kapsamsal olarak 0. tipten bir önermeye denk olduğunu söyler.

Bu aksiyom aralarında Neumann, Gödel, Weyl olmak üzere çoğu matematikçi tarafından kuşku ile karşılandı. Weyl, bir kez n . tipten önermeler tanımlandıktan sonra indirgenebilirlik aksiyomu gibi bir aksiyoma artık yer olmadığını, burada tanımların ışığında yanıtlanması gereken bir soru bulunduğunu belirtir [62].

Russell tipler kuramına, Öklid'in geometrisine yaklaştığı gibi içeriksel olarak yaklaşmıştır. Bu yaklaşımda aksiyomlar daha önce bir biçimde doğruluğu kanıtlanmış veya doğruluğuna kuşku duyulmayan bazı gerçekleri dile getirirler. Weyl ise verilen tanımlar ışığında Russell'ın indirgenebilirlik aksiyomunun aslında kanıtlanması gereken bir önerme olduğunu dile getirir.

Russell'ın tipler kuramı krize getirilmiş aşırı radikal bir çözüm gibi görünmektedir. Nitekim değişik tipten öğelerin bir küme oluşturmasını yasaklamanın matematik açıdan hiçbir mantığı yoktur! Matematikte farklı tipten öğelerden adım başı kümeler oluşturulur ve matematikçiler bundan vazgeçmek istemezler. Nitekim başka çözüm yolları aranmıştır ve bir sonraki bölümde bu yollardan birini, Zermelo yaklaşımını öğreneceğiz.

1.7 ZERMELO'NUN AKSİYOMLARI

İlk dört açmazımıza baktığımızda bir şey dikkati çekiyor: $\tilde{U}$, Srs , $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{R}$ büyük, aşırı büyüktürler. Biz ise analizde bile gerçek sayılara kattığımız $\pm\infty$ ile bazı garabetlere katlanmak zorunda kalıyoruz. Örneğin tüm işlemler açıklanmasa da açıklanmış aşağıdaki işlemlerle her a, b gerçek sayısı ve her p pozitif gerçek sayısı için örneğin

$$a + (+\infty) = b + (+\infty) = p \cdot (+\infty) = +\infty$$

olduğunu biliyoruz. Çok büyük sonsuzluklar olan $\tilde{U}$, Srs , $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{T}$ 'nin başımıza dert açmasını bekleyebiliriz. Nasıl $\pm\infty$ gerçek sayılar değilseler $\tilde{U}$, Srs , $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{T}$ bizim için artık *küme olmayacaklar*; hadi onlara bir ad takalım ve onlara **dev kümeler** (veya **küme dışı nesneler** (Unmengen)) diyelim. Zermelo'nun düşüncesi son derece basitti: Mantığa dokunmayalım ama derleme işlerinde başımızı alıp gitmeyelim. Dev kümelerin oluşmasını önleyecek önlem veya önlemleri alalım. Bunun da en kestirme yolunun *derleme işlerini kümelere kısıtlamak ve bağımsız tanımlardan sakınmak* olduğunu düşünmüştür.

İlk önce Zermelo'nun aksiyomlarını verdiği “*Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I* [64]” isimli çalışmasının önemli kısımlarının kısa özetini verelim. Bu çalışmada *biçimsel* olan “ögesi olma”dır bu nedenle $a \in b$ yerine $a \epsilon b$ ve $a \notin b$ yerine ise $a \not\epsilon b$ yazacağız. Bu çalışmanın “*Temel Tanımlar ve Aksiyomlar*” başlıklı birinci paragrafı şu sözlerle başlar:

1. Kümeler kuramı aralarında “kümelerin” de bulunduğu basitçe “*nesneler*” diyeceğimiz şeylerin bir $\mathcal{B}$ alanı ile uğraşır. a ve b gibi iki sembol aynı nesneyi gösteriyorlarsa $a = b$, aksi halde $a \neq b$ yazacağız. Bir a nesnesine eğer $\mathcal{B}$ alanına aitse “*vardır*” diyeceğiz; benzer biçimde nesnelerin bir $\mathcal{K}$ sınıfı için, eğer $\mathcal{B}$ alanı bu sınıfın en az bir bireyini içeriyorsa, “ $\mathcal{K}$ sınıfında nesneler vardır” diyeceğiz.

2. $\mathcal{B}$ alanının nesneleri arasında $a \in b$ biçiminde bazı “*temel ilişkiler*” geçerlidir. İki a, b nesnesi arasında $a \in b$ ilişkisi varsa “ a , b kümesinin *ögesi*-*dir*” veya “ b , a ’yı öge olarak içerir” veya “ b , a ögesine sahiptir ” diyeceğiz. Bir b nesnesi bir başka a nesnesini öge olarak içeriyorsa ve ancak bu durumda, bir tek istisna dışında (Aksiom II), bir *küme* olarak isimlendirilir.

3. Altküme ve ayrık küme tanımları bilindiği gibi verilir.

4. Aksiyomlar ve genel geçerli mantık yasaları yardımıyla, geçerlilikleri veya geçersizlikleri hakkında belirsizliğe yer vermeden, alanımızın temel bağıntısının karar verdiği sorulara veya ψ söylemlerine “*tanımlıdır*” denir. Benzer biçimde, x değişkeni bir $\mathcal{K}$ sınıfının tüm bireylerini tararken, $\mathcal{K}$ sınıfının *her bir* bireyi için tanımlı olan $\psi(x)$ sınıf özelliğine “*tanımlıdır*” denir. Böylece $a \in b$, veya $N \subseteq M$ olup olmadığı soruları her zaman tanımlıdır.

$\mathcal{B}$ alanımızın temel bağıntıları hakkında aşağıdaki “*aksiyomlar*” veya “*postülatlar*” geçerlidir.

I Belirlilik Aksiyonu : *Bir M kümesinin her ögesi aynı zamanda N kümesinin de ögesiye ve tersi de doğruysa, yani aynı anda hem $M \subseteq N$ hem de $N \subseteq M$ ise daima $M = N$ dir. Kısaca: Her küme öğeleriyle belirlidir.*

Sadece $a, b, c, \dots r$ öğelerini içeren bir küme kısaca $\{a, b, c, \dots r\}$ ile gösterilir.

II Basit Kümeler Aksiyonu : *Hiçbir öge içermeyen bir (sanal, düzmece) küme, $\emptyset$ “Boş küme”, vardır¹⁰. a alanımızda bir nesneyse, a ’yı ve sadece a ’yı içeren bir $\{a\}$ kümesi vardır. a ve b alanımızdan iki nesneyse bunları ve sadece bunları içeren bir $\{a, b\}$ kümesi vardır.*

5. I’dan dolayı $\{a\}$ ve $\{a, b\}$ kümeleri tek olarak belirlidirler. $a = b$ olup olmadığı, $a \in \{b\}$ ile eş anlamlı olduğu için tanımlıdır(4).

6. $\emptyset$ kümesi her M kümesinin altkümesidir, $\emptyset \subseteq M$.

III Derleme Aksiyonu : *$\psi(x)$ sınıfözellği bir M kümesinin her ögesi için tanımlıysa, M kümesinin $\psi(x)$ özelliğine sahip öğelerini ve yalnızca bunları içeren ve M kümesinin altkümesi olan bir M_ψ kümesi vardır. Bu aksiyomun felsefesi kısaca şudur: derlenmiştir derlenebilir.*

¹⁰Zermelo da Cantor gibi $\emptyset$ yerine 0 yazar ve bu kümeye boş küme yerine “Sıfırkümesi” der.

Bu aksiyomu verdikten sonra Zermelo, bu aksiyomun geniş çapta yeni kümelerin tanımına izin verdiğini ve Cantor'un kısıtlamasız derleme kuralının yerini aldığını belirtir. Bu aksiyomdaki kısıtlama yüzünden kümelerin asla bağımsız tanımlanamayacağını, ancak şimdiden var olan kümelerden altkümelerin derlenebileceğini, bu nedenle "Tüm kümelerin kümesi", veya "Tüm sıra sayılarının kümesi" gibi açmazlara artık yer olmadığını belirtir. Ayrıca derlenecek özellikler, alanın temel bağıntılarına göre tanımlı olmak zorunda olduklarından, "Richard açmazında" olduğu gibi, "sonlu kelimelerle tanımlanabilen" gibi sözel ölçütlere yer yoktur. Bu nedenle **III.** aksiyomu kullanmadan önce söz konusu $\psi(x)$ özelliğinin tanımlı olduğunun mutlaka gösterilmesi gerekir. Aşıkard olduğundan kuşkusuz olduğu her yerde bunu yapacağı sözünü de verir.

7. Tümleyen tanımı verilir.

8. İki kümenin arakesitini tanımlar.

9. T öğeleri de küme olan bir küme olsun. Herhangi bir a için III.aksiyomdan dolayı $T_a := \{N \mid N \in T \text{ ve } a \in N\}$ bir kümedir. Her a nesnesi için $T = T_a$ olup olmadığı tanımlıdır. $T = T_a$ olması tam da a öğesinin T 'deki her N kümesinin bir öğesi olması demektir. $A \in T$ ise $\bigcap T := \{a \mid a \in A \wedge T = T_a\}$, A 'nın bir altkümesidir.

10. Hiçbir kümenin her kümeyi içermeyeceğinin kanıtlar.

Teorem 1.7.1 *Her M kümesine karşılık bir N kümesi $\neg(N \in M)$ olacak biçimde vardır.*

Sonuç: $\mathcal{B}$ bir küme değildir.

Kanıt. M kümesi verilsin. $\varphi(x)$ olarak " $\neg(x \in x)$ " olarak derleme aksiyomu yarımıyla

$$N := \{x \mid (x \in M) \wedge \neg(x \in x)\}$$

kümesini oluşturalım. Her x için

$$x \in N \iff (x \in M) \wedge \neg(x \in x).$$

Buradan $x = N$ için

$$N \in N \iff (N \in M) \wedge \neg(N \in N)$$

Eğer $N \in M$ olsaydı son bağıntı $N \in N \iff \neg(N \in N)$ çelişkisine dönüşürdü. Dolayısıyla $\neg(N \in M)$. Sonuç teoremden doğrudan çıkar; teoremimiz tüm kümeleri içeren bir küme olamayacağını söyler. ■

IV Güç Kümesi Aksiyomu: *Her M kümesine karşılık onun tüm alt-kümelerini ve sadece onları üye kabul eden bir $\mathcal{P}(M)$ kümesi vardır.*

V Birleşim Aksiyomu: *Her T kümesine karşılık T kümesinin öğelerinin öğelerini ve sadece onları içeren bir $\bigcup T$ kümesi vardır. Eğer T kümesinin boştan farklı bir küme olan öğesi yoksa $\bigcup T = \emptyset$!*

VI Seçme Aksiyomu: T öğeleri boştan farklı ve ikişer ikişer ayrık kümeler olan bir küme ise, her $M \in T$ ile tam bir tek ortak öğeye sahip bir $S_1 \subseteq \bigcup T$ altkümesi vardır.

Bu aksiyomu şöyle de dile getirebiliriz: T nin her bir $M, N, R, \dots$ öğesinden bir tek $m, n, r, \dots$ öğelerini seçip bir S_1 kümesi oluşturabiliriz.

VII Sonsuzluk Aksiyomu: Alanımız en az bir Z kümesi içerir öyle ki Z kümesi boş kümeyi içerir ve ayrıca kendisinin her a öğesine karşılık $\{a\}$ 'yi da içerir.

Bu tipten her Z kümesinin altkümesi olup aynı özellikleri taşıyan

$$Z_0 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$$

sayı serisine ulaşır. Sıralı ikili kavramı henüz kümelerle verilmemiş olduğundan çarpım uzaylarının tanımında sıkıntılar vardır. Salt bilgilendirmek ve izlemek zorunda kaldıkları dolambaçlı yollar hakkında fikir vermek açısından bu çalışmadaki çarpım uzaylarının tanımını verelim.

Zermelo önce $M \neq \emptyset$ ve $m \in M$ ise $M = \{m\}$ olup olmadığının tanımlı olduğunu, dolayısıyla herhangi bir kümenin tek öğeli olup olmadığının tanımlı olduğunu belirtir. Öğeleri ayrık $M, N, R, \dots$ kümeleri olan bir T kümesi verilsin. $\prod T$ çarpım uzayının öğeleri tamı tamına $\bigcup T$ birleşim kümesinin her bir $X \in T$ için “ $S \cap X$ tek öğelidir” koşulunu sağlayan altkümeleridir. Bu tanımla $\prod T \subseteq \mathcal{P}(\bigcup T)$ olur ve Seçme Aksiyomunu şöyle de söyleyebiliriz:

Seçme Aksiyomu: T kümesinin öğeleri boş kümeden farklı ve ikişer ikişer ayrık kümelerse $\prod T \neq \emptyset$.

Schoenflies ve Fraenkel'in Zermelo'nun çalışmasına ilişkin eleştirilerine geçmeden önce bugünün bilgileri ve gösterimleriyle kısaca birkaç şeye değinelim. Her şeyden önce Zermelo'nun, Cantor'un $(\tilde{U}, \in)$ evrenini $(\mathcal{B}, \epsilon)$ ile biçimselleştirmek istediğini görüyoruz. Demek ki $\mathcal{B}$ ile temel öğelerden ve kümelerden oluşan bir evren biçimselleştirilecektir. Bir b nesnesine, $a \in b$ olacak biçimde bir a nesnesi varsa bir *küme* demektedir. Küme olmayan nesneler temel öğelere karşılık gelmektedirler; bunlar “hiçbir öğe içermeyen” nesnelerdir. Bu yaklaşımda “hiçbir öğe içermemek” boş küme anlamına gelmez, tam tersine “küme olmama” anlamına gelir. Bu nedenle boş küme, aksiyomla istenen bir düzmece (sanal) kümedir.

Schoenflies'in Zermelo'nun Çalışmasına Getirdiği Eleştiriler [52]

Zermelo başa Dedekind'in eşitlik tanımını koyuyor ((II.4)'e bkz.). Ardından $a = b$ olup olmadığının tanımlı olduğunu, çünkü bunun $a \in \{b\}$ olup olmadığı ile eş anlamlı olduğunu söylüyor. Bu ise bir boş belirlemedir. Aynı şekilde $a = b$ olup olmadığı a 'nın b^n sayısının tabanına eşit olup olmadığıyla eş anlamlıdır denilebilirdi!

Zermelo kelime tanımlarından sakınıp bunları aksiyomatik varsayımlara dayandırmaya çalışmışsa da bazı eksiklikler hala vardır. Zermelo dört temel kavram kullanır: “alan”, “küme”, “nesne” ve “temel ilişki”.

Burada kurama katılan kelimelerin ve ϵ iminin ancak aksiyomlarla matematiksel içerik kazanacakları bellidir. İlk üç aksiyomda “alan” kavramı hiç geçmez ama Zermelo bu aksiyomların ardından bir teorem kanıtlar ve buradan alan hakkında bir sonuç çıkarır. Aksiyomlarda yer almayan alan hakkında önermelere ulaşmak kabul edilemez. “Alan ” kavramından vazgeçilebilir, ancak bu o kadar da önemli değildir. Alanı içeren sonuçları tümüyle atabilirsiniz ve bu kuramın içeriğini değiştirmez. Zermelo “aksiyomlarım $a \in a$ 'ya izin verir” der. Buna karşı Schoenflies, maddesel doğal bir ilişkinin - ki ϵ böyle bir şeyi ifade edecektir - ancak *birbirinden farklı* iki nesne arasında açıklanabileceğini savunur. Bu nedenle $a \in a$ sembolüne ancak *yapay* (*sanal, düzmece*) anlamda izin verilebileceğini savunur.

Herhangi $m, n, p, \dots$ kümelerinin bir arakesiti ancak bunları öge kabul eden bir T kümesi *varsa* açıklanmıştır. Alan kavramı yukarıda belirtilen iki yer dışında bir kez daha “tanımlı” sınıf özellikleri tanımında karşımıza çıkar.

Schoenflies'in alan kavramına ilişkin eleştirileri, kendisinin de belirttiği gibi o kadar da önemli değildir. Bugün ZF veya ZFC kuramında bu kuramın nesneleri olmayan *sınıflar* veya tanımlanabilir *sanal terimler* kullanılır. Ancak *tanımlı* kavramına ve arakesite ilişkin eleştirileri geçerlidir. Örneğin Zermelo'nun aksiyomları az aşağıda Fraenkel'in tanımladığı $Z_0, Z_1, Z_2, \dots$ kümelerinin arakesitini almamıza izin vermez!

Fraenkel'in Eleştirileri [23]

“*Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*” isimli çalışmasında Fraenkel amacının Zermelo'nun çalışmalarını devirmek değil, son şeklini başka bir aksiyomatik çalışmaya ertelediği bazı sorunların özlerine değinmek istediğini belirtir. İlk savı şudur:

Zermelo'nun yedi aksiyomu kümeler kuramını kurmak için yetersizdir.

$0 := \emptyset$ ve $Z_0 = \{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \dots\}$ Zermelo'nun sayı serisi olmak üzere $Z_1 = \mathcal{P}(Z_0), Z_2 = \mathcal{P}(Z_1), \dots$ olsun. Bu durumda aksiyomlar $\{Z_0, Z_1, Z_2, \dots\}$ kümesini oluşturmamıza, dolayısıyla $\bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n$ birleşimine izin vermez! Bunu sağlamak için ya Zermelo'nun aksiyomlarından bazıları güçlendirilmeli ya da yeni bir aksiyom işin içine katmalıdır. Fraenkel aşağıdaki aksiyomu önerir:

Yerine Koyma Aksiyomu VIII. *M bir kümeysen ve M 'nin her bir ögesi “ $\mathcal{B}$ alanının bir nesnesi” ile değiştirilirse M kümesi yeniden bir kümeye dönüşür.*

Yalınlık açısından Fraenkel $0 := \emptyset, 1 := \{0\}, 2 := \{1\}, \dots$ kısaltmalarını yaptıktan sonra $Z_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ kümesinde 0 yerine $Z_0, 1$ yerine $Z_1, 2$ yerine $Z_2, \dots$ koyarak $\{Z_0, Z_1, Z_2, \dots\}$ kümesini elde eder; bundan sonra birleşim aksiyomu $\bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n$ kümesini oluşturmamıza izin verir. Ancak bu aksiyomunda geçen “nesnelerin değiştirilmesi” söyleminin aksiyomatik bir kuram için uygun olmadığına farkındadır. Bu aksiyomun fonksiyon kavramı üzerinden daha doğru ifade edilebileceğini belirtir ve bunu da sonraki bir çalışmaya erteler.

Bu eksik dışında en zayıf noktanın *tanımlı* soru veya sınıf özelliği kavramı olduğunu belirtir. Bu boşluğun giderilmesini de bir başka çalışmaya erteler.

Seçme Aksiyomuna ilişkin tartışmalarına tüm ayrıntısıyla girmeyeceğiz. Seçme Aksiyomunun ifadesinden sonra gelen “Bu aksiyomu şöyle de dile getirebiliriz: T nin her bir $M, N, R, \dots$ ögesinden bir tek $m, n, r, \dots$ öğelerini *seçip* bir S_1 kümesi oluşturabiliriz” tümcesini, yanlış anlamalara yol açacağı için eleştirir. Bu sanki “belirlenmiş öğelerin seçimi” olarak algılanabilir ve doğru değildir der, ve nitekim Zermelo’dan aldığı bir mektupta da aksiyomun salt *varlık* bildirdiğini, o söylemin kullanılmadığı bilgisini alır. Seçme Aksiyomunun yerine koyma aksiyomu kullanıldığında *kanıtlanabilir* olduğunu belirtir. Düşüncesi çok yalındır: T Seçme Aksiyomundaki gibi bir küme olmak üzere her $M \in T$ kümesini kendisinin bir m ögesiyle değiştirilerek elde edilen S_1 kümesi Seçme Aksiyomunun varlığını istediği türden bir kümedir. Her ne kadar yerine koyma aksiyomu da Seçme Aksiyomu kadar anlaşılır olsa da Seçme Aksiyomunun kümeler kuramının vazgeçilmezi olduğunu, bu nedenle korunması gerektiğini, belki yerine koyma aksiyomunun fazlalığını verecek bir başka aksiyom verilebileceğini belirtir.

Fraenkel’e göre Zermelo aksiyomları bir yandan Cantor kümeler kuramı için yetersizken, diğer yandan gereksiz fazlalıklar içermektedir. Bir yandan Mirimanoff’un “*sıra dışı*” kümeler dediği temelsiz kümelere izin verir, diğer yandan alana ait olacak temel öğelere hiçbir kısıtlama getirmediğinden, kuramın *kesin belli (kategorik)* olmasını daha baştan önlediği gibi, matematiği hiç ilgilendirmeyen bir sürü nesneye de izin verir. Bu derde bir çare olarak belki aşağıdaki gibi bir aksiyoma başvurulabileceğini belirtir.

Sınırlılık Aksiyomu IX . $\mathcal{B}$ alanı I-VIII aksiyomlarını sağlayan en dar alandır.

Bu durumda boş küme ögesi olmayan tek nesnedir ve bunun kümeler kuramı için yeterli olduğunu belirtir.

Sonra derleme aksiyomunun diğer aksiyomlarından bağımsız olduğunu kanıtlamak için III. aksiyom dışında diğerlerine uyan bir model verir. Her şeyden önce ϵ bağıntısı $\in$ gerçek ögesi olma bağıntısı olacaktır. $\mathcal{B}$ alanı

bir tek temel nesne, $0 = \emptyset$ kümesini ve buradan tekrarlı tanımlamayla elde ettiğimiz $1 = \{0\}, 2 = \{1\}, \dots$ kümelerini içerir. Ayrıca $\mathcal{B}$ alanı bunların sonlu tanesinin oluşturduğu sezgisel kümeleri de küme olarak içerektir. Ayrıca $Z_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ 'da $\mathcal{B}$ alanına ait bir küme olsun. $\mathcal{B}$ ayrıca kendisine ait sonlu nesnenin oluşturduğu sezgisel kümeleri, kendisindeki her kümenin birleşimini ve güç kümesini de içersin. $\mathcal{B}$ alanındaki her nesne bir küme olduğu gibi bu alana ait bir nesnenin öğeleri de bir kümedir, dd. $(\mathcal{B}, \in)$ ile $(\mathbb{U}, \in)$ 'nin bir modelinin amaçlandığını düşünebiliriz. Burada titiz davranılması gereken tek nokta güç kümesinin oluşturulmasıdır: Ancak daha önce *aksiyomlarla varlığı kanıtlanmış* bir N kümesi, ayrıca $N \subseteq M$ ise M kümesinin güç kümesinin bir ögesidir, yoksa M kümesinin öğelerinden sezgisel olarak gönlümüze göre oluşturduğumuz N çoklukları M kümesinin güç kümesinin öğeleri değildirler. Dolayısıyla

$$x \in \mathcal{P}(M) \iff x \subseteq M \wedge x \in \mathcal{B}. \quad (\text{Burada } x \in \mathcal{B} \text{ çok önemli!!})$$

Sav: $(\mathcal{B}, \in)$ Zermelo'nun III. aksiyomu dışındaki aksiyomlarını sağlar.

Her şeyden önce $(\mathcal{B}, \in)$ modelinde, I, II, IV ve V aksiyomları tanım gereği sağlanırlar. Bu modelde sonlu ve sonsuz alışık olduğumuz sezgisel sonlu ve sonsuz anlamındadır. Dolayısıyla Z_0 sonsuz bir kümedir ve VII. aksiyom da sağlanır.

Sonlu bir kümenin güç kümesi de sonludur, ayrıca sonsuz bir küme içermeyen bir sonlu kümenin birleşimi de sonludur. Fraenkel'in irdelemelerinin kilit noktası Z_0 kümesinin $\mathcal{B}$ alanındaki her sonsuz kümenin altkümesi olduğudur. Önce bunu kanıtlayalım. Bu nedenle şunları göstermek yeterlidir.

(1): $Z_0 \subseteq T \in \mathcal{B} \implies Z_0 \subseteq \mathcal{P}(T) : Z_0 \subseteq T$ ise $0, 1, 2, \dots \in T$ olacağından $1 = \{0\}, 2 = \{1\}, \dots \in \mathcal{P}(T)$ olur. Ayrıca $0 = \emptyset \in \mathcal{P}(T)$ olduğundan $Z_0 \subseteq \mathcal{P}(T)$ olur.

(2): $Z_0 \subseteq T \in \mathcal{B} \implies Z_0 \subseteq \bigcup T : \text{Her } n \in Z_0 \text{ için } \{n\} \in Z_0 \text{ olduğundan } n \in \bigcup T, \text{ dolayısıyla } Z_0 \subseteq \bigcup T \text{ olur.}$

(3): $T = \{t_1, \dots, t_n, A\}$ ve $Z_0 \subseteq A$ ise $Z_0 \subseteq \bigcup T$. Bu ise apaçıktır.

Şimdi Seçme Aksiyomunun sağlandığını görelim. T bir sonsuz küme ise $Z_0 \subseteq T$ ve dolayısıyla $\emptyset \in T$ olacağından Seçme Aksiyomu bu T için boş olarak doğrudur. T sonlu ve her $M \in T$ için $M \neq \emptyset$ ise bir $m \in M$ vardır. Ancak bu sonlu m öğelerinin sezgisel kümesi tanım gereği $\mathcal{B}$ 'de bir kümedir ve Seçme Aksiyomunun koşulunu sağlar. Ancak III aksiyomu sağlanmaz. Örneğin tanımlı $\psi(x)$ özelliği “ $x \in Z_0$ ve $x \neq 0$ ” ise bu özellik Z_0 'da derlenemez çünkü $Z_0 \setminus \{0\}$ sezgisel kümesi $\mathcal{B}$ alanında değildir. Z_0 kümesinin Cantor anlamındaki hiçbir sonsuz $A \subset Z_0$ öz altkümesi $(\mathcal{B}, \in)$ modelinde Z_0 kümesinin altkümesi değildir.

$0 := \emptyset$, $1 := \{0\}$, $2 := \{1\}$, $3 = \{2\}$, ... olmak üzere herhangi bir n için $\psi_n(x) := (x \in Z_0) \wedge x \neq 0 \wedge \dots \wedge x \neq n$ olmak üzere bu özelliğe sahip öğeleri derleyerek $C_n := \{x \mid \psi_n(x)\} = \{n+1, n+2, \dots\}$ çokluklarını oluşturalım. $(\mathcal{B}, \in)$ modeline *dışardan*, $(\tilde{\mathcal{U}}, \in)$ 'dan bakan bizler için tüm C_n 'ler Z_0 kümesinin altkümeleridir. $(\mathcal{B}, \in)$ modelindeki bir sanal yaratık için, dd. $(\mathcal{B}, \in)$ modelinin *içinden* bakan birisi için $C_n \notin \mathcal{B}$ ve bunlar küme değildirler! Genel yaklaşım çerçevesinde içerden bakan kişi Z_n nesnelere *sınıf* veya *dev kümeler* diyecektir. Bunlar ise hiç de büyük olmayıp bu modelde bile Z_0 kümesinin öz alt sınıflarıdır! İlerde vereceğimiz aksi-yomlarımızın böyle bir şeye izin vermemesini sağlamalıyız; aksi-yomlarımız kümelerin alt sınıflarının da küme olmasını garanti etmelidirler.

Z_0 kümesinin bildiğimiz anlamdaki güç kümesini $\mathcal{P}(Z_0)$ ve $(\mathcal{B}, \in)$ modelindeki güç kümesini ise $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(Z_0)$ ile gösterelim. $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(Z_0)$ kümesinin öğeleri tamı tamına Z_0 ve Z_0 kümesinin sonlu altkümeleridirler. Dolayısıyla $\mathcal{P}(Z_0) \neq \mathcal{P}_{\mathcal{B}}(Z_0)$. Aynı nesne farklı modellerin evrenlerinin öğesi olduğunda bu nesneye ilişkin söylemlerin bu modellerde örtüşmesi gerekmediğini görüyoruz! Bu modele dışarıdan bakan bizler için Z_0 ve onun bu modeldeki güç kümesi $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(Z_0)$ eş güçlüdürler, her ikisi de sayılabilir kümelerdir. CKK'da geçerli olan Cantor Teoremi'nden dolayı biz $(\mathcal{B}, \in)$ modelinde bir şeylerin sakat olduğunu düşünürüz. Ancak " Z_0 ve $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}(Z_0)$ kümeleri $(\mathcal{B}, \in)$ modelinin de eş güçlü müdür?" tümüyle ayrı bir sorudur. Açalım. $X, Y \in \mathcal{B}$ olsun. Bu iki kümenin $(\mathcal{B}, \in)$ modelinde eş güçlü olması demek birebir üzerine bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun *bu modelde* bulunması demektir. Fonksiyonlar özel kümeler olduğundan $f \in \mathcal{B}$ olmalıdır. $\mathcal{B}$ 'de daha az küme olduğundan $(\mathcal{B}, \in)$ modelinde X kümesinden Y kümesine fonksiyonlar genelde X kümesinden Y kümesine CKK'daki fonksiyonlardan daha azdırlar. Bu nedenle sorumuzun yanıtının CKK'daki yanıtla örtüşmesi gerekmez. Şimdilik bu kadarla yetinip, Aksi-yomatik Kümeler Kuramında, Skolem teoremiyle benzeri konulara tekrar döneceğimizi belirtelim.

1.8 SEZGİCİLER

İnsanlar birbirlerini anlamıyorlar, çünkü aynı dili konuşmuyorlar ve çünkü öğrenilemeyen diller vardır (Poincaré).

İnsanların birbirlerini anlamaları için insan beyinlerinin birbirine biyolojik uyumu, deneyimin düzenleyici ve zorlayıcı olarak yönettiği alanlarda yeterince gelişmiştir ama deneyimin ötesindeki diyarlarda bu böyle değildir (Hadamard).

Sezgiciler kullandığımız mantığı eleştirdiler. Önde gelen savunucuları Brouwer, Poincaré, Weyl gibi zamanlarının önemli matematikçileridir. İçlerinde mantık açısından en radikal olanı Brouwer'dir. Bu yaklaşımın vurgulanması gereken temel noktaları şunlardır:

1. Brouwer'e göre matematik - yani matematiksel kurgu - *dilden* bağımsızdır. Buradan matematiğin geleneksel mantıktan bağımsızlığını ve üçüncünün olmazlığı yasaının yasaklanmasını çıkarmaktadır. Brouwer için *düşünce* saf kurgulardan ibarettir ve dolayısıyla düşünceler her türlü sözel ve yazılı ifade biçimlerinden önce gelir. Buna karşın *mantık* bir anlamda matematikten soyutlanan, matematiğin ifade biçimlerinin, matematiğin *gösterimlerinin* kuramıdır ve ancak matematikten *sonra* mümkündür [24]. Bu nedenle matematiğin sembolleştirilmesinin yasaları olarak mantık yasaları tüm matematiğin algısal temellerinin olası kıldığı çerçevede kullanılabilirler. Russell ve Withehead gibi mantıkçılara göre matematik mantığın bir parçasıdır. Sezgicilere göre ise tam tersi mantık sadece matematiğe ilişkin bir dildir.

2. Sezgicilere göre *çelişkisizlik* kanıtı gereksizdir, çünkü doğrudan dolaysız elde edilen sezgisel doğrulardan yola çıkılarak tüm nesneler kurgusal olarak kazanılmıştır. Biçimciler içinse *matematiksel varlık çelişkisizlik* demektir. Çelişkisizlik kanıtlanmışsa bir kavramın kullanımını haklı kılacak ikinci ölçüt *başarı ve işe yararlılıktır*. Sezgicilere göre *çelişkisiz* her şeye izin vermek matematiği sınırsız bir oyuna dönüştürür ve bunun sadece kurgusal olan kısmı bilimsel bir karakter taşır.

“Sezgicilerin isyan girişimini tümüyle sonlandırmak isteyen Hilbert bu yaklaşımın devrimci karakterini gözden geçiriyor. Hilbert ve Bernays'in tam anlamıyla başarılı olduklarında gösterebilecekleri (ve istedikleri), geleneksel matematiğin, dolayısıyla onun temelindeki aksiyom sisteminin *çelişkisizliği*dir; bunun içine elbette üçüncünün olmazlığının diğer matematik ilkelerle bağdaşması da girer... Tıpkı (Brouwer'in bir benzetmesiyle) mevcut araştırma araçlarıyla ortaya çıkarılamayan bir cinayetin cinayet olmaktan çıkmayacağı gibi matematikte bile “varlık” ve “doğruluk”’un çelişkisizlikle örtüşmediğini düşünen bir katı sezgici için Hilbert'in düşünceleri, sezgicilerin üçüncünün olmazlığına duydukları kuşkularını gidermez. Onlar “üçüncünün olmazlığı ilkesinin kullanımının her zaman *tehlikesiz* olduğunu” tartışmıyorlar, tartıştıkları yalnızca bu kullanımın *haklılığı*dir; bundan dolayı “çelişkisiz hatalarla” çalışan bir analiz olsa olsa akıl dolu bir oyundur ama bir bilim değildir [24]; bu konuda[25]'e de bakabilirsiniz.

3. Temel denklem **varlık=kurgusal**lık tır (*Konstruktiflik*). Bir nesne ancak somut olarak verilebiliyorsa, veya adım adım kurgusal biçimde oluşturuluyorsa vardır. Bu nedenle bir nesnenin yok olduğunu varsayıp bir çelişkiye ulaştığımda aynı zamanda bu nesneyi kurgusal olarak elde etmeyi vermemişsem bu kanıt sezgiciler açısından o nesnenin varlığının bir kanıtı değildir!

4. *Doğal sayılar ve tümevarım* insan kavrayışının ve sezgisinin açıklama gerektirmeyen ve başka bir şeye dayandırılmayacak *en temel başat sezgisi*dir. Bu yaklaşımlarından dolayı *sezgiciler* diye adlandırıldılar. Yine ilk sezgicilerden olan Kronecker’in “*Doğal sayıları tanrı yarattı, gerisi insan işidir*” söylemi sezgicilerin tartışmasız doğrusudur. Poincaré, Hilbert’in tüm matematiğin çelişkisizliğini amaçlayan girişiminin, aritmetiğin vazgeçilmez parçası olan tümevarımı zorunlu olarak kullanacağından bir kısır döngü içereceğini, bu nedenle başarısızlığa mahkum olduğunu ileri sürmüştür. O zamanlar aralarında Brouwer ve Weyl’in bulunduğu küçük bir grup tarafından kayda değer bulunan bu eleştiri yıllar sonra Gödel’in çalışmalarıyla haklılık kazanmıştır.

5. Hilbert’in, Du Bois-Reymond’un “Doğa Bilimlerinin Sınırları Hakkında” adlı konuşmasındaki “Bilmiyoruz ve bilemeyeceğiz”¹¹ söylemini işaret edencesine gururla ve yüksek sesle dile getirdiği meşhur “Bilmek zorundayız ve bileceğiz”¹² söyleminin hemen hemen tüm matematikçiler tarafından paylaşıldığı bir ortamda sezgiciler her şeyi bilemeyeceğimizi, *doğruluğuna ve yanlışlığına karar veremeyeceğimiz önermeler olduğunu ileri sürdüler*. Bu konuda ne kadar haklı olduklarını, bunun salt sezgisel mantıktan kaynaklanmadığını, onlara karşı olan geleneksel matematikçilerin kendi dünyasında da karar verilemeyen önermeler olduğunu yine Gödel’in çalışmalarından öğrenmek, uzun süre sindirelemeyen bir şok olmuştur.

6. Üçüncünün olmazlığı mantık ilkesi ve $\neg\neg\psi \equiv \psi$ denkliği reddedilmiştir. Bunun bir sonucu olarak çelişki yöntemine dayanan tüm kanıtlardan vazgeçilmiştir.

7. Mantıkta “her x için....” ve “en az bir x için....” gibi önermelerin *sonsuz* evrenler için geleneksel mantıktaki kullanımına şiddetle karşı çıktılar.

8. Gerçek sonsuzluğa karşı çıkıp potansiyel sonsuzluktan yana tavır koydular. Tam bir fikir birliği yoksa da sezgicinin evreni *oluşum halinde bir evrendir*.

¹¹Ignoramus et ignorabimus (Du Bois-Reymond, 1818-1896).

¹²Wir müssen wissen, wir werden wissen (D.Hilbert,...)

Konumuz olmadığından bu konuda birkaç şey daha söylemekle yetineceğiz. φ ve ψ önermeler olmak üzere geleneksel mantıkta

$$\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \quad (1.7)$$

$$(\varphi \implies \psi) \equiv (\neg\psi \implies \neg\varphi) \quad (1.8)$$

ve

$$\exists x \varphi \equiv \neg\forall x \neg\varphi \quad (1.9)$$

denklileri vardır. Ancak *bunlar sezgiciler için doğru değildir*. Bu denklilere kanıtlarda sıkça baş vururuz. Bunların kanıtlarda kullanımı geleneksel mantıkçılarla sezgiciler için çok farklıdır.

$\varphi \vee \psi$ önermesini kanıtlamak isteyelim. φ veya ψ 'den en az birini kanıtlarsak iki taraf içinde $\varphi \vee \psi$ önermesi kanıtlanmıştır. Geleneksel mantıkçı için bir yol daha vardır; çelişki yöntemi. O, $\varphi \vee \psi$ 'nin yanlış olduğunu varsayar ve bir çelişkiye ulaşırsa $\varphi \vee \psi$ önermesini kanıtladığını düşünür. Ancak bir sezgici buna katılmaz, o (1.7) denklisine katılmadığından onun için kanıtlanan sadece $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ 'dir. φ veya ψ 'den herhangi birini kanıtlamadan “ φ veya ψ ”'yi kanıtlamak onun mantığına sığmaz!

$\exists x \varphi$ önermesini kanıtlamak isteyelim. x değişkeninin evreninden bir a nesnesi için $\varphi(a)$ olduğu kanıtlanırsa her iki taraf için $\exists x \varphi$ önermesi kanıtlanmıştır. Geleneksel mantıkçı için yine çelişki yöntemi vardır. O önermeyi yanlış varsayıp bir çelişkiye ulaşarak önermeyi kanıtladığını düşündüğünde sezgici ona katılmaz, çünkü (1.9) onun için geçersizdir. Ayrıca x değişkeninin evreninden $\varphi(a)$ doğru olacak biçimde bir a nesnesi bulmadan “Evrenimizdeki en az bir x nesnesi için φ önermesi doğrudur”un kanıtlandığını düşünmek onun mantığına sığmaz.

Sezgicilerin yaklaşımları hakkında daha ayrıntılı bilgilenmek isteyenler doğrudan Brouwer'in makalelerine veya [62], [60], [61] ve [31]'a başvurabilirler.

Sezgicilerin yaklaşımıyla çelişkilerden arınılmıştır ancak kökleşik matematiğin büyük bir kısmından vazgeçme pahasına! Bu nedenle bu yaklaşım fazla taraftar bulmadı. Sezgicilere ilişkin söyleyeceklerimizi von Neumann'dan bir alıntıyla noktalayalım:

“Onlar (Mantıkçılar) çok farklı sonuçlara ulaştılar, ama uğraşlarının toplam izlenimi doğrudan yok ediciydi. Daha Russell'da tüm matematik ve kümeler kuramı tümüyle sorunlu “İndirgenebilirlik Aksiyomu” üzerine kurulmuş görünüyor, Weyl ve Brouwer matematiğin ve kümeler kuramının büyük bir kısmını tümüyle anlamsız bularak ısrarla reddediyorlar. Burada asla

kümeler kuramının bir güven yenilenmesine değil, buna karşın “üçüncünün olmazlığı” “her” ve “vardır” gibi temel mantıksal çıkarımların son derece keskin eleştirilerine ulaşıldı [42].”

1.9 NEUMANN, BERNAYS VE GÖDEL YAKLAŞIMI

Bu kuram biçimsel kuram olarak dile getireceğiz. Dolayısıyla

$$\neg, \vee, \wedge, \implies, \iff, \forall, \exists, =, \in$$

içeriksel imlerinin yerini onları temsil etmesini düşündüğümüz, ancak hiçbir içeriksel anlam yüklediğimiz

$$\neg, \Upsilon, \wedge, \longrightarrow, \longleftrightarrow, \bigwedge, \bigvee, \approx, \epsilon$$

imleri alacaklardır.

Zermelo ve onu izleyenlerin yaklaşımında mantığa dokunulmamış, ama “küme” kavramı mercek altına alınmıştır. Ancak *kümeyi* başka kelimelerle *tanımlamak yerine* aksiyomatik kuramlarının *tanımsız terimi* olarak seçmişlerdir. Kümeler, kuramlarındaki nesnelerdir ve ne oldukları kuramın aksiyomlarıyla belirlenir. Neumann [42] ve [43]’te kümenin yerine fonksiyon kavramından yola çıkmıştır, çünkü bunlar eşdeğer kavramlardır. Neumann fonksiyonu temel kavram olarak seçme nedenlerinden biri olarak *ZFC* kuramının bazı aksiyomlarının fonksiyon kavramını kullanmasını göstermektedir. Neumann iki tür nesnelerden yola çıkar: Bunlar *argümanlar* ve *fonksiyonlardır*. Bu nesneler kısmen örtüşmektedir, dd. bazı nesneler hem argüman hem de fonksiyondur ki Neumann bunları *argümanfonksiyonlar* olarak isimlendirmektedir. Yeni çelişiklere yol açmadan kuramı genişletmenin daha doğru olacağını savunan Neumann derleme aksiyomunu daha geniş tutmuştur. Sonradan Bernays ve Gödel’in çalışmalarıyla son şeklini alan bu kuramda, “argüman” ve “fonksiyon” kavramları “küme” ve “sınıf” ile yer değiştirmişlerdir. Bu kuramda nesnelere **sınıf** adı verilir. Sınıflar arasında bir ikili ϵ bağıntısı verilmiştir. x ve y sınıflar olmak üzere $x \epsilon y$ ise x sınıfı y sınıfının **ögesidir** veya **elamamıdır** denir. Bir başka sınıfın ögesi olan bir sınıfa bir **küme**, olmayanlara ise **öz sınıf** denir. Neumann kuramının da bir kısıtlaması vardır: *Sadece kümeler derlenebilir, sınıflar asla derlenemezler!* Derleme aksiyomunda kullanacağımız $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ formüllerinde, eğer bu formülü doğru kılan x nesnelerini derleyeceksek, $x_1, \dots, x_n$ parametreleri *sınıf* olabilirler ancak x bir *küme* olmak zorundadır. Ayrıca $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ formülünde $\bigvee y$ veya $\bigwedge y$ niceleyicileri geçiyorsa, geçtikleri her yerde y gezen değişkeni kümelere kısıtlı olmak zorundadır. Bu tür

formüllere **yüklemsel formüller** denir. x sınıfı bir küme ise bu $M(x)$ ile gösterilir (M harfi Almanca “Menge(küme)” kelimesinden alınmıştır). $M(x)$ kısaca “ x bir kümedir” yerine geçmektedir.

(Uz):(Uzantı Aksiyomu): $\bigwedge x, y (x \approx y \longleftrightarrow \bigwedge z (z \in x \longleftrightarrow z \in y))$.

(DerN):Neumann Derleme Aksiyomu : *Her $\varphi(x, x_1, \dots, x_n)$ yüklem-sel formülü ve her $x_1, \dots, x_n$ parametreleri için, y , φ 'de bulunmamak ve $x_1, \dots, x_n$ 'lerden farklı olmak koşuluyla*

$$\bigvee y \bigwedge x (x \in y \longleftrightarrow M(x) \wedge \varphi(x, x_1, \dots, x_n)). \quad (1.10)$$

Uzantı aksiyomundan dolayı bu y sınıfı tek olarak belirlidir ve

$$y \approx \{x \mid M(x) \wedge \varphi(x, x_1, \dots, x_n)\} \quad (1.11)$$

olarak gösterilir.

Başka aksiyomlarla tamamlanacak olan bu kurama genellikle **NB (Neumann-Bernays)** veya **BG (Bernays-Gödel) kuramı** denir. Hiçbirine haksızlık etmeden **Neumann-Bernays-Gödel** kuramı demeyi ve kısaca **NBG** ile göstermeyi yeğliyeceğiz. Daha önce tartıştığımız çelişkilere yer olmadığı gibi şimdi daha net konuşabiliriz: $\mathcal{R}$, Srs , $\mathcal{T}$ ve $\mathbb{U}$ nesneleri Neumann derleme aksiyomuna göre derlenmiş *öz sınıflardır*. Bunlar ne birbirlerini ne de kendilerini içerebilirler, dd.

$$\neg(\mathcal{R} \in \mathcal{R}), \neg(\mathcal{R} \in Srs), \neg(\mathcal{R} \in \mathbb{U}), \neg(\mathcal{R} \in \mathcal{T}), \dots, \neg(\mathbb{U} \in \mathbb{U}).$$



2

CANTOR KÜMELER KURAMI

Herhangi bir alandaki çalışmalar yeterli bir düzeye geldikten sonra o alandaki temel bilgiler belirlenir ve tüm diğer sonuçlar onlardan kazanılmaya çalışılır. Bu Öklid’le başlayan aksiyomatik yaklaşımdır. Eğer araştırmalarımız, kümeler kuramında olduğu gibi bizi bazı çelişkilerle karşı karşıya getirirse, nelerden vazgeçip neleri korumak istediğimizi belirlemek zorunda kalırız. Bazı önemli çelişkilere değindik, şimdi CKK’nın en önemli kavramlarını ve matematiğin diğer dallarında en sık kullanılan en güvendiğimiz önemli teoremlerini vereceğiz. Teoremlerin kanıtları kadar bizi teoremlere götüren sezgisel düşünceleri de vereceğiz. Bunları önemsiyoruz, çünkü bir biçimsel kuramın teoremlerine ve kanıtlarına ulaşmada, bir matematikçinin, o kuramın teoremlerini vermek üzere programlanmış bir bilgisayara karşı üstünlüğü sezgileri ve aksiyomlara yüklediği içeriksel anlamlardır. Burada kümeler kuramının bir matematikçinin genel kültüründe aşına olduğu bazı teoremlerinin kanıtlarını ödev olarak bırakacağız. Daha az bilinenlerin kanıtlarını genel olarak vereceğiz. Bir yandan okuyucuyu aksiyomatik kısma da hazırlarken, diğer yandan özellikle sıra sayıları işlenirken kullanacağımız için bu kısımda sınıflara da yer vereceğiz. Özellikle kuramın temel kavramlarının tanımlarını sınıflar için vereceğiz. Her küme aynı zamanda bir sınıf olduğu için *sınıflara ilişkin bir tanım veya teorem elbette kümeler için de geçerlidir. Ancak bu kısımda genel olarak kümelerden söz edileceğinden sınıf veya küme olup olmadığı belirtilmemiş bir çokluktan daima bir küme anlaşılacaktır.*

“Matematiksel düşüncenin, her ne kadar soyağacı eski ve karanlık ise de, tecrübeden kaynaklandığını söylemenin gerçeğe

olduça yakın olduğuna inanıyorum; zira çok karmaşık olan gerçek ancak yaklaşık ifadelerle izin verir. Ama bir kez ifade edildikten sonra, bu alan kendi başına buyruk bir yaşama kavuşur ve neredeyse, özellikle deneysel bilimler gibi, estetik kaygıların hakim olduğu yaratıcı bir çabaya dönüşür. Fakat vurgulanması gereken diğer bir nokta daha olduğuna inanıyorum: Matematiksel uğraş deneysel kaynağından çok uzaklaştıktan sonra, hatta ikinci veya üçüncü kuşaklarda kaynağını, dolaylı olarak da olsa, gerçek yaşamdan aldıktan sonra, çok büyük tehlikelerle karşı karşıyadır. Giderek saf estetik kaygılara, ‘sanat için sanat’ anlayışına kapılır. Eğer çalışma alanı hala deneysel ilişkilerle çevrilmişse veya bu alanda sözü geçen insanların olağanüstü gelişmiş beğenileri varsa, durum pek de kötü olmayabilir. Fakat, en az direnç gösteren bir damar boyunca gelişme tehlikesi her zaman vardır; o zaman kaynağından uzaklaşıp pek çok önemsiz dala ayrılır; bir yığın ayrıntı ve karmaşık bilginin düzensizce yığıldığı bir kütleyle dönüşebilir. Diğer bir deyişle, deneysel kaynağından çok uzaklara gittiğinde veya pekçok ‘soyut’ türdeş üretimden sonra, matematiğin yozlaşma tehlikesi doğar. Başlangıçta üslubu hâlâ klasik olabilir, ama barok¹ olmaya başladığında tehlike çanları çalmaktadır. Burada, barok ve hayli barok üsluplara kayışın izini süren örnekler vermek fazla teknik olacaktır.

Ama her durumda, bu aşamaya erişildiğinde, bana göre tek çare gençleştirici kaynağa dönmek, doğrudan veya dolaylı deneysel fikirler aşılacak olacaktır. Matematiğin tazeliğini ve canlılığını korumanın gerekli şartının bu olduğuna, ve gelecekte de bu olacağına inanıyorum.” John von Neumann [41]².

¹Klasik olmayan; aşırı süslü, şatafatlı.

²Çeviri için değerli dostum Prof.Dr.B.Karaoğlu’na teşekkür ederim.

2.1 TEMEL KAVRAMLAR

Kümeler kuramı ve matematiksel mantık dışında bir alanda çalışan matematikçiler, bunlar neredeyse matematikçilerin tamamına yakındır, CKK'yı kullanır. Kırk yılda bir karşısına çıkacak çelişkileri dert etmezler ve onlardan korunmayı da öğrenmişlerdir. Herhangi bir analiz, cebir topoloji, geometri vb....kitabında karşılaştığımız nesneler ve kümeler bu kuramın $\tilde{U}$ evreninin öğeleridirler. $\tilde{U}$ evreninde *hiçbir öğe içermeyen ve birbirinden farklı asal öğeler* vardır.

$$\mathbb{A} := \{a \mid a \in \tilde{U} \text{ ve } a \text{ asal öğe}\}$$

evrenimizdeki asal öğelerin koleksiyonu olsun.

Evrenimizin nesnelerinden, evrenimizin en az bir nesnesini içerenlere **küme** diyeceğiz. Evrenimizin küme olmayan öğeleri asal öğelerimizdir. Ancak evrenimize yine hiçbir öğesi olmayan ve asal öğelerimizden farklı bir *sanal* $\emptyset$ öğesini katacağız ve buna **boş küme** diyeceğiz. Özellikle $\mathbb{N}$ doğal sayılar, $\mathbb{Z}$ tam sayılar, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar, $\mathbb{R}$ gerçekte sayılar ve $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümeleri bu evrenin öğeleridirler. Bu evrende her şey tam da alışık olduğumuz gibidir. = imi özdeşliği gösterirken $\in$ imi gerçekten öğesi olmayı gösterir. Özetle

1. $\forall x \in \tilde{U} (x \text{ bir kümedir} \iff x = \emptyset \text{ veya } \exists y (y \in \tilde{U} \wedge y \in x)).$
2. $x \in \tilde{U} \iff x \text{ bir asal öğe veya } x \text{ bir kümedir.}$

Birinci kısımda $\tilde{U}$ evreninin öğelerinin $Srs, \mathcal{R}, \mathcal{T}$ gibi bazı koleksiyonlarını tanıdık ve bunlara küme deyip $\tilde{U}$ evreninin öğeleri varsaymanın bizi açmazlara götürdüğünü öğrendik. Öyleyse $Srs, \mathcal{R}, \mathcal{T} \notin \tilde{U}$ olmalıdır. Tıpkı gerçekte analizde $\pm\infty$ nesnelerini $\mathbb{R}$ gerçekte sayılar kümesine katıp, onlara *ideal* sayılar gözü ile bakmanın ve sayılara ilişkin *bazı* kavram ve işlemlerin bu ideal nesnelere aktarılmasının kuramın anlatımında yararlı olması gibi burada $Srs, \mathcal{R}, \mathcal{T}$ koleksiyonlarına evrenimizin ideal veya *sanal nesneleri* olarak bakıp kümelere ilişkin bazı kavram ve işlemlerin bu sanal öğeler aktarılması da yararlıdır. Kümelerin ve bu sanal nesnelerin ortak özellikleri evrenimizin öğelerinin bir koleksiyonu olmalıdır. Evrenimizin öğelerinin *herhangi bir koleksiyonuna* bir **sınıf** diyeceğiz, dd.

$$S \text{ bir sınıftır} : \iff S \notin \mathbb{A} \wedge \forall x (x \in S \implies x \in \tilde{U}).$$

Sınıflardan sanal olanlara, dd. küme olmayanlara **öz sınıflar** diyeceğiz. Buna göre $\tilde{U}, Srs, \mathcal{R}$ ve $\mathcal{T}$ birer öz sınıftırlar. S ve T sınıflar ve $S \in T$ ise tanım gereği $S \in \tilde{U}$ olur. Dolayısıyla *bir başka sınıfın öğesi olan bir sınıf, asal öğe de olamayacağından zorunlu olarak bir kümedir*. Bu durumda *öz sınıflarımız bir başka sınıfın öğeleri olamazlar*. Diğer yandan her küme $\tilde{U}$ sınıfının bir öğesi olduğundan aşağıdaki önerme geçerlidir:

- *Bir S sınıfının küme olması için gerek ve yeter koşul bir başka sınıfın ögesi olmasıdır.*

CKK kuramının aksiyomlarının (UzC), (DerC) ve Seçme Aksiyomu olduğu kabul edilmiştir. (DerC)'de geçen ve Aksiyomatik Kümeler Kuramında ayrıntılı biçimde ele alacağımız formüllerin ne olduğunu kısaca söyleyelim. x ve y , $\mathbb{U}$ evreninde gezen değişkenler olmak üzere

$$(x = y) \text{ ve } (x \in y)$$

ifadeleri birer formüldürler. Bunlara kuramımızın **asal** (ilkel veya **atomar**) formülleri denir. Tüm formüller bunlardan sonlu adımda mantık işlemleriyle elde edilen ifadelerdir. Özetle φ ve ψ birer formülseler

$$\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \implies \psi), (\varphi \iff \psi), \forall x \varphi \text{ ve } \exists x \varphi$$

birer **formüldürler**.

Ayraç Azaltma Uzlaşması

Biz x, y, z doğal sayılar olmak üzere $xy + z$ gibi bir ifadeyle karşılaştığımızda bununla kastedilenin ayraçlarla yazıldığında $(x(y + z))$ değil $((xy) + z)$ olduğunda hemfikirizdir. Niçin? Çünkü *çarpma toplamadan daha sıkı bağlar* diye bir uzlaşmamız vardır. Benzeri uzlaşmaları formül yazımında da yapacağız. Formüllerimiz için aşağıdaki ayraç azaltma uzlaşmalarını kullanacağız:

- Herhangi bir formüldeki dış ayraçlar atılabilir, örneğin $((\neg\varphi \vee \psi) \iff (\varphi \implies \psi))$ yerine $(\neg\varphi \vee \psi) \iff (\varphi \implies \psi)$ yazabiliriz.
- Aşağıda imlerimiz üç grup olarak verilmiştir:

$$\neg, \exists, \forall; \wedge, \vee; \implies, \iff.$$

Grupların bağlama dereceleri soldan sağa azalacaktır. Ancak herhangi bir gruptaki imlerin bağlama dereceleri aynı olacaktır; bu nedenle onlar peşpeşe geldiklerinde neyi kastettiğimizi belirtebilmek için ayraç kaçınılmazdır. $\neg, \exists$ ve $\forall$ kendilerinden sonra gelen ilk altformüle³ uygulanırlar. Örneğin $(\neg\varphi \vee \psi) \iff (\varphi \implies \psi)$ yerine yanlış

³Herhangi bir formülün altformülleri kendisi ve atomar formüllerden başlayarak o formülü oluştururken oluşturulan tüm formüllerdir. Örneğin φ ve ψ atomar formüller olmak üzere $(\neg\varphi \vee \psi)$ formülünün altformülleri kendisi ve $\varphi, \neg\varphi$ ve ψ formülleridir.

anlaşılmadan $\neg\varphi \vee \psi \iff (\varphi \implies \psi)$ yazabiliriz. Gerçekten formülümüzde en sıkı bağlayan $\neg$ 'dir, kendisinden sonra gelen $\vee$ 'dan daha sıkı bağlar. Bu nedenle $\neg\varphi \vee \psi$ asla $\neg(\varphi \vee \psi)$ olamaz ve $(\neg\varphi \vee \psi)$ olmak zorundadır. $\vee$ ve $\iff$ ikili işlemcilerdir ve $\vee$ imi $\iff$ 'dan daha güçlü bağlamaktadır. Bu nedenle ψ 'yi $\iff$ 'den önce $\vee$ bağlar. Böylece formülümüzün başlangıcı $(\neg\varphi \vee \psi)$ olmak zorundadır. Ancak $\implies$ ve $\iff$ imlerinin bağlama dereceleri aynı olduğu için $\neg\varphi \vee \psi \iff (\varphi \implies \psi)$ 'den artık ayraç atamayız. Benzer biçimde $\vee, \wedge$ imlerinin bağlama dereceleri aynı olduğu için $\varphi \vee \psi \wedge \zeta$ gibi bir ifade tek türlü okunamaz; bununla neyi anlatmak istediğimizi, $\varphi \vee (\psi \wedge \zeta)$ 'nın mı yoksa $(\varphi \vee \psi) \wedge \zeta$ 'nin mi kastedildiğini belirtmek için ayraç kullanmak zorunludur.

Biz sınıflarla da çalışacağımızdan (UzC) aksiyomunu sınıfları da kapsayacak biçimde genişleteceğiz.

(UzCs) : *Asal öğeler ve sınıflar birbirine eşit olamazlar. İki asal öge için eşitlik özdeşlik anlamındadır. A ve B iki sınıf olmak üzere*

$$A = B :\iff \forall x (x \in A \iff x \in B). \quad (2.1)$$

Ancak birinci kısımda (DerC) aksiyomunun bizi açmazlara götürdüğünü öğrendik ve gerçekte bu aksiyomun aşağıdaki gibi olması gerektiğini biliyoruz:.

(DerCs) : *Her $\varphi(x)$ formülümüze karşılık bir Y sınıfı*

$$\forall x (x \in Y \iff \varphi(x)) \quad (2.2)$$

olacak biçimde vardır⁴.

(UzCs)'den dolayı *tek* olarak belirli olan bu Y sınıfını

$$S_\varphi := Y =: \{x \in \tilde{U} \mid \varphi(x)\}$$

veya kısaca

$$S_\varphi := Y =: \{x \mid \varphi(x)\}$$

olarak göstereceğiz. Bu gösterimlerle

$$a \in \{x \mid \varphi(x)\} \iff a \in \tilde{U} \wedge \varphi(a)$$

⁴Bu aksiyom $Y =: S_\varphi$ sınıfının ne zaman bir küme ve ne zaman bir öz sınıf olduğu hakkında hiçbir bilgi vermez. Aksiyomatik Kümeler Kuramında buna benzer bir aksiyomla yola çıktığımızda Y sınıfının ne zaman bir küme olduğunu başka aksiyomlarla belirtmeliyiz.

olduğuna dikkat ediniz. Bu aksiyomlar ve gösterimlerle $\widetilde{U} = \{x \mid x = x\}$ ve $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$ olduğu apaçıktır.

Şimdi bazı temel kavramları A, B sınıflar ve $a, b \in \widetilde{U}$ olmak üzere verelim.

$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$, A ve B 'nin **arakesiti, kesişimi**.

$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$, A ve B 'nin **birleşimi**.

$A \subseteq B :\iff \forall x (x \in A \implies x \in B)$, A, B 'nin **altsınıfıdır**.

$A \subset B :\iff A \subseteq B \wedge A \neq B$, A, B 'nin **öz altsınıfıdır**.

$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$, A 'nın B 'den **farkı**.

$\{a, b\} := \{x \mid x = a \vee x = b\}$, öğeleri a ve b olan **ikilik** küme.

$A \setminus B$ sınıfına B 'nin A 'daki **tümleyen**i de denir. Bu tanımlara göre tüm sınıflar $\widetilde{U}$ evrenimizin altsınıflarıdır.

Bu işlem ve bağıntıların mantık işlemleri ve önermeleriyle ilişkisini kısaca belirtelim. φ ve ψ kuramımızın iki formülü olmak üzere

$$\begin{aligned} S_\varphi &= S_\psi \iff \varphi \equiv \psi \\ S_\varphi \cap S_\psi &= S_{\varphi \wedge \psi} \\ S_\varphi \cup S_\psi &= S_{\varphi \vee \psi} \\ S_\varphi \subseteq S_\psi &\iff (\varphi \implies \psi) \\ S_\varphi \subset S_\psi &\iff (\varphi \implies \psi) \wedge \neg(\varphi \equiv \psi) \\ S_\varphi \setminus S_\psi &= S_{\varphi \wedge \neg \psi} \end{aligned}$$

Bu ilişkiler kümeler kuramının bazı önermelerinin kanıtını bilinen mantık önermelerine indirger.

Cantor'un (DerC), (UzC) ve (Seç) ile çalıştığını, ancak derlediği koleksiyon bir küme olmadığında bunu belirttiğini, orada gerçekte (DerCs)'nin devrede olduğunu biliyoruz. S_φ 'nin bir küme olmayıp bir öz sınıf olduğuna ise genelde bir çelişkiyle karşılaştığımızda karar veriyoruz. Menger [39] makalesinde matematikte bilinen bazı kanıtları tartışır. Örneğin $A := \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ asal}\}$ kümesinin sonsuz olduğunun Öklid tarafından verilen kanıtı şu şekle de sokulabilir. Herhangi bir $B = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq A$ sonlu altkümesi verildiğinde bir $p \in A \setminus B$ bulunur. Her sonlu $B \subseteq A$ için $A \setminus B \neq \emptyset$ olduğundan A sonlu değildir, dd. A sonsuzdur deriz. Benzer biçimde her sayılabilir $X \subseteq \mathbb{R}$ için bir $r \in \mathbb{R} \setminus X$ sayısının varlığını kanıtladığımızda $\mathbb{R}$ kümesinin sayılamaz olduğunu çıkarırız. Menger'in [39] çalışmasından aşağıdaki *yeterli* ölçütü süzebiliriz:

Teorem 2.1.1 (Menger): *Bir X sınıfının ψ özellikli her A altsınıfı için $X \setminus A \neq \emptyset$ ise X sınıfı ψ özelliğine sahip olamaz.*

Sonuç 2.1.2 φ özelliğine sahip öğelerin bir M kümesi nasıl verilirse verilsin, bu özelliğe sahip ve M 'de olmayan bir öğe bulabiliyorsak S_φ bir öz sınıftır.

Kanıt. Gerçekten de X sınıfı ψ özelliğine sahip olsaydı $X \subseteq X$ olduğundan $X \setminus X \neq \emptyset$ olması gerekirdi!

Ekin kanıtı: Şimdi $X := S_\varphi$ bir küme ve $\psi(A)$ ise “ A bir kümedir” olsun. Teoremin koşulları sağlanır. Öyleyse $\neg\psi(X)$, dd. X bir öz sınıftır. ■

Örnek 2.1.3

1. Asal sayılar kümesinin sonsuz olduğunu kanıtlamak isteyelim. X asal sayıların kümesi ve $\psi(A)$ ise “ A sonludur” olsun. $A \subseteq X$ ve A sonlu olsun. A kümesinin öğeleri $p_1, \dots, p_n$ olarak sıralansın.

$$a := p_1 \times \dots \times p_n + 1$$

doğal sayısının ya kendisi asaldır, o zaman $p := a$ olsun, ya da asal değildir ve en az bir p asal çarpanı vardır. Her iki durumda da $p \notin A$, dd. $X \setminus A \neq \emptyset$. Dolayısıyla $\neg\psi(X)$, dd. X sonlu değildir yani sonsuzdur. □

2. Şimdi $\varphi(x)$ önermesi $x \notin x$ olmak üzere $S_\varphi = \{x \mid x \text{ bir küme ve } \varphi(x)\} =: \mathcal{R}$ Russell sınıfının öz sınıf olduğunu Menger yöntemiyle kanıtlayalım. $\psi(A)$ özelliği “ A bir kümedir” olsun. $M \subseteq S_\varphi$ altkümesi keyfi verilsin. $M \in M$ varsayalım. $M \subseteq S_\varphi$ olduğundan $M \in S_\varphi$ olur. Bu bizi $M \in M \wedge M \notin M$ çelişikisine götürür. Öyleyse $M \notin M$, bu nedenle $M \in S_\varphi \setminus M$ ve ekten dolayı S_φ bir öz sınıftır. □

Özel bir altsınıf: $\mathbb{U}$. Araştırmalar matematik için *asal öğelere ve asal öğeler de kullanılarak oluşturulan kümelere gerek olmadığını*, $\tilde{\mathbb{U}}$ evreninin bunlar dışında kalan öğelerinin $\mathbb{U}$ altsınıfının matematik için yeterli olduğunu göstermiştir. Bu savın doğruluğunu göstermek için *tüm matematiksel nesneleri “küme” olarak tanımlayacağız*. Kabaca söylersek $\tilde{\mathbb{U}}$ evreninden asal öğeler ve bir şekilde asal öğelere bulaşmış tüm kümeler, dd. en az bir asal öğeyi içeren kümeler ve bu tür kümelerden birleşim, kartezyen çarpım, güç kümesi gibi küme işlemlerini herhangi bir sıra ve sayıda uygulayarak elde edilen tüm kümeler atıldıktan sonra kalan kısımdır. Örneğin $a, b \in \tilde{\mathbb{U}}$ asal öğelerse bu öğeler ve $\{a\}$, $\{a, \emptyset\}$, $\{\{a\}\}$, $\{a, b, \{\emptyset\}\}$ kümeleri $\mathbb{U}$ 'da değildirler; buna karşın $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$, $\{\emptyset\}$ kümeleri $\mathbb{U}$ 'dadırlar. $\mathbb{U}$ sınıfının iki temel özelliğini vurgulayalım:

1. $x \in \mathbb{U}$ ise x bir kümedir.
2. $x \in \mathbb{U} \wedge y \in x \implies y \in \mathbb{U}$. ($\mathbb{U}$ geçişlidir).

Bu bölümün sonunda, Neumann silsilesi yardımıyla kazanacağımız bir $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{U}$ altsınıfının matematik için yeterli olduğunu öğreneceğiz.

Birleşim ve arakesit sadece iki küme için değil öğeleri küme olan kümeler için, özellikle her $x \in \mathbb{U}$ için de anlamlıdır. Bu tür $\mathcal{A}$ kümelerine **küme aileleri** denir. Her $x \in \mathbb{U}$ ögesinin bir küme ailesi olduğuna dikkat ediniz. $\mathcal{A}$ bir küme ailesi olduğunda

$$\bigcup \mathcal{A} := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A := \{x \mid \exists A \in \mathcal{A} (x \in A)\} \text{ ve}$$

$$\bigcap \mathcal{A} := \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A := \{x \mid \forall A \in \mathcal{A} (x \in A)\}$$

olarak tanımlanır. Bunlar sırasıyla $\mathcal{A}$ ailesinin **birleşimi** ve **arakesiti** (**keşimi**) olarak adlandırılırlar. CKK'de birleşim her zaman, arakesit ise $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ise bir kümedir. $\mathcal{A} = \emptyset$ durumunda $\bigcap \emptyset = ?$ Her x için

$$x \in \bigcap \emptyset \iff \forall A (A \in \emptyset \implies x \in A).$$

$A \in \emptyset$, her A için yanlış olduğundan $A \in \emptyset \implies x \in A$ her x için doğrudur, dolayısıyla sağ yan her x için doğrudur. Bu nedenle sol yan da *her* x için doğrudur. İyi de bu x *öğeleri nerden seçileceklerdir?* Elbette çalıştığımız evrenden. Eğer çalıştığımız evrene kısaca $\mathbb{E}$ dersek elbette $\bigcap \emptyset = \mathbb{E}$ olacaktır. Bu nedenle, şimdilik $\mathbb{E} = \tilde{\mathbb{U}}$ olduğundan, ilk bakışta yadırgansa da $\bigcap \emptyset = \tilde{\mathbb{U}}$! Ancak geleneksel matematikte $\tilde{\mathbb{U}}$ ile çalışılmaz. Genel olarak inceleme alanı olarak bir $\mathbb{E}$ kümesi evren olarak baştan seçilir ve oluşturulan kümelerin bunun altkümeleri olması istenir. Bu durumda $\bigcap \emptyset := \mathbb{E}$ olarak açıklanır.

Bu tanımlarla $A_1, A_2, \dots, A_n$ kümeler olmak üzere

$$\bigcup \{A_1\} = A_1, \bigcap \{A_1\} = A_1 \text{ ve}$$

$$\bigcup \{A_1, A_2\} = A_1 \cup A_2, \bigcap \{A_1, A_2\} = A_1 \cap A_2$$

olduğu apaçıktır. $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ ise

$$A_1 \cap \dots \cap A_n := \bigcap \mathcal{A} = \bigcap \{A_1, \dots, A_n\} \text{ ve}$$

$$A_1 \cup \dots \cup A_n := \bigcup \mathcal{A} = \bigcup \{A_1, \dots, A_n\}$$

olarak tanımlanır.

Her A kümesi için

$$\mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subseteq A\}$$

da bir kümedir ve A kümesinin **güç kümesi** olarak adlandırılır.

Matematikte kullandığımız kümelere ilişkin temel işlemler *arakesit, birleşim, kartezyen çarpım ve güç kümesidir*. Şimdiye kadar karşılaştığımız açmazların bu temel işlemlerle hiçbir ilişkileri yoktur. Kümelerin birleşim, arakesit, kartezyen çarpım ve güç kümelerinin, gerçekten küme olmaları, (DerC) aksiyomunun, bizi çelişkilere götürmeyen, doğrudan sonuçlarıdır. Aslında $\mathbb{U}$ evreninde (DerC) aksiyomunu tam gücüyle kullanmak gerekmez. Her ne kadar bu kitap Aksiyomatik Kümeler Kitabı değilse de, onu hazırlayan bir kitap olduğu için, elimizden geldiğince konuyu sunuş şeklimiz bizi Aksiyomatik Kümeler Kuramına hazırlar nitelikte olacaktır. Her yerde vurgulamasak da bu kitabı aşağıdaki aksiyomlar üzerine kuracağız:

- **(UzCs):** *Asal öğeler ve sınıflar birbirine eşit olamazlar. İki asal öğe için eşitlik özdeşlik anlamındadır. A ve B iki sınıf olmak üzere*

$$A = B : \Longleftrightarrow \forall x (x \in A \Longleftrightarrow x \in B).$$

- **(DerCs):** *Her $\varphi(x)$ formülümüze karşılık bir Y sınıfı*

$$\forall x (x \in Y \Longleftrightarrow \varphi(x))$$

olacak biçimde vardır.

- **(DerZ)** *X bir küme ve φ kuramımızın bir formülü ise $\{x \in X \mid \varphi(x)\}$ de bir kümedir.*
- **(Çift)** *Her $x, y \in \tilde{\mathbb{U}}$ için $\{x, y\}$ de bir kümedir.*
- **(Bir)** *X öğeleri küme olan bir kümeysse $\bigcup X$ de bir kümedir⁵.*
- **(Küç)** *Bir kümenin alt çoklukları da bir kümedir.*
- **(Güç)** *X bir küme ise $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$ de bir kümedir.*
- **(Soz*)** *$\mathbb{N}$ bir kümedir.*
- **(Yer)** *X bir küme, Y bir sınıf ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyonsa X kümesinin f altındaki resmi de bir kümedir.*
- **(Seç)** *X boş kümeyi içermeyen bir küme ailesi ise her $x \in X$ için $f(x) \in x$ koşulunu sağlayan bir $f : X \rightarrow \bigcup X$ fonksiyonu vardır.*

⁵ $X \in \mathbb{U}$ ise bu koşul hep sağlanır.

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümemizdense sadece (II.3)'te verilen Peano Aksiyomlarını sağlamasını isteyeceğiz. Yine de şimdiden oradan kazanılan sıralamasını ve bu sıralamanın iyi sıralama olduğunu kullanmakta bir sakınca görmeyeceğiz. Aksiyomatik Kümeler Kuramında (Soz*) aksiyomunu (Soz) (II.19) diyeceğimiz bir başka aksiyomla değiştireceğiz. Bu aksiyom bize doğal sayılarımızı tüm bu özellikleriyle veren bir aksiyom olacaktır.

A ve B iki küme ise (Çift)'ten dolayı $X := \{A, B\}$ bir küme, (Bir)'den dolayı ise $\bigcup X = A \cup B$ bir kümedir. Yine A bir küme olduğundan (DerZ) ile

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\} \text{ ve } A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

birer kümedirler. İki kümenin birleşimi de bir küme olduğundan X bir öz sınıfta her A kümesi için $X \setminus A$ da bir öz sınıftır. Özellikle her A kümesi için $\tilde{U} \setminus A$ bir öz sınıftır. $\mathcal{A}$ bir küme ailesi ise (Bir)'den dolayı $\bigcup \mathcal{A}$ bir kümedir. Ayrıca $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ve $A \in \mathcal{A}$ ise (DerZ) ile

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x \in A \mid \forall X \in \mathcal{A} (x \in X)\}$$

de bir kümedir. $\mathbb{N}$ bir küme olduğundan (DerZ) ile $\emptyset = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq x\}$ de bir kümedir.

Uzlaşma: Şimdilik $\tilde{U}$ evreninde çalışıyoruz. İlerde U 'da çalışacağız, daha sonra ise $\mathbb{V}$ evreniyle tanışacağız. Eğer çalıştığımız evren $\mathbb{E}$ ise $\{x \mid \varphi(x)\}$ ifadesinin anlamı $\{x \mid x \in \mathbb{E} \wedge \varphi(x)\}$ olacaktır. $\mathbb{E}$ 'de çalışırken $\forall x$ ve $\exists x$ niceleyicilerinin x değişkeni değerlerini elbette $\mathbb{E}$ evreninde alır. $A \subseteq \mathbb{E}$ olduğunda aşağıdaki kısıtlanmış niceleyicileri de kullanacağız:

$$\forall x \in A \varphi(x) : \Longleftrightarrow \forall x (x \in A \implies \varphi(x)).$$

$$\exists x \in A \varphi(x) : \Longleftrightarrow \exists x (x \in A \wedge \varphi(x)).$$

Şimdi evrenimiz bir $\mathbb{E}$ sınıfı olsun ve tüm inceleyeceğimiz kümeler $\mathbb{E}$ sınıfının altkümeleri olsunlar. Bu durumda $A \subseteq \mathbb{E}$ için $\mathbb{E} \setminus A$ yerine kısaca A^c yazacağız ve buna kısaca A kümesinin **tümleyeni** diyeceğiz.

Tümleyen Kuralları: $A \subseteq \mathbb{E}, B \subseteq \mathbb{E}, \mathcal{A}$ bir küme ve her $A \in \mathcal{A}$ için $A \subseteq \mathbb{E}$ olmak üzere

1. $\emptyset^c = \mathbb{E}, \mathbb{E}^c = \emptyset, (A^c)^c = A.$
2. $A \subseteq B \Longleftrightarrow B^c \subseteq A^c.$
3. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (**De Morgan Kuralları**)
4. $(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A)^c = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^c, (\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A)^c = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^c$ (**Genel De Morgan Kuralları**).

Problemler: A, B, C sınıflar olmak üzere:

Problem 2.1.1 $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$ kümesinin

1. Hiçbir öge içermediğini,
2. Her A sınıfının altkümesi olduğunu,
3. Bu iki özellikten her birinin bu kümeyi tek olarak belirlediğini gösteriniz.

Problem 2.1.2 Her $a, b \in \tilde{U}$ için $\{a\} := \{x \mid x = a\}$ olmak üzere

1. $\{a, b\} = \{b, a\}$,
2. $\{a, a\} = \{a\}$,
3. $a \in A \iff \{a\} \subseteq A$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.1.3 Arakesit Özellikleri: Her A, B ve C kümeleri için

1. $A \cap B = B \cap A$,
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$,
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$,
4. $A \cap A = A$ ve $A \subseteq B \iff A \cap B = A$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.1.4 Birleşim Özellikleri:

1. $A \cup B = B \cup A$,
2. $A \cup \emptyset = A$,
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$,
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.1.5 Dağılım Özellikleri:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ve
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.1.6 Her A kümesi için $A \cup B = A$ ise $B = \emptyset$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.1.7 *Tümleyen kurallarını kanıtlayınız.*

Problem 2.1.8 $A \setminus B = A \cap B^c$.

Problem 2.1.9 $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ olmak üzere

1. $A \Delta B = B \Delta A$, $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$
2. $A \Delta \emptyset = A$ ve $A \Delta A = \emptyset$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.1.10 A kümesi sırasıyla $\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}$ olduğunda $\mathcal{P}(A)$ kümesini bulunuz.

Problem 2.1.11 A kümesi n ögesi ise $\mathcal{P}(A)$ kümesinin 2^n ögesi olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.1.12 A ve B kümeler olmak üzere

1. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ ve
2. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ olduğunu kanıtlayınız. İkinci önermede $\subset$ olabileceğini örnekleyiniz.

Problem 2.1.13 E bir küme ve $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(E)$ olmak üzere

1. $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\bigcap \mathcal{A})$ ve
2. $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(\bigcup \mathcal{A})$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.1.14 *Menger yöntemini kullanarak*

1. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin sonsuz olduğunu,
2. $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$ ve $\tilde{\mathcal{U}}$ sınıflarının öz sınıf olduklarını kanıtlayınız.

2.2 BAĞINTILAR VE FONKSİYONLAR

a ve b evrenimizde iki öge olmak üzere (a, b) sıralı ikilileri temel kavramlardandır⁶. Genelde (a, b) gibi bir ifadeye **sıralı ikili** der ve aralarında eşitliği

$$(a, b) = (c, d) :\Longleftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$$

⁶Kümeler kuramı kitaplarında (a, b) yerine artan biçimde $\langle a, b \rangle$ gösterimi kullanılmaktadır.

ile tanımlarız. Ancak bizim için sıralı ikililerin nasıl tanımlandıkları önemli değildir, önemli olan nasıl tanımlanmış olurlarsa olsunlar bu tanımın yukarıdaki koşulu sağlamasıdır. Amacımız doğrultusunda (a, b) 'yi bir küme olarak tanımlayacak ve bu koşulun sağlamasını garanti edeceğiz. Bunları sağlayan tanımlardan en çok benimsenen tanım, Kuratowski'nin

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\} \text{ sıralı ikili}$$

tanımıdır. Bu tanımda (a, b) bir kümedir ve yukarıdaki istenen koşulu sağlar. $(a, b) = (b, a) \iff a = b$ olduğu, dd. $(a, b) \neq (b, a) \iff a \neq b$ olduğu apaçıktır. A, B sınıfları için

$$A \times B := \{x \mid x = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B\}.$$

sınıfına A ve B sınıflarının **kartezyen çarpımı** denir. A ve B birer kümeysse $A \cup B$ bir küme, ardından iki kez (Güç) kullanırsak $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ bir küme olur. Buradan da (DerZ) 'den dolayı

$$A \times B = \{(a, b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

de bir kümedir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için A_n sınıfları ve $a_n \in \tilde{U}$ öğeleri verilmiş olsunlar.

$$\begin{aligned} \{a_1\} &= \{x \mid x = a_1\} = \{a_1, a_1\}, \\ \{a_1, \dots, a_{n+1}\} &:= \{a_1, \dots, a_n\} \cup \{a_{n+1}\}. \\ (a_1) &:= a_1, \\ (a_1, a_2) &:= \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\} \text{ ve } n \geq 2 \text{ için} \\ (a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) &:= ((a_1, \dots, a_n), a_{n+1}) \end{aligned}$$

ve her $n \geq 1$ doğal sayısı için

$$A_1 \times \dots \times A_n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}.$$

$A = A_1 = \dots = A_n$ özel durumunda ise

$$A^n := A_1 \times \dots \times A_n.$$

Bu tanımlarla $n \geq 2$ için

$$A_1 \times \dots \times A_{n+1} = (A_1 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1}$$

olduğu aşıkardır. Daha önce öğrendiklerimizden $\{a_1, \dots, a_n\}$, $(a_1, \dots, a_n)$ ve $A_1, \dots, A_n$ kümelerse $A_1 \times \dots \times A_n$ 'nin de birer küme olduğu aşıkardır. Burada önemli olan tüm bağıntıları bilmek için *iki* sınıfın kartezyen çarpımını bilmenin yeterli olduğudur. Bundan ileride yararlanacağız. Ayrıca

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \iff a_1 = b_1 \wedge \dots \wedge a_n = b_n$$

olduğu kolayca gösterilir.

Not 2.2.1 Hemen hemen hiçbir okurun ve meslektaşlarımın çoğunluğunun, rastlantı eseri ciddi bir kümeler kuramı dersi almamış veya bu konuyla ciddi olarak ilgilenmemiş ise, $(a_1, \dots, a_{n+1})$ ve $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ için tümevarımla yukarıda verilen tanımlara bir itirazları olacağını sanmıyorum. Bana da böyle öğretildi, ben de böyle öğrettim. Ancak yine de bunlar gerçekte tanım değillerdir. Bunlar tanımların elenebilirlik koşuluna uymazlar. Bunları kusursuz tanımlara dönüştürmeyi deneyiniz. (II.4)'te bunları ayrıntılı tartışacağız. $\square$

$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ ise R bir **n-li** (n basamaklı, n yerli) **bağıntıdır** denir. $R \subseteq A^n$ ise R , **A'da bir n-li bağıntıdır** denir ve

$$(a_1, \dots, a_n) \in R \text{ yerine } R(a_1, \dots, a_n)$$

de yazılır. İkili bağıntılar çok önemlidir. R 'nin A 'da bir ikili bağıntı olması durumunda

$$(x, y) \in R \text{ yerine } xRy \text{ ve } (xRy \wedge yRz) \text{ yerine } xRyRz$$

de yazacağız.

Biz özellikle $R \subseteq A \times B$ ikili bağıntılarıyla ilgileneceğiz ve bundan sonra onlardan kısaca A 'dan B 'ye *bağıntılar* olarak söz edeceğiz. Özel olarak $A = B$, dd. $R \subseteq A \times A$ ise R , **A sınıfında bir bağıntıdır** diyeceğiz.

Tanım 2.2.2 A, B ve C sınıflar olsunlar. $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ ve $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$ olmak üzere

1. $\text{tan}R := \{x \in A \mid \exists y \in B (xRy)\}$, (R 'nin **tanım bölgesi**)
2. $\text{res}R := \{y \in B \mid \exists x \in A (xRy)\}$, (R 'nin **resim bölgesi**)
3. $R^{-1} := \{(y, x) \mid xRy\}$, R 'nin **tersi**
4. $R[X] := \{y \mid \exists x \in X (xRy)\}$, (X sınıfının R altında **resmi**)
5. $R^{-1}[Y] := \{x \mid \exists y \in Y (xRy)\}$, (Y sınıfının R altında **ters resmi**)
6. $R|X := R \cap (X \times A)$, ayrıca $A = B$ ise $R||X := R \cap (X \times X)$, (R 'nin sırasıyla X 'e **tanım bölgesi** ve **alan** olarak **kısıtlanması**)
7. $S \circ R := \{(x, z) \mid \exists y \in Y (xRy \wedge ySz)\}$, (S ve R nin **bileşimi**) denir.

Not 2.2.3 R , A sınıfından B sınıfına bir bağıntı ise R^{-1} , B sınıfından A sınıfına bir bağıntıdır. Y 'nin R altında ters resmi ise Y 'nin R^{-1} altında resminden başka bir şey değildir. $\square$

Önerme 2.2.4 *Sıralı ikililerden oluşan herhangi bir R kümesi verildiğinde A ve B kümeleri $R \subseteq A \times B$ olacak biçimde vardır.*

Kanıt. $x = (a, b) \in R$ ise $x = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ olduğundan $\{a\}, \{a, b\} \in R^* := \bigcup R = \bigcup_{x \in R} x$ olur. Bu nedenle $a, b \in R^{**} := \bigcup R^*$ olur. R bir küme olduğundan R^* bir kümedir ve R^* bir küme olduğundan R^{**} bir kümedir. Bu nedenle $A := \{a \in R^{**} \mid \exists b \in R^{**} (a, b) \in R\}$ ve $B := \{b \in R^{**} \mid \exists a \in R^{**} (a, b) \in R\}$ olarak alırsak $(\text{Der}Z)$ 'den A ve B 'nin kümeler olduğu ve $R \subseteq A \times B$ 'nin sağlandığı kolayca görülür. ■

Tanım 2.2.5 A, B sınıfları ve $F \subseteq A \times B$ bağıntısı verilsin.

1. Her $(a, b), (a, c) \in A \times B$ için

$$(a, b) \in F \wedge (a, c) \in F \implies b = c \quad (2.3)$$

sağlanmışsa F bir **fonksiyondur** denir. Ayrıca $\text{tan}F = A$ ise F , A sınıfından B sınıfına bir **fonksiyondur** denir ve bu $F : A \longrightarrow B$ veya $A \xrightarrow{F} B$ ile gösterilir.

2. F bir fonksiyon ve $(a, b) \in F$ ise $F(a) := b$ olarak tanımlanır; b 'ye a 'nın F altındaki **resmî** veya F 'nin a 'daki **değeri** denir.
3. ${}^A B := \{f \mid f \text{ bir küme ve } f : A \longrightarrow B\}$ ile A sınıfından B sınıfına tanımlı tüm küme olan fonksiyonların sınıfı gösterilir⁷.
4. $F : A \longrightarrow B$ bir fonksiyon ve $\text{res}F = B$ ise F fonksiyonu **örtendir** veya f , B **üzerine** bir fonksiyondur denir.
5. $F : A \longrightarrow B$ ve tanım bölgesindeki her x, y için $F(x) = F(y) \implies x = y$ ise F fonksiyonu **birebirdir** denir. Örtten ve birebir fonksiyonlara kısaca **tameşlemeler** denir.

CKK'da bizi ${}^A B$ sadece A ve B 'nin kümeler olduğu durumda ilgilendirir. Bu durumda $A \times B$ ve onun tüm alt sınıfları da bir kümedir. Öyleyse A ve B küme iseler her $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonu da bir kümedir. $A \times B$ bir küme olduğunda $A \times B$ ve dolayısıyla $\mathcal{P}(A \times B)$ birer kümedirler. ${}^A B \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$ olduğundan şu sonuca ulaşırız: A ve B küme iseler ${}^A B$ de bir kümedir.

Uzlaşma: Birebir, örtten ve tameşlemeler için sırasıyla

$$\mapsto, \rightarrow, \rightrightarrows$$

⁷Eski kaynaklarda ${}^A B$ yerine B^A gösrerimi yaygındır.

oklarını kullanacağız. Bir fonksiyonun gösteriminde hiçbir şey söylemeden bu okları kullandığımızda o fonksiyonların birebir, örten veya tameşleme olduğunu belirtmiş oluruz. Fonksiyonlar için bazen

$$F : A \longrightarrow B \ (x \rightsquigarrow F(x))$$

gösterimini de kullanacağız. Örneğin

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ (x \rightsquigarrow 2x^3 - 1)$$

yazdığımızda kastedilen

$$F = \{(x, 2x^3 - 1) \mid x, 2x^3 - 1 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

fonksiyonu olacaktır.

Tanımlardan elbette

$$F : A \longrightarrow B \iff \text{tan} F = A \wedge \forall x \in A \exists! y \in B ((x, y) \in F).$$

$F : A \longrightarrow B$ ise her $X \subseteq A$ için $F|X : X \longrightarrow B$ olduğu apaçıktır; $F|X$ fonksiyonuna F fonksiyonunun X sınıfına **kısıtlanması** denir.

Her şeyden önce $\emptyset$ bir bağıntıdır hatta her B sınıfı için $\emptyset : \emptyset \longrightarrow B$ bir fonksiyondur. Buna karşın $A \neq \emptyset$ ise bir $F : A \longrightarrow \emptyset$ fonksiyonu yoktur! Bu durumda $\emptyset \neq \emptyset$ ancak $A \neq \emptyset$ ise ${}^A\emptyset = \emptyset$ olur! A ve B sınıflar olmak üzere $A \times B$ bir bağıntıdır ve $(A \times B)^{-1} = B \times A$. $I_A := \{(x, x) \mid x \in A\}$ bağıntısı A sınıfındaki **özdeşlik** bağıntısıdır; gerçekte $I_A : A \longrightarrow A$ bir fonksiyondur, A sınıfının **özdeşlik fonksiyonu** olarak adlandırılır ve her $x \in A$ için $I_A(x) = x$.

A ve B boş olmayan sınıflarsa

$$p_1 : A \times B \twoheadrightarrow A \text{ ve } p_2 : A \times B \twoheadrightarrow B$$

örten **izdüşüm fonksiyonları**

$$p_1 := \{((x, y), x) \mid (x, y) \in A \times B\} \text{ ve } p_2 := \{((x, y), y) \mid (x, y) \in A \times B\}$$

olarak verilmişlerdir. Yukarıdaki uzlaşmadan dolayı

$$p_1 : A \times B \twoheadrightarrow A \ ((x, y) \rightsquigarrow x) \text{ ve } p_2 : A \times B \twoheadrightarrow B \ ((x, y) \rightsquigarrow y)$$

de yazabiliriz.

Burada ve ileride de n değişkenli bir f fonksiyonun $(x_1, \dots, x_n)$ 'deki değerini $f((x_1, \dots, x_n))$ yerine yalın biçimde $f(x_1, \dots, x_n)$ ile göstereceğiz. Bu uzlaşmayla $p_1(x, y) = x$ ve $p_2(x, y) = y$ olur.

X ve Y iki küme ve $R \subseteq X \times Y$ bir bağıntı olsun. Bu bağıntı her $A \subseteq X$ kümesine *tek* olarak belirli bir $R[A] \in \mathcal{P}(Y)$ ve her $B \subseteq Y$ kümesine *tek* olarak belirli bir $R^{-1}[B] \in \mathcal{P}(X)$ kümesi karşılık getirir. Dolayısıyla bu R bağıntısı, karışıklığa yol açmayacağını umarak yine R ve R^{-1} ile göstereceğimiz

$$R : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \text{ ve } R^{-1} : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

fonksiyonlarını tanımlar. Şimdi bu fonksiyonların önemli özelliklerini verelim.

Teorem 2.2.6 $R \subseteq X \times Y$ ise her $A, B \in \mathcal{P}(X)$ her $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ için:

1. $R[\emptyset] = \emptyset$.
2. $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$, $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$.
3. $R[A] \setminus R[B] \subseteq R[A \setminus B]$, $R[\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A] = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} R[A]$.
4. $R[\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A] \subseteq \bigcap_{A \in \mathcal{A}} R[A]$.

Kanıt. Ödev. ■

R^{-1} de bir bağıntı olduğundan bu teoremden $A, B \in \mathcal{P}(Y)$ ve $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ olmak üzere R gördüğümüz her yerde R^{-1} yazarak elde ettiğimiz teorem de doğrudur. Bunlar özellikle bir $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu için doğrudurlar. Ancak $f : X \longrightarrow Y$ durumunda $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ fonksiyonunun özellikleri daha da güzeldir.

Teorem 2.2.7 $f : X \longrightarrow Y$ ise her $A, B \in \mathcal{P}(Y)$ her $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ için:

1. $f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B] = f^{-1}[A \setminus B]$, özellikle $X \setminus f^{-1}[A] = f^{-1}[Y \setminus A]$.
2. $f^{-1}[\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A] = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} f^{-1}[A]$.
3. $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ise $f^{-1}[\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A] = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} f^{-1}[A]$.

Kanıt. Ödev. ■

Teorem 2.2.8 $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$ ve $T \subseteq C \times D$ bağıntılar olmak üzere:

1. $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.
2. $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.
3. $(R^{-1})^{-1} = R$.

4. $X \subseteq A$ ise $(S \circ R)[X] = S[R[X]]$.

5. R ve S fonksiyonlarsa $S \circ R$ de bir fonksiyondur.

Kanıt. Ödev. ■

A ve B sınıflar olmak üzere $F : A \longrightarrow B$ fonksiyonu verilsin. $F^{-1} \subseteq B \times A$ bağıntısının B sınıfından A sınıfına bir fonksiyon tanımlaması için her şeyden önce $\text{tan}F^{-1} = B$ olması gerekir. $\text{res}F = \text{tan}F^{-1}$ olduğundan F örten olmalıdır. Ayrıca F^{-1} için (2.2.5)(1) sağlanmalıdır, dd. $(z, x), (z, y) \in F^{-1} \implies x = y$, dd. $(x, z), (y, z) \in F \implies x = y$. Ancak F bir fonksiyon olduğundan bu tam da $F(x) = z = F(y) \implies x = y$ anlamına gelir ve F fonksiyonun birebir olması gerektiğini söyler. Özetle F^{-1} bağıntısının B sınıfından A sınıfına bir fonksiyon tanımlaması için F fonksiyonunun bir tameşleme olması gereklidir. Bunun yeterli olduğu da apaçıktır. $F : A \longrightarrow B$ bir tameşleme ise $F^{-1} : B \longrightarrow A$ de bir tameşlemedir. A ve B kümeler olduğunda F ve F^{-1} çift anlamlı kullanılmaktadır: $F : A \longrightarrow B$ ve $F : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$, benzeri F^{-1} için geçerlidir. Ancak bu kullanım hiçbir zaman sorun yaratmamıştır.

Tanım 2.2.9 R , A sınıfında bir bağıntı olmak üzere:

1. R **yansımalıdır** : $\iff \forall x \in A (xRx)$.
2. R **yansımazdır** : $\iff \forall x \in A (\neg xRx)$.
3. R **bakışımıdır** : $\iff \forall x, y \in A (xRy \implies yRx)$.
4. R **ters bakışımıdır** : $\iff \forall x, y \in A (xRy \wedge yRx \implies x = y)$.
5. R **geçişlidir** : $\iff \forall x, y, z \in A (xRy \wedge yRz \implies xRz)$.
6. R **bağlantılıdır** : $\iff \forall x, y \in A (xRy \vee x = y \vee yRx)$.
7. Yansımali, bakışimli ve geçişli olan bağıntılara **denklik bağıntıları** denir.

$B \subseteq A$ olmak üzere $R|B$ yansımali, yansımaz, bakışimli vb. ise R , B 'de yansımalıdır, yansımazdır, bakışımıdır vb. ... denir.

Uyarı: Bir bağıntıya “yansımali değilse yansımazdır” demediğimize dikkat ediniz. Gerçekten de

$$R \text{ yansımali değildir. } \iff \exists x \in A (\neg xRx).$$

Bu ise genelde (2.2.9)(2)'den farklıdır.

Tanım 2.2.10 *A sınıfında bir R bağıntısı verilsin. R bağıntısı yansımaz ve geçişli ise A 'da bir **(yansımaz kısmi) sıralama bağıntısıdır** denir. Eğer R bağıntısı yansımaz, geçişli ve bağlantılı ise buna A sınıfında bir **(yansımaz) doğrusal sıralama** denir. Eğer R bağıntısı yansımali, ters bakışimli ve geçişli ise A sınıfında bir **yansımali (kısmi) sıralama bağıntısıdır** denir. Ayrıca bağlantılı olan yansımali (kısmi) sıralamalara **yansımali doğrusal sıralamalar** denir⁸.*

R bağıntısının yansımali olması $I_A \subseteq R$ ile eş anlamlı, yansımaz olması ise $R \cap I_A = \emptyset$ ile eş anlamlıdır. Bu nedenle A kümesinde herhangi bir R ikili bağıntısı verildiğinde buradan kolayca $\underline{R} := R \cup I_A$ yansımali ve $R^- := R \setminus I_A$ yansımaz bağıntılarına geçilebilir. Bu geçişler standarttır ve R yansımaz bir bağıntı ise $(\underline{R})^- = R$ ve eğer R yansımali bir bağıntı ise $(R^-) = R$ olduğu apaçıktır. Örneğin $\mathbb{N}$ kümesinde R bağıntısı $\leq$ yansımali doğal sıralama bağıntısı ve S ise $<$ yansımaz doğal sıralama olsun. Bu durumda $R^- = S$ ve $\underline{S} = R$. Bu nedenle ister $<$ benzeri ister $\leq$ benzeri bağıntılardan yola çıkalım diğere geçiş bellidir. Kısmi sıralama kavramında bir fikir birliği yoktur. Kimi yazarlar bundan yansımaz ve geçişli bağıntıları anlarlar, ki biz de bunu anlayacağız, kimileri ise yansımali, ters bakışimli ve geçişli bağıntıları anlarlar.

Bundan sonra $<$ ile herhangi bir R yansımaz kısmi sıralamasını göstereceğiz. Bu sıralamaya ilişkin $\underline{R}$ yansımali kısmi sıralamasını ise $\leq$ ile göstereceğiz. Eğer bir yansımali S kısmi sıralamasından yola çıkmışsak bunu $\leq$ ile göstereceğiz ve buna ilişkin yansımaz S^- sıralamasını ise $<$ ile göstereceğiz. Bu durumda hangisinden yola çıkmış olursak olalım $<$ ve $\leq$ imlerini bir arada kullandığımızda aralarında daima

$$x \leq y \iff x < y \vee x = y$$

geçerli olacaktır. $\neg(x < y)$ yerine bazen kısaca $x \not< y$ yazacağız.

Tanım 2.2.11 *X sınıfında bir R yansımaz kısmi sıralama bağıntısı verilsin. $A \subseteq X$ bir alt sınıf ve $y \in X$ olsun. y ögesi R bağıntısına göre A alt sınıfının*

1. bir **üst sınırıdır** : $\iff \forall a \in A (a = y \vee aRy) \iff \forall a \in A a\underline{R}y$,
2. bir **öz üst sınırıdır** : $\iff \forall a \in A aRy \iff ARy$,
3. bir **alt sınırıdır** : $\iff \forall a \in A (y = a \vee yRa) \iff \forall a \in A y\underline{R}a$,

⁸Ayraç içindeki sözcükleri, vurgulama gerekmedikçe kullanmayacağız.

4. bir **öz alt sınırdır** : $\Longleftrightarrow \forall a \in A \ yRa \Longleftrightarrow yRA$,
5. bir **büyük (maksimal) ögesidir**: $\Longleftrightarrow y \in A \wedge \forall a \in A \neg(yRa)$,
6. bir **küçük (minimal) ögesidir**: $\Longleftrightarrow y \in A \wedge \forall a \in A \neg(aRy)$,
7. en **büyük ögesidir (maksimumudur)** : $\Longleftrightarrow y \in A \wedge \forall a \in A (a \neq y \implies aRy)$,
8. en **küçük ögesidir (minimumudur)** : $\Longleftrightarrow y \in A \wedge \forall a \in A (a \neq y \implies yRa)$,
9. en **küçük üst sınırdır (supremumudur)**: $\Longleftrightarrow y, A$ 'nın üst sınırları sınıfının en küçük ögesidir,
10. en **küçük öz üst sınırdır (öz supremumudur)**: $\Longleftrightarrow y, A$ 'nın öz üst sınırlarının sınıfının en küçük ögesidir,
11. en **büyük alt sınırdır (infimumudur)**: $\Longleftrightarrow y, A$ 'nın alt sınırlarının sınıfının en büyük ögesidir,
12. en **büyük öz alt sınırdır (öz infimumudur)**: $\Longleftrightarrow y, A$ 'nın öz alt sınırları sınıfının en büyük ögesidir denir.

Eğer varlarsa A sınıfının en büyük ögesi $\max_R A$, en küçük ögesi $\min_R A$, supremumu $\sup_R A$, öz supremumu $\sup_R^+ A$, infumumu $\inf_R A$ ve öz infumumu $\inf_R^+ A$ ile gösterilir. İncelemede R belli olduğunda genelde yalın olarak $\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$, $\sup^+ A$, $\inf^+ A$ yazacağız. $\sup_R^+ A$ ve $\sup^+ A$ formüllerde

$$\sup_R^+ A \text{ ve } \sup^+ A$$

olarak görünecektir.

Not 2.2.12

1. Elbette bunlardan bazıları olabileceği gibi hiçbiri de olmayabilir. Örneğin $X = \mathbb{Z}$ ve R ise tam sayılardaki doğal sıralama ise $A = \mathbb{Z}$ kümesinin üst ve alt sınırları, en büyük ve en küçük ögeleri, supremum ve infumumları da yoktur.
2. Örneğin $X = \mathbb{N}$ ve $R = <$ doğal sıralama olsun. $A = \{3, 5\}$ ise $\sup A = 5$, $\sup^+ A = 6$, $\inf A = 3$, $\inf^+ A = 2$.

3. a, b, c, d, e, f farklı öğeler, $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ olmak üzere
 $R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e), (c, d), (f, f)\}$
olsun. $A = \{b, c\}$, $B = \{e, f\}$, $C = \{f\}$ olsun. $\max A = c = \sup A$,
 $\sup^+ A = d$, $\min A = b = \inf A$, $\inf^+ A = a$, B kümesinin hiçbir
türden alt ve üst sınırları, dolayısıyla hiçbir türden supremum ve in-
fimumları olmadığı gibi en büyük ve en küçük öğeleri de yoktur.
 $\max C = \min C = \sup C = \inf C = f$, ancak $\sup^+ C$ ve $\inf^+ C$ yok-
tur. $\square$

Özellikle analizde $\leq$ yansımali kısmi sıralamalarıyla çalışırız ve orada

$y \in X$, A için bir alt sınırdır : $\Longleftrightarrow \forall a \in A \ y \leq a$ ve

$y \in X$, A için bir üst sınırdır : $\Longleftrightarrow \forall a \in A \ a \leq y$.

Bir $a \in A$ öğesinin bu A kümesinin bir küçük öğesi olması, A kümesinde a öğesinden daha küçük öğe olmaması demektir. Bu a öğesinin A kümesinin en küçük öğesi olması ise bu öğenin A kümesinin tüm diğer öğelerinden daha küçük olması demektir. Benzeri belirlemeleri büyük ve en büyük öğeler için yapınız.

Not 2.2.13 Denklik bağıntılarıyla sıkça karşılaşırız ve bunlar çok önemlidir. R , X sınıfında bir denklik bağıntısı olmak üzere her $y \in X$ için

$$[y]_R := \{x \in X \mid xRy\} = \{x \in X \mid yRx\}$$

sınıfına y öğesinin R bağıntısına göre denklik sınıfı denir. Son eşitlik R bakışımli olduğu için doğrudur.

Şimdi ayrıca X bir küme olsun. $\mathcal{P}_R := \{[x]_R \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ailesinin şu üç özelliği vardır: Her $[x]_R, [y]_R \in \mathcal{P}_R$ için

- i) $[x]_R \neq \emptyset$.
- ii) $[x]_R \neq [y]_R \implies [x]_R \cap [y]_R = \emptyset$.
- iii) $X = \bigcup \mathcal{P}_R$.

Ayrıca

$$(ii) \Longleftrightarrow ([x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset \implies [x]_R = [y]_R)$$

olduğu aşikardır. Bu üç özelliğe sahip bir $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ailesine X kümesinin bir **parçalanışı** denir; başka sözlerle $\mathcal{A}$ boş kümeyi içermeyecek, $\bigcup \mathcal{A} = X$ olacak ve son olarak $\mathcal{A}$ bir ayrık aile olacaktır. $\mathcal{A}$ ailesinin **ayrık** olması ise A ve B bu aileye ait herhangi iki farklı kümeysen $A \cap B = \emptyset$ olması demektir. Bir X kümesindeki her R denklik bağıntısı, X kümesinin bir $\mathcal{P}_R := \{[x]_R \mid x \in X\}$ parçalanmasını verir ve tersine X kümesindeki her $\mathcal{A}$ parçalanması ise

$$xR_A y \Longleftrightarrow \exists A \in \mathcal{A} (x \in A \wedge y \in A)$$

ile açıklanan bir $R_{\mathcal{A}}$ denklik bağıntısı verir. $R_{\mathcal{P}_R} = R$ ve $\mathcal{P}_{R_{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}$ olduğu kolayca görülür. Böylece X kümesindeki denklik bağıntıları ve parçalanmalar birlerini karşılıklı olarak belirlerler. $\square$

Birleşimlerin gösterimlerinde aşağıdaki uzlaşmayı yapacağız:

A ve B ayrıkça $A \cup B$ yerine $A \sqcup B$

$\mathcal{A}$ bir ayrık aileleyse $\bigcup \mathcal{A}$ yerine $\bigsqcup \mathcal{A}$

yazacağız. Hiçbir şey söylemeden bu imleri kullandığımızda söz konusu kümelerin veya ailenin ayrıklığı kendiliğinden anlaşılacaktır.

$\mathcal{P}_R$ uzayı genel olarak X/R ile gösterilir ve bu kümeye X kümesinin R denklik bağıntısına göre **bölüm uzayı** denir. X kümesinden X/R kümesine her x için $q(x) := [x]_R$ ile tanımlanan doğal bir fonksiyon vardır. Bu $q : X \twoheadrightarrow X/R$ örten fonksiyonuna **bölüm fonksiyonu** veya **bölüm dönüşümü** denir. q fonksiyonunun R bağıntısı ile ilişkisini vurgulamak istersek q yerine q_R yazacağız.

Bir Fonksiyonun Doğal Parçalanışı: Herhangi bir $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu verilsin. Her $y \in B$ için

$$A_y^f := f^{-1}[\{y\}] = \{x \in A \mid f(x) = y\}$$

kümesine f fonksiyonunun y üzerindeki **sapı** denir. Bu sapların $\mathcal{S} = \{A_y^f \mid y \in \text{res } f\}$ ailesi, f örtense, A kümesinin bir parçalanışdır ve A kümesinde bir R denklik bağıntısı tanımlar. Her $x_1, x_2 \in A$ için

$$x_1 R x_2 :\iff f(x_1) = f(x_2).$$

Bu nedenle her $x \in A$ için $\bar{f}([x]_R) := f(x)$ ile bir $\bar{f} : A/R \rightarrow f[A]$ tameslemesi tanımlanır. $i : f[A] \hookrightarrow B$ birebir dönüşümü ise $i(y) := y$ ile tanımlanmış doğal gömme olmak üzere

$$A \xrightarrow{q} A/R \xrightarrow{\bar{f}} f[A] \xrightarrow{i} B \quad \text{ve} \quad f = i \circ \bar{f} \circ q$$

doğal parçalanışını elde ederiz.

Küme Aileleri: I, E iki küme ve $f : I \rightarrow \mathcal{P}(E)$ bir fonksiyon olsun. $i \in I$ için $A_i := f(i)$ yazarsak, (Yer)'den dolayı $f[I] = \{A_i \mid i \in I\}$ bir kümedir. $f[I]$ kümesine E 'de bir **küme ailesidir** denir. Bu aile bazen

$\{A_i\}_{i \in I}$ olarak da gösterilir ve aşağıdaki gösterimler yaygındır:

$$\begin{aligned}\bigcup_{i \in I} A_i &:= \bigcup f[I] = \{x \mid \exists i \in I (x \in A_i)\} \\ \bigcap_{i \in I} A_i &:= \bigcap f[I] = \{x \mid \forall i \in I (x \in A_i)\}, (I \neq \emptyset) \\ \prod_{i \in I} A_i &:= \{f \mid f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \text{ ve her } i \in I \text{ için } f(i) \in A_i\}.\end{aligned}$$

Bu gösterimlerle eş anlamlı olarak $\bigcup_{i \in I} A_i$, $\bigcap_{i \in I} A_i$ ve $\prod_{i \in I} A_i$ gösterimleri de kullanılır. Bir $f : I \longrightarrow X$ dönüşümü bazen $x_i := f(i)$ olmak üzere $(x_i)_{i \in I}$ olarak da gösterilir. Bu gösterimle

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I (x_i \in A_i)\}$$

olur.

Teorem 2.2.14 *Aşağıdaki önermeler denktirler.*

1. *Seçme Aksiyomu.*
2. *Her $i \in I$ için $A_i \neq \emptyset$ ise $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.*

Kamt. $1 \implies 2$: $\mathcal{A} := \{A_i\}_{i \in I}$ küme ailesi verilsin. Her $i \in I$ için $A_i \neq \emptyset$ ise Seçme Aksiyomundan dolayı bir $s : \mathcal{A} \longrightarrow \bigcup \mathcal{A}$ seçen fonksiyonu her $A_i \in \mathcal{A}$ için $s(A_i) \in A_i$ olacak biçimde vardır. $g : I \longrightarrow \mathcal{A}$ fonksiyonu her $i \in I$ için $g(i) := A_i$ olarak tanımlansın. $f := s \circ g : I \longrightarrow \bigcup \mathcal{A}$ ve her $i \in I$ için $f(i) = s(g(i)) = s(A_i) \in A_i$ olduğundan tanım gereği $f \in \prod_{i \in I} A_i$.

$2 \implies 1$: $\{A_i\}_{i \in I}$ küme ailesi verilsin. Her $i \in I$ için $A_i \neq \emptyset$ ise varsayımdan dolayı en az bir $f \in \prod_{i \in I} A_i$ vardır. Her $i \in I$ için $f(i) \in A_i$ olduğundan $s(A_i) := f(i)$ ile tanımlanan $s : \mathcal{A} \longrightarrow \bigcup \mathcal{A}$ fonksiyonu Seçme Aksiyomunun istediği bir seçen fonksiyondur. ■

Problemlerdeki tüm nesneler küme olsunlar.

Problem 2.2.1 $(a, b) = (c, d) \iff (a = c) \wedge (b = d)$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.2.2 Her $n \geq 1$ doğal sayısı için

$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \iff a_1 = b_1 \wedge \dots \wedge a_n = b_n$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.2.3 Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız:

1. $(A \cup B) \times X = (A \times X) \cup (B \times X)$.

2. $(A \cap B) \times X = (A \times X) \cap (B \times X)$.
3. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.
4. $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \text{ veya } B = \emptyset$.

Problem 2.2.4 Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız:

1. $A \subseteq X$ ve $B \subseteq Y$ ise $A \times B \subseteq X \times Y$.
2. $A \times B \neq \emptyset$ ise $A \times B \subseteq X \times Y \iff A \subseteq X$ ve $B \subseteq Y$.
3. $A \times B = A \times C$ ve $A \neq \emptyset$ ise $B = C$.

Problem 2.2.5 Kanıtı verilmeyen tüm teoremleri kanıtlayınız.

Problem 2.2.6 A kümesindeki bir R bağıntısı için aşağıdakileri kanıtlayınız:

1. R yansımalıdır $\iff I_A \subseteq R$.
2. R bakışımıldır $\iff R \subseteq R^{-1}$.
3. R geçişlidir $\iff R \circ R \subseteq R$.

Problem 2.2.7 $R, S \subseteq A \times B$ bağıntı iseler $R \cup S$ ve $R \cap S$ 'nin de birer bağıntı olduğunu ve $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$ ve $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.2.8 R yansımaz bir bağıntı ise $(\underline{R})^- = R$ ve eğer R yansımali bir bağıntı ise $(R^-) = R$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.2.9 X kümesinde bir R denklik bağıntısı verilsin. Her $x, y \in X$ için

1. $[x]_R \neq \emptyset$,
2. $[x]_R \neq [y]_R \implies [x]_R \cap [y]_R = \emptyset$, (ii) $\iff ([x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset \implies [x]_R = [y]_R)$,
3. $X = \bigcup_{x \in X} [x]_R$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.2.10 $\mathcal{R} \neq \emptyset$, A kümesinde denklik bağıntılarından oluşan bir küme ise $\bigcap \mathcal{R}$ 'nin de A kümesinde bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Problem 2.2.11 0B kümesinin daima tek ögeli iken $A \neq \emptyset$ ise $A^0 = \emptyset$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.2.12 1. A 'dan B 'ye birebir olmayan bir fonksiyon varsa $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$.

2. A 'dan B 'ye örten olmayan bir fonksiyon varsa $B \neq \emptyset$.

Problem 2.2.13 $\{I_j\}_{j \in J}$ bir küme ailesi, $K := \bigcup_{j \in J} I_j$ ve $\{A_k\}_{k \in K}$ bir küme ailesi olsun.

$$\bigcup_{k \in K} A_k = \bigcup_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I_j} A_i \right)$$

ve ayrıca $J \neq \emptyset$ ve her j için $I_j \neq \emptyset$ ise

$$\bigcap_{k \in K} A_k = \bigcap_{j \in J} \left(\bigcap_{i \in I_j} A_i \right)$$

olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.2.14 B bir küme ve $\{A_i\}_{i \in I}, \{B_j\}_{j \in J}$ iki küme ailesi olmak üzere aşağıdakileri kanıtlayınız.

1. $B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$, $B \cup (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$,
2. $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j)$,
3. $(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup (\bigcap_{j \in J} B_j) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cup B_j)$, $(I \neq \emptyset, J \neq \emptyset)$,
4. $(\bigcup_{i \in I} A_i) \times (\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j)$,
5. $(\bigcap_{i \in I} A_i) \times (\bigcap_{j \in J} B_j) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j)$, $(I \neq \emptyset, J \neq \emptyset)$.

Problem 2.2.15 $f : X \rightarrow Y$ birebir ve $I \neq \emptyset$ olmak üzere X kümesinde $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesi verilmişse

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$$

olduğunu kanıtlayınız ve f 'nin birebirliğinden vazgeçilemeyeceğini örnekleyiniz.

Problem 2.2.16 $f : X \rightarrow Y$ ve $h : X \rightarrow Z$ fonksiyonları verildiğinde aşağıdaki önermeler denktirler:

1. Bir $g : Y \rightarrow Z$ dönüşümü $g \circ f = h$ olacak biçimde vardır.
2. $\forall u, v \in X (f(u) = f(v) \implies h(u) = h(v))$.

$$3. \forall y \in Y \exists z \in Z (X_y^f \subseteq X_z^h).$$

Problem 2.2.17 X kümesinde bir R denklik bağıntısı ve bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilmiş olsun. $q : X \rightarrow X/R$ bölüm dönüşümü olmak üzere aşağıdaki önermelerin denk olduğunu kanıtlayınız:

1. Bir $g : X/R \rightarrow Y$ dönüşümü $g \circ q = f$ olacak biçimde vardır.
2. $\forall u, v \in X (uRv \implies f(u) = f(v)).$
3. $\forall x \in X ([x]_R \subseteq X_{f(x)}^f).$

Problem 2.2.18 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$ ve $g \circ f = I_X$ ise f birebir ve g örtendir.

Problem 2.2.19 $X \neq \emptyset$ olmak üzere bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu için aşağıdaki önermeler denktirler:

1. f birebirdir.
2. $g \circ f = I_X$ olacak biçimde bir $g : Y \rightarrow X$ fonksiyonu (dd. f 'nin **sol tersi**) vardır.
3. Her Z kümesi ve her $g, h : Z \rightarrow X$ fonksiyonları için $f \circ g = f \circ h$ ise $g = h$ dır (soldan kısaltma).
4. $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ örtendir.
5. Her $A, B \subseteq X$ için $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$
6. Her $A \subseteq X$ için $f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A).$
7. Her $y \in Y$ için $f^{-1}(\{y\})$ boş veya tek öğelidir.

Problem 2.2.20 Bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu için aşağıdaki önermeler denktir:

1. f örtendir.
2. $f \circ g = I_Y$ olacak biçimde bir $g : Y \rightarrow X$ fonksiyonu (dd. f 'nin **sağ tersi**) vardır.
3. Her Z kümesi ve her $g, h : Y \rightarrow Z$ fonksiyonları için $g \circ f = h \circ f$ ise $g = h$ dır (sağdan kısaltma).
4. $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ birebirdir.
5. Her A için $Y \setminus f(A) = f(X \setminus A).$

Problem 2.2.21 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X, g \circ f = I_X$ ve $f \circ g = I_Y$ ise f ve g birer tameslemedirler ve $f^{-1} = g.$

2.3 DOĞAL SAYILAR

Matematiğin en önemli kümesi kuşkusuz

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

sezgisel doğal sayılarımızın oluşturduğu

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

kümesidir. Kısaca *doğal sayılar* olarak bildiğimiz bu sayılara bu kitapta **sezgisel doğal sayılar** veya **somut doğal sayılar** da diyeceğiz. Bir parça matematik kültürü olan bir okuyucu Kronecker'in şu meşhur sözünü mutlaka bir yerlerde okumuştur: “*Doğal sayıları tanrı yarattı, gerisi insan işidir*”. En azından bir yıl analiz dersi almış bir öğrenci bu sözlerin ne anlama geldiğini bilir: O, doğal sayılardan yola çıkılarak tam sayıların, ardından sırasıyla rasyonel, gerçek ve kompleks sayıların nasıl kazanıldığını bilir.

2.3.1 Tekrarlı Teorem

Sezgisel doğal sayılarımızın bizim için en temel özelliği her n sezgisel doğal sayısına karşılık onun *bir fazlası* veya hemen ondan sonra gelen *ardılı* dediğimiz bir başka $n' = n + 1$ doğal sayısı oluşturabilmemizdir. Böylece elimizde bir $' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dönüşümü vardır. Ayrıca doğal sayılarla aritmetik yapabilmek için onlar hakkında Peano aksiyomlarındaki bilgilerin yeterli olduğunu da biliyoruz. Şimdi Peano aksiyomlarını verelim.

Peano Aksiyomları

- (P1) $\forall n \in \mathbb{N} (n' \neq 0)$.
- (P2) $' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ birebirdir, dd. $m' = n' \implies m = n$.
- (P3)⁽²⁾ $\forall M ((M \subseteq \mathbb{N}) \wedge (0 \in M) \wedge \forall m (m \in M \implies m' \in M)) \implies M = \mathbb{N}$.⁹

Burada (P3)⁽²⁾'ün **(sezgisel) tümevarım ilkesi** olduğunu biliyoruz. Bazen kısaca **(STV)** olarak göstereceğimiz bu ilkeyi sözlerle dile getirelim:

⁹(P3)⁽²⁾ ifadesindeki (2) üssü bu aksiyomun ikinci dereceden yüklem mantığına ait olduğunu belirtir. Burada evrenimiz $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olduğundan birinci dereceden yüklem mantığında $\forall x$ ve $\exists x$ niceleyicilerinin değişkenlerinin alacakları değerler $\mathbb{N}$ evreninin *öğeleridir*. Buna karşın (P3)⁽²⁾ aksiyomundaki niceleyinin değişkeni ise değerlerini $\mathbb{N}$ 'nin *alt kümelerinde* almaktadır!

Sezgisel doğal sayılar kümesinin herhangi bir M altkümesi 0 sayısını içerirse ve M kümesindeki her m sayısı için m' sayısı da M kümesindeyse M kümesi sezgisel doğal sayılar kümesinin kendisidir.

Tümevarım ilkesi, pratik olarak olanaksız olan bir *sonsuz işlemi*, örneğin her n sezgisel doğal sayısı için $\psi(n)$ önermesinin kanıtlama işlemini, *sonlu adımda*, açık olarak *iki adımda* tamamlama şansı verir. Her $n \in N$ sezgisel doğal sayısı için bir $\psi(n)$ önermesi verildiğinde, her $n \in N$ için bu önermelerin doğru olduğunun nasıl kanıtlandığını biliyoruz:

TVI $\psi(0)$ önermesinin doğru olduğu gösterilir.

TVII Herhangi bir $n \in N$ için $\psi(n)$ doğru varsayıldığında $\psi(n')$ önermesinin doğru olduğu kanıtlanır.

Tümevarımla kanıtın bir diğer şekli de vardır:

$$\text{Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } (\forall m < n \psi(m)) \Rightarrow \psi(n) \text{ ise } \forall n \psi(n).$$

Her iki şeklin de $\mathbb{N}_k := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$ için uyarlanmış şekilleri de vardır. Örneğin $\forall n \in \mathbb{N}_k \psi(n)$ kanıtlanmak istendiğinde 1) $\psi(k)$ kanıtlanır. 2) Her $n \in \mathbb{N}_k$ için $\psi(n)$ doğruysa $\psi(n+1)$ 'in doğruluğu kanıtlanır. Bu iki adım $\varphi(n) := \psi(n+k)$ önermesi için TVI ve TVII'den başka bir şey değildir.

Tümevarım ilkesi bize son derece önemli olan **tekrarlı teoremi** verir. Bunun uygulamalarıyla matematikte adım başı karşılaşırız. Örneğin her n sezgisel doğal sayısı için evrenimizde bir a_n nesnesi tanımlamak istiyoruz. a_0 tanımlanır. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a_0, \dots, a_n$ tanımlandıktan sonra a_{n+1} ögesi $a_0, \dots, a_n$ 'ler yardımıyla belirlenir. Bu belirleme işlemi *önceden verilmiş* bir g fonksiyonu yardımıyla yapılır ve $a_{n+1} := g(a_0, \dots, a_n)$ olarak tanımlanır. Bu tür bir tanımlamaya **tekrarlı tanımlama** denir. Genelde a_{n+1} tüm $a_0, \dots, a_n$ öğelerine değil daha azına, örneğin sadece a_n veya sadece a_{n-1}, a_n 'lere vb... bağlıdır. Çoğu kitapta tekrarlı tanımlama olarak adlandırılan işlemlerin bir kısmına, [36]'ye uyarak, **tekrarlı kurma** veya **tekrarlı seçme** diyeceğiz. Burada yine tanımlanması gereken a_n nesneleri söz konusudur, ancak bu kez a_n 'nin *ne olduğunu söylemeyip nereden seçilebileceğini* söyleriz. İşin karakteri değişmiştir ve bu uygulamada işin içine *Seçme Aksiyomu* karışır. Bunlara yeri geldiğinde örnekler vereceğiz.

Az ileride kanıtlayacağımız tekrarlı teorem doğal sayıların sıralamalarını kullanır. Doğal sayılarda sıralama henüz doğal sayılarda hiçbir aritmetik işlem açıklanmadan da doğrudan salt ' ardıl dönüşümü yardımıyla açıklanabilir. Nitekim bunun nasıl yapılacağını ana hatlarını bir sonraki bölümde vereceğiz. Aksiyomatik Kümeler Kuramı kitabında da sıralamayı aritmetik işlemlerden önce vereceğiz. Diğer yandan doğal sayılardaki sıralama doğal

sayılardaki toplama işlemi üzerinden de açıklanabilir. Doğal sayılarda toplama ise Landau'nun [38]'da verdiği, Kalmár'a ait bir kanıtla, tekrarlı teoreme başvurmadan da açıklanabilir. Bu yolu da öğrenelim.

Peano tümevarımıla $\mathbb{N}$ 'de toplama ve çarpma işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlar¹⁰. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için:

$$\begin{aligned} m + 0 &:= m, & m \cdot 0 &:= 0 \\ m + n' &:= (m + n)', & m \cdot n' &:= m \cdot n + m \end{aligned}$$

Özellikle $1 = 0'$ olduğundan her m için $m + 1 = m + 0' = (m + 0)' = m'$ olur. Önce toplama işlemini kurtaralım.

Teorem 2.3.1 (Kalmár) *Her m doğal sayısı için tek olarak belirli bir $t_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlayacak biçimde vardır:*

1. $t_m(0) = m$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} \ t_m(n') = (t_m(n))'$.

Kanıt. *Teklik:* Şimdi $m \in \mathbb{N}$ keyfi verilip sabit tutulsun. t_m ve u_m bu koşulları sağlayan iki fonksiyon ve

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid t_m(n) = u_m(n)\}$$

olsun. İlk koşuldan dolayı $0 \in M$. Şimdi $n \in M$ olsun (tvk). Buradan

$$t_m(n') \stackrel{2.}{=} (t_m(n))' \stackrel{tvk}{=} (u_m(n))' \stackrel{2.}{=} u_m(n')$$

elde edilir, dolayısıyla $n' \in M$. $(P3)^{(2)}$ ile $M = \mathbb{N}$.

Varlık: Şimdi yine tümevarımla her m için bu iki koşulu sağlayan bir t_m dönüşümünün varlığını kanıtlayalım.

$$V := \{m \in \mathbb{N} \mid \text{iki koşulu da sağlayan bir } t_m \text{ var}\}$$

olsun. $t_0 := I_{\mathbb{N}}$ özdeşlik dönüşümü her iki koşulu da sağlar. Dolayısıyla $0 \in V$. Şimdi $m \in V$ olsun (tvk). Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$t_{m'}(n) := (t_m(n))'$$

10

Bunlar da gerçekte tanım değildirler. Daha önceki yanlış tanımlara kafa yormuş olanlar bunların gerçekten tanım olmadığını görebilirler. Doğrusunu öğrenmeye az kaldı!

olarak açıklansın.

$$t_{m'}(0) \stackrel{def}{=} (t_m(0))' \stackrel{1.}{=} (m)' = m'.$$

$$t_{m'}(n') \stackrel{def}{=} (t_m(n'))' \stackrel{tvk}{=} ((t_m(n))')' \stackrel{def}{=} (t_{m'}(n))'$$

Böylece $t_{m'}$ fonksiyonu da her iki koşulu sağlar ve $m' \in V$ olur. $V = \mathbb{N}$ ve işimiz bitmiştir¹¹. ■

Benzeri bir teoremi okur çarpma işlemi için ifade edip kanıtlayabilir. Ancak benzeri bir kanıt $\sum_{k < n} x_k$ ve $\prod_{k < n} x_k$ için verilemez. Geçiyoruz.

Tanım 2.3.2 $\forall m, n \in \mathbb{N} \ m + n := t_m(n)$.

Şimdilik bu toplama işleminin değişmeli, birleşmeli vb. özelliklerinin kanıtıyla oyalanmayacağız. $\mathbb{N}$ kümesinde $<$ ile gösterdiğimiz bir sıralama her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$m < n :\iff \exists p \in \mathbb{N} (p \neq 0 \wedge m + p = n).$$

ile tanımlanabilir. Bunun bir iyi sıralama olduğuyla da oyalanmayacağız. Şimdi sonradan genelleştireceğimiz, son derece önemli tekrarlı teoremi en yalın durumda kanıtlayacağız.

Teorem 2.3.3 Genel Tekrarlı Teorem : $G : \mathbb{N} \times \tilde{\mathbb{U}} \rightarrow \tilde{\mathbb{U}}$ herhangi bir fonksiyon ve $a \in \tilde{\mathbb{U}}$ herhangi bir öge olsun. Aşağıdaki koşullar sağlancak biçimde bir tek $f : \mathbb{N} \rightarrow \tilde{\mathbb{U}}$ fonksiyonu vardır:

- (1) $f(0) = a$
- (2) $\forall n \in \mathbb{N} \ (f(n') = G(n, f(n)), \quad (TF) \text{ (Tekrarlama Formülü)})$

Kanıt. 1. *Varlık:* Önce böyle bir fonksiyonun varlığını kanıtlayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n := \{m \mid m \leq n\}$ olsun. Tümevarımla her n için *tek* olarak belirli bir $f_n : B_n \rightarrow \tilde{\mathbb{U}}$ fonksiyonunun

- i) $f_n(0) = a$
- ii) Her $m' \in B_n$ için $f_n(m') = G(m, f_n(m))$

olacak biçimde var olduğunu kanıtlayalım. $f_0 : \{0\} \rightarrow \tilde{\mathbb{U}}$ ve $f_0(0) = a$ olmak zorunda olduğundan f_0 gerçekten de tek olarak belirlidir. Şimdi f_n tek olarak belirli olsun. i) ve ii) yi sağlayan herhangi bir $f_{n'}$ için zorunlu olarak $f_{n'} \mid B_n = f_n$ olmalıdır. ii)'den dolayı yine zorunlu olarak

$$f_{n'}(n') = G(n, f_{n'}(n)) = G(n, f_n(n))$$

¹¹ $a \stackrel{def}{=} b$ bize $a = b$ eşitliğinin tanım gereği doğru olduğunu bildirir.

olmalıdır. Öyleyse i) ve ii)'yi sağlayan en fazla bir tek fonksiyon vardır, diğer yandan ise $f_{n'}|B_n := f_n$ ve $f_{n'}(n') := G(n, f_n(n))$ ile tanımlanan $f_{n'} : B_{n'} \rightarrow \tilde{U}$ fonksiyonu i) ve ii)'yi sağlar.

Şimdi $f : \mathbb{N} \rightarrow \tilde{U}$ fonksiyonunu her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) := f_n(n)$ olarak tanımlayalım. Bir yandan $f(0) = f_0(0) = a$, diğer yandansa

$$f(n') = f_{n'}(n') = G(n, f_{n'}(n)) = G(n, f_n(n)) = G(n, f(n))$$

olduğundan f fonksiyonu teoremin iki koşulunu da sağlar.

2. *Teklik*: Şimdi bu fonksiyonun tekliğini görelim. $f' : \mathbb{N} \rightarrow \tilde{U}$ teoremin koşullarını sağlayan bir başka fonksiyon ve $E := \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = f'(n)\}$ olsun. $f(0) = a = f'(0)$ olduğundan $0 \in E$. Şimdi $n \in E$ olduğunu varsayalım.

$$f(n') = G(n, f(n)) = G(n, f'(n)) = f'(n')$$

olacağından $n' \in E$ elde edilir. Tümevarım ilkesiyle $E = \mathbb{N}$, dolayısıyla $f = f'$ olur. ■

Not 2.3.4 Bu teoremde $\tilde{U}$ yerine herhangi bir A sınıfı alabiliriz. $G : \mathbb{N} \times A \rightarrow A$ ve $a \in A$ verildiğinde yine teoremin koşullarını sağlayan bir tek $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ fonksiyonu vardır. Gerçekten de bu G fonksiyonunu herhangi bir biçimde bir $\tilde{G} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ fonksiyonuna genişletelim. Örneğin $\tilde{G}|A := G$ ve her $x \in \tilde{U} \setminus A$ içinse $\tilde{G}(x) := x$ olsun. Teoremden dolayı $f(0) = a$ ve $\forall n \in \mathbb{N} (f(n') = \tilde{G}(n, f(n)))$ koşullarını sağlayan bir $f : \mathbb{N} \rightarrow \tilde{U}$ fonksiyonu vardır. Tümevarımla kolayca aslında $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ olduğu görülür. Bundan dolayı ise

$$\forall n \in \mathbb{N} f(n') = \tilde{G}(n, f(n)) = G(n, f(n))$$

olur. Böylece (1) ve (2)'yi sağlayan bir $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ kanıtlanmıştır. Teklik teoremdaki gibi gösterilir. □

Teorem 2.3.5 Tekrarlı Teorem : Bir $a \in \tilde{U}$ ögesi ve bir $G : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ dönüşümü verildiğinde tek olarak belirli bir $f : \mathbb{N} \rightarrow \tilde{U}$ fonksiyonu

1. $f(0) = a$.
2. $\forall n \in \mathbb{N} f(n') = G(f(n))$. (TF) (**Tekrarlama Formülü**)
olacak biçimde vardır.

Sonuç: Bir A sınıfı, bir $a \in A$ ögesi ve bir $G : A \rightarrow A$ dönüşümü verildiğinde tek olarak belirli bir $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ fonksiyonu 1. ve 2.'yi sağlayacak biçimde vardır.

Not 2.3.6 f fonksiyonu (TF) ile tekrarlı tanımlanmıştır denir. $a_n := f(n)$ dersek f fonksiyonunun

$$a_0 = a, a_1 = G(a_0), \dots, a_{n+1} = G(a_n), \dots$$

biçiminde tekrarlanan bir formülle G fonksiyonu yardımıyla tanımlandığı kastedilir. Geleneksel matematikte A bir kümedir. $\square$

Kanıt. $P_2 : \mathbb{N} \times \tilde{U} \rightarrow \tilde{U} ((n, x) \rightsquigarrow x)$ ikinci izdüşüm fonksiyonu olmak üzere $\tilde{G} := G \circ P_2$ olsun. Bir önceki teoremden dolayı tek olarak belirli bir $f : \mathbb{N} \rightarrow \tilde{U}$ fonksiyonu $f(0) = a$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(n') = \tilde{G}(n, f(n)) = G(P_2(n, f(n))) = G(f(n))$$

olacak biçimde vardır. Bu fonksiyon teoremin koşullarını sağlar. Tekliği bir önceki teoremin kanıtında olduğu gibi tümevarımla kolayca görülür.

Sonuç ise Not (2.3.4)'teki gibi kolayca görülür. ■

Not 2.3.7 Tekrarlı teoremin kanıtında sezgisel doğal sayılarımıza ilişkin özelliklerden yalnızca Peano aksiyomları kullanılmıştır. Bunun bir sonucu olarak bu teorem bu üç aksiyoma uyan her yapıda geçerlidir. İlerde bunlara Penao yapıları diyeceğiz. $\square$

Tekrarlı Seçme Teoremi'ne kısaca değinelim. Analiz, topoloji, cebir ve çoğu diğer matematik derslerinde kuşkusuz aşağıdaki önermeyi sıkca kullanmışsınız:

Tekrarlı Seçme Teoremi: *A bir sonsuz küme ve $a \in A$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \in A$ öğeleri $a_0 = a$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} \in A \setminus \{a_0, \dots, a_n\}$ olacak biçimde seçilebilirler.*

Kanıtımız da aşağı yukarı şöyledir: $a_0 := a$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a_0, \dots, a_n$ 'ler seçilmiş olsunlar. A kümesi sonsuz olduğundan $A \setminus \{a_0, \dots, a_n\} \neq \emptyset$ ve “bu boş olmayan kümeden bir öğe seçer onu da a_{n+1} olarak açıklarım.” Böylece tümevarımla istenilen özelliklere sahip a_n öğelerini seçmiş oluruz.

Teoreminize bir numara vermediğimiz ve kanıtımızın başına olması gerektiği gibi “kanıt” yazmadığımız dikkatlerden kaçmamıştır. Yoksa bu yalın ve apaçık kanıtta bir sorun mu var? Ne yazık ki evet! Hem de bir değil iki sorun vardır. Birinci sorun burada gerçekte bir tümevarımla tanımın bulunmadığıdır. Tümevarımla tanımların nasıl yapılacağını bu bölümde öğreneceğiz ve (II.4)'te ayrıca ayrıntılı olarak tartışacağız.

İkinci sorun kanıtta tırnak işaretleri arasına aldığımız kısımdadır. A kümesi sonlu olsaydı bu kümeyi tüketene kadar sonlu sayıda a_n 'leri seçmek dert değildi. Sorun A sonsuz olduğunda vardır. Aksiyomatik Kümeler Kuramına geçtiğimizde kanıtta tırnak içerisindeki tümce bu kuramın diline ait değildir, o sözeden dile aittir. Bu “seçme” işini kuramın dilinde ifade etmek gerekir. Bu ise kuramın bir formülü aracılığı ile olmak zorundadır. Kuramımızın nesnelerinin kümeler olduğunu unutmayalım. Biz aslında $a_n :=$

$f(n)$ diyeceğimiz bir $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ fonksiyonunun peşindeyiz ve bu fonksiyondan istediğimiz ise $f(0) = a$ ve her her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(n+1) \in A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\}$$

olmasıdır. İşte bu *seçme işini* kuramın dilinde bir *seçen fonksiyona* bırakacağız. $\mathcal{P}^*(A) := \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ olsun. $s : \mathcal{P}^*(A) \rightarrow A$ bir seçme fonksiyonu ise

$$f(n+1) := s(A \setminus \{f(0), \dots, f(n)\})$$

alabiliriz. Şimdilik bu teoremin kanıtını vermeden kullanmamıza izin verilsin. Böyle bir fonksiyonun varlığını, şu an verdiğimiz teroemi kullanarak elde ettiğimiz hiçbir sonucu kullanmadan, (II.12)'de çok daha genel durumlar için kanıtlayacağız. Şimdilik şu kadarını belirtmekte yarar var: Seçme Aksiyomunu kullanmak zorundayız. Seçme Aksiyomuna denk olan İyi Sıralama Teoremi de bize kolay bir kanıt verir, buna (II.12)'de sözünü ettiğimiz teoremin kanıtından sonra kısaca değineceğiz.

Tüm matematik kavramları kümeler olarak tanımlama gibi bir amacımız da var. Bu nedenle ilk olarak *sezgisel doğal sayılarımızın yerini alacak* kümeler ve $' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ *dönüşümünün yerini alacak* bir fonksiyonu da tanımlamak zorundayız. Bu *yerini almanın* matematiksel anlamı bizi ister istemez *yapı* ve *eşyapı dönüşümlerine* götürür. Matematiksel Mantığa Giriş'te¹² en genel biçimiyle vereceğimiz bu kavramları şimdilik salt Peano yapıları için vereceğiz.

2.3.2 Peano Yapıları

$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, ', 0)$ Peano yapılarına bir örnektir: Burada $0 \in \mathbb{N}$, $' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ise $(P1) - (P3)^{(2)}$ aksiyomlarını sağlayan bir dönüşümdür. Bir **Peano yapısı** tanım gereğince aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\mathcal{A} = (A, s^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}})$ üçlüsüdür: A bir küme, $0^{\mathcal{A}} \in A$, $s^{\mathcal{A}} : A \rightarrow A$ öyle ki

$$(P1) \quad \forall a \in A (s^{\mathcal{A}}(a) \neq 0^{\mathcal{A}}),$$

$$(P2) \quad s^{\mathcal{A}} \text{ birebirdir,}$$

$$(P3)^{(2)} \quad \forall M (M \subseteq A \wedge 0^{\mathcal{A}} \in M \wedge \forall m (m \in M \implies s^{\mathcal{A}}(m) \in M)) \implies M = A.$$

$(P3)^{(2)}$ **tümevarım ilkesi** olarak adlandırılır ve daha yalın

$$M \subseteq A \wedge 0^{\mathcal{A}} \in M \wedge s^{\mathcal{A}}[M] \subseteq M \implies M = A$$

¹²Daha önce Aksiyomatik Kümeler Kuramı kitabında kısa bir özetini vermeği düşündüğümüz matematiksel mantığa ilişkin bilgileri, ülkemizde bu alandaki kaynak eksikliği nedeniyle ayrı bir kitapta işlemği uygun bulduk.

olarak yazılabilir¹³.

Bir $\mathcal{A} = (A, s^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}})$ Peano yapısında her $0^{\mathcal{A}} \neq a \in A$ ögesinin bir **ardıl** olduğunu, dd. bir $x \in A$ ile $a = s^{\mathcal{A}}(x)$ olduğunu görelim. $B := \{0^{\mathcal{A}}\} \cup s^{\mathcal{A}}[A]$ olsun. Tanım gereği $0^{\mathcal{A}} \in B$ ve $s^{\mathcal{A}}[B] \subseteq B$ olduğundan tümevarım ilkesinden $B = A$. Dolayısıyla $a \in s^{\mathcal{A}}[A]$ ve bu savunduğumuz şeydir, en az bir $x \in A$ ile $a = s^{\mathcal{A}}(x)$ olmalıdır. (P2) ise bu x ögesinin tekliğini söyler. Sonuçta:

- Her $0^{\mathcal{A}} \neq a \in A$ ögesi için $a = s^{\mathcal{A}}(x)$ olacak biçimde **bir tek** $x \in A$ vardır.

$\mathcal{A} = (A, s^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}})$ ve $\mathcal{B} = (B, s^{\mathcal{B}}, 0^{\mathcal{B}})$ iki Peano yapısı olmak üzere bir $h : A \rightleftharpoons B$ tameşlemesine $h(0^{\mathcal{A}}) = 0^{\mathcal{B}}$ ve her $a \in A$ için $h(s^{\mathcal{A}}(a)) = s^{\mathcal{B}}(h(a))$ ise bir(Peano) **eşyapı dönüşümü** denir ve bu durum kısaca

$$h : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$$

ile gösterilir. Bir $h : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{B}$ eşyapı dönüşümü varsa $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ **eşyapılıdır** denir ve bu durum $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ ile gösterilir. Matematik anlamda *ancak eşyapılar birbirlerinin yerini alabilirler*. Peano yapılarında çok şanslı sayılırız çünkü aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 2.3.8 $\widetilde{\mathcal{U}}$ 'da Peano yapıları kurama **kesin bellidir**, dd. $\widetilde{\mathcal{U}}$ 'da herhangi iki Peano yapısı daima eşyapılıdır.

Kanıt. Bunun için herhangi bir $\mathcal{A} = (A, s^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}})$ Peano yapısının $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, ', 0)$ ile eşyapılı olduğunu göstermek yeterlidir. Tekrarlı teoremden G olarak $s^{\mathcal{A}} : A \rightarrow A$ fonksiyonunu ve a olarak $0^{\mathcal{A}}$ ögesini seçersek *tek* olarak belirli bir $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ fonksiyonu $f(0) = 0^{\mathcal{A}}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n') = s^{\mathcal{A}}(f(n))$ olacak biçimde vardır. Geriye yalnızca f fonksiyonunun bir tameşleme olduğunu göstermek kalıyor.

Önce f fonksiyonunun birebir olduğunu görelim. n üzerinden tümevarımla

$$m \neq n \implies f(m) \neq f(n)$$

olduğunu göstereceğiz. $n = 0$ olsun. $m \neq 0$ olacağından tek olarak belirli bir $k \in \mathbb{N}$ ile $m = k'$. Dolayısıyla

$$f(m) = f(k') = s^{\mathcal{A}}(f(k)) \neq 0^{\mathcal{A}} = f(0).$$

¹³(P3)⁽²⁾ yerine aşağıdaki aksiyomlar şemasını alalım. $\mathcal{A}$ 'nın ögelerine ilişkin her $\varphi(x)$ önermesi için

(P3 φ) $\varphi(0) \wedge \forall x \in A(\varphi(x) \implies \varphi(s^{\mathcal{A}}(x))) \implies \forall x \varphi(x)$ aldığımızda yine Peano yapısı olarak adlandırılan bir başka kuram elde ederiz. Bu kuramı (PEA)⁽¹⁾ ve öncekini (PEA)⁽²⁾ ile gösterirsek (PEA)⁽²⁾'nin kesin belli bir kuram olduğunu kanıtlayacağız. Ancak (PEA)⁽¹⁾ kesin belli değildir.

Şimdi savımız n için kanıtlanmış ve $m \neq n'$ olsun. $m = 0$ ise az önceki irdelemeyle $f(0) \neq f(n')$ olur. $m \neq 0$ ise bir $p \in \mathbb{N}$ ile $m = p'$ olur. $p' \neq n' \xrightarrow{(P2)} p \neq n$. Tümevarım koşulundan ise $f(p) \neq f(n)$ elde edilir ve buradan da

$$f(m) = f(p') = s^A(f(p)) \neq s^A(f(n)) = f(n')$$

olur (eşitsizliğin nedeni yine (P2)'dir).

Şimdi ise f fonksiyonunu örten olduğunu yine tümevarımla görelim. $B := f[\mathbb{N}]$ olsun. $0^A = f(0) \in B$. $b \in B$ olsun. Bir $n \in \mathbb{N}$ ile $b = f(n)$ olur. Buradan ise

$$s^A(b) = s^A(f(n)) = f(n') \in B$$

elde edilir. Tümevarım ilkesinden $B = A$ ve bu nedenle f örtendir. ■

2.3.3 Peano Yapılarında Aritmetik

Tekrarlı teoremin her Peano yapısında geçerli olduğunu daha önce belirtmiştik. Bize *herhangi bir* $\mathcal{A} = (A, s^A, 0^A)$ Peano yapısı verilsin. Herhangi iki Peano yapısı eşyapılı olduklarından, doğal sayılarımızdaki işlemler herhangi bir Peano yapısına aktarılabilirler. Öyle yapmayacağız, çünkü amacımız, bildiğimizi sandığımız ancak gerçekte ne olduklarını bilmediğimiz sezgisel doğal sayılarımızdan kurtulmaktır. Daha önce yaptığımız gibi önce toplama işlemi, ardından sıralama açıklanıp tekrarlı teoreme kanıtlanabilir. Ancak daha önce de belirttiğimiz gibi önce sıralama açıklanıp ardından tekrarlı teoreme kanıtlanabilir. Bu yol izlenmiş olsun¹⁴. Yani elimizde tekrarlı teoremin bulunsun. Tekrarlı tanımlamayla A kümesinde bir toplama ve bir çarpma işlemi açıklayacağız. $m \in A$ keyfi verilsin. Tekrarlı teoreme a yerine m ögesini ve G yerine s^A fonksiyonunu alırsak tek olarak belirli bir $t_m : A \rightarrow A$ fonksiyonunu:

- i) $t_m^A(0^A) = m$
- ii) Her $x \in A$ için $t_m^A(s^A(x)) = s^A(t_m(x))$

olacak biçimde vardır. $t_m^A(x)$ yerine $m +^A x$ yazarsak bu özellikler

- i) $m +^A 0^A = m$
- ii) Her $x \in A$ için $m +^A s^A(x) = s^A(m +^A x)$

¹⁴ Aksiyomatik Kümeler Kuramı kitabında bu yolu izleyeceğiz. II.4'te kısa bir özetini verdiğimiz "Sayılar nedir ve ne olmalıdırlar?" adlı kitabında Dedekind bu yolu izlemiştir. Oradaki boşlukları doldurduğunuzda (ödev) siz de bu işi yapmış olursunuz.

şekline dönüşürler. $+^{\mathcal{A}}$, ya $\mathcal{A}$ yapısının **toplama işlemi** denir. Bu işlemin birleşmeli ve değişimli, dd. her $x, y, z \in A$ için

$$x +^{\mathcal{A}} (y +^{\mathcal{A}} z) = (x +^{\mathcal{A}} y) +^{\mathcal{A}} z \text{ ve } x +^{\mathcal{A}} y = y +^{\mathcal{A}} x$$

olduğu tümevarımla gösterilir. Bunlarla oyalanmayacağız.

Şimdi toplamdan da yararlanarak yine tekrarlı tanımla **çarpma işlemi**ni tanımlayalım. Tekrarlı teoremden $G : A \rightarrow A$ olarak $t_m^{\mathcal{A}}$ ve a olarak $0^{\mathcal{A}}$ alırsak *tek* olarak belirlenmiş bir $p_m^{\mathcal{A}} : A \rightarrow A$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} i) \quad & p_m^{\mathcal{A}}(0^{\mathcal{A}}) = 0^{\mathcal{A}} \text{ ve} \\ ii) \quad & \text{Her } x \in A \text{ için } p_m^{\mathcal{A}}(s^{\mathcal{A}}(x)) = t_m^{\mathcal{A}}(p_m^{\mathcal{A}}(x)) = \\ & m +^{\mathcal{A}} p_m^{\mathcal{A}}(x) = p_m^{\mathcal{A}}(x) +^{\mathcal{A}} m \end{aligned}$$

olacak biçimde bulunur. $p_m^{\mathcal{A}}(x)$ yerine $m \cdot^{\mathcal{A}} x$ yazarsak bu özellikler

$$\begin{aligned} i) \quad & m \cdot^{\mathcal{A}} 0^{\mathcal{A}} = 0^{\mathcal{A}} \\ ii) \quad & \text{Her } x \in A \text{ için } m \cdot^{\mathcal{A}} s^{\mathcal{A}}(x) = m \cdot^{\mathcal{A}} x +^{\mathcal{A}} m \end{aligned}$$

şekline dönüşürler. Bu işleme $\mathcal{A}$ yapısındaki **çarpma işlemi** denir.

Gösterimin yalınlığı açısından $s^{\mathcal{A}}(x)$, $+^{\mathcal{A}}$, $\cdot^{\mathcal{A}}$, $0^{\mathcal{A}}$ ve $s^{\mathcal{A}}(0)$ yerine sırasıyla x' , $+$, $\cdot$, 0 ve 1 yazar ve bu gösterimlerle $x' = (x + 0)' = x + 0' = x + 1$ olduğunu göz önünde tutarsak bu iki işlemin temel özellikleri bildik şekli alırlar:

$$\begin{aligned} m + 0 &= m, & m \cdot 0 &= 0. \\ m + (n + 1) &= (m + n) + 1, & m \cdot (n + 1) &= m \cdot n + m. \end{aligned}$$

Tam bu noktada “İyi ya Peano da toplamayı ve çarpmayı böyle *tanımlamıştı*, o zaman bunların tanım olmadığını söylemişsiniz!” diyebilirsiniz. Evet söylediklerimizde ısrar ediyoruz: Bunlar tanım değildir, bunlar tekrarlı teoremimizin *varlığını* ve *tekliğini* garanti ettiği iki fonksiyonun, $t_m^{\mathcal{A}}$ ve $p_m^{\mathcal{A}}$ fonksiyonlarının özellikleridirler. $m + n$ ve $m \cdot n$ bu denkelmelerle tanımlanmamışlardır, onların tanımı aşağıdadır

$$m + n := t_m^{\mathcal{A}}(n) \text{ ve } m \cdot n := p_m^{\mathcal{A}}(n).$$

Tanımladığımız $+$ ve $\cdot$ işlemlerinin denklemlerin yalnızca sol yanlarında ve elenebilir olduklarına dikkat ediniz!

Elbette $m \cdot 1 = m \cdot 0' = m \cdot 0 + m = 0 + m = m$ olur. Çarpma işlemi de toplama işlemi gibi birleşmeli ve değişmelidir, ayrıca dağılım yasaları da geçerlidir. Her $m, n, k \in A$ için

$$m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot n) \cdot k, \quad m \cdot n = n \cdot m, \quad m \cdot (n + k) = m \cdot n + m \cdot k.$$

Son olarak tekrarlı teoremden G yerine $p_m^A : A \rightarrow A$ fonksiyonunu ve a yerine ise $1 = s^A(0)$ ögesini alırsak *tek* olarak belirli bir $e_m^A : A \rightarrow A$ **üs fonksiyonu**, yalın gösterimlerle,

- i) $e_m^A(0) = 1$.
- ii) Her $x \in A$ için $e_m^A(x') = p_m^A(e_m^A(x)) = m \cdot e_m^A(x)$.

olacak biçimde vardır. $e_m^A(x)$ yerine m^x yazarsak bu özellikler

- i) $m^0 = 1$.
- ii) Her $x \in A$ için $m^{x+1} = m \cdot m^x$.

şeklini alırlar.

Not 2.3.9 Bu tanımla $0^0 = 1$ ancak her $n \neq 0$ içinse, bir m ile $n = m + 1$ olacağından, $0^n = 0^{m+1} = 0 \cdot 0^m = 0$ olduğuna dikkat ediniz. $\square$

Artık aritmetik için araçlarımız hazırdır ve açıktır ki $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, ', 0)$ yapısında yaptığımız aritmetiği *herhangi* bir $\mathcal{A} = (A, s^A, 0^A)$ Peano yapısında da yapabiliriz.

2.3.4 Neumann Doğal Sayıları

Sezgisel *doğal sayılar ve tümevarım ilkesi matematiğin olmazsa olmazlarıdır*, onlarsız elde avuçta bir şey kalmaz. $\tilde{\mathbb{U}}$ 'da Peano yapıları eşyapılı olduklarından hiçbir Peano yapısının ayrıcalığı yoktur. Öyleyse ilk işimiz $\mathbb{U}$ matematik evreninde bir Peano yapısı bulmaktır.

2.3.5'te $G : \tilde{\mathbb{U}} \rightarrow \tilde{\mathbb{U}}$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{U}$ için $G(x) := x \cup \{x\}$ olarak, $\tilde{\mathbb{U}} \setminus \mathbb{U}$ da ise istenildiği gibi açıklansın. Bu teoremden $a := \emptyset$ alınsın. Bu durumda *tek* olarak belirli bir $f : \mathbb{N} \rightarrow \tilde{\mathbb{U}}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlayacak biçimde vardır:

1. $f(0) = \emptyset$ ve
2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n') = G(f(n)) = f(n) \cup \{f(n)\}$.

Gerçekte $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{U}$ olduğunu tümevarımla görmeyi okuyucuya bırakıyoruz. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\underline{n} := f(n)$$

olarak tanımlarsak elbette

1. $\underline{0} = \emptyset$
2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\underline{n+1} = \underline{n} \cup \{\underline{n}\}$.

Şimdi öğeleri küme olan bir $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \text{ard}, \underline{0})$ Peano yapısı kolayca verilebilir. $\mathbb{N} := \{\underline{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ve

$$\text{ard} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ ise } \text{ard}(\underline{n}) := (\underline{n}') = \underline{n+1} = \underline{n} \cup \{\underline{n}\}$$

olarak tanımlansın. $\mathbb{N}$ kümesinin öğelerine **Neumann doğal sayıları** denir. İleride ard ardıl fonksiyonunu yine yalın olarak $'$ ile göstereceğiz.

Son kez bir noktaya dikkat çekelim. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{U}$ ($n \rightsquigarrow \underline{n}$) fonksiyonu ile $\mathbb{N} = f[\mathbb{N}]$ olduğundan (Yer) ile gerçekten de $\mathbb{N}$ bir kümedir. Artık okuyucunun kolayca görebileceği benzeri durumlarda hiçbir şey belirtmeden yolumuza devam edeceğiz.

İlk birkaç Neumann doğal sayılarımızı yazalım:

$$\underline{0} = \emptyset, \underline{1} = \{\underline{0}\}, \underline{2} = \{\underline{0}, \underline{1}\}, \dots, \underline{n+1} = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \dots, \underline{n}\} = \underline{n} \cup \{\underline{n}\}, \dots$$

Her bir Neumann doğal sayısı bir kümedir ve bir çok ilginç özellikleri vardır. Her şeyden önce Neumann doğal sayılarının öğeleri de Neumann doğal sayılarıdır. Bir $A \subseteq \mathbb{U}$ kümesi verilsin.

$$\begin{aligned} A \text{ geçişlidir} &: \iff \forall x, y (x \in y \in A \implies x \in A). \\ &\iff \forall y (y \in A \implies y \subseteq A). \end{aligned}$$

Bir A kümesinin geçişli olması için gerek ve yeter koşul her bir öğesinin öğelerini de öğe olarak içermesidir. Sezgisel tümevarımla kolayca *her Neumann doğal sayısının geçişli olduğu görülür*. Gerçekten de $\underline{0}$ geçişlidir. Şimdi $\underline{n}$ geçişli olsun (tvk).

$$\begin{aligned} y \in \underline{n+1} = \underline{n} \cup \{\underline{n}\} &\implies y \in \underline{n} \vee y = \underline{n} \\ \xrightarrow{(tvk)} y \subseteq \underline{n} \vee y = \underline{n} &\implies y \subseteq \underline{n+1}. \end{aligned}$$

Önerme 2.3.10 $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, \text{ard}, \underline{0})$ bir Peano yapısıdır.

Kanıt. Her $\underline{n} \in \mathbb{N}$ için $\text{ard}(\underline{n}) = \underline{n} \cup \{\underline{n}\} \neq \emptyset = \underline{0}$ olduğundan (P1) geçerlidir.

Şimdi $\text{ard}(\underline{m}) = \text{ard}(\underline{n})$ olsun. Tanım gereği $\underline{m} \cup \{\underline{m}\} = \underline{n} \cup \{\underline{n}\}$. Dolayısıyla $\underline{m} = \underline{n}$ veya $\underline{m} \in \underline{n}$. Eğer $\underline{m} = \underline{n}$ ise işimiz biter. Benzer bir irdelemeyle ise $\underline{n} = \underline{m}$ veya $\underline{n} \in \underline{m}$ elde edilir. Böylece $\underline{m} = \underline{n} \vee (\underline{m} \in \underline{n} \wedge \underline{n} \in \underline{m})$ elde ederiz. Ancak Neumann doğal sayıları geçişli olduğundan

$$\underline{m} \in \underline{n} \wedge \underline{n} \in \underline{m} \implies \underline{m} \subseteq \underline{n} \wedge \underline{n} \subseteq \underline{m} \implies \underline{m} = \underline{n}.$$

Son olarak $(P3)^{(2)}$ 'yi kanıtlayalım. $\underline{A} \subseteq \mathbb{N}$ verilsin ve $\underline{0} \in \underline{A}$ ve her $\underline{n}$ için $\underline{n} \in \underline{A} \implies \text{ard}(\underline{n}) \in \underline{A}$ olsun. $A := \{n \in \mathbb{N} \mid \underline{n} \in \underline{A}\}$ olarak tanımlarsak

$A \subseteq \mathbb{N}$ kümesi tümevarım ilkesinin koşullarını sağlar; dolayısıyla $A = \mathbb{N}$ ve $\underline{A} = \underline{\mathbb{N}}$ olur. ■

ard fonksiyonunu karışıklığa yol açmayacağını umarak yine $'$ ile göstereceğiz. İlerde biçimselleştireceğimiz bu $\underline{\mathcal{N}} := (\underline{\mathbb{N}}, ', \underline{0})$ yapısı olacaktır.

CKK kuramında Neumann doğal sayıları için yukarıdaki bilgiler yeterlidir. Okuyucunun kolayca göreceği birkaç bilgiyi vereceğiz. $\mathbb{N}$ kümesindeki doğal sıralamayı $\underline{\mathbb{N}}$ Neumann doğal sayılarına $\underline{m} < \underline{n} \iff m < n$ tanımıyla aktaralım. Elbette $(\underline{\mathbb{N}}, <)$ iyi sıralanmıştır ve öz yapısından dolayı $(\mathbb{N}, <)$ 'de söz konusu bile olmayan bazı özellikler sahiptir:

$$\forall \underline{m}, \underline{n} \in \underline{\mathbb{N}} (\underline{m} < \underline{n} \iff \underline{m} \in \underline{n} \iff \underline{m} \subset \underline{n}) \quad (2.4)$$

$$\forall \underline{n} \in \underline{\mathbb{N}} (\underline{n} = \{\underline{m} \mid \underline{m} < \underline{n}\}), \text{ dd.}$$

$$\forall \underline{n} \in \underline{\mathbb{N}} (\underline{n} = u(\underline{n}, \in) = u(\underline{n}, <)).$$

Sezgisel doğal sayıları tümüyle unutarak yola koyulacağımız Aksiyomatik Kümeler Kuramında ise elimizde Neumann doğal sayılarımız ve $\in$ bağıntımız olacaktır ve orada (2.4), $<$ bağıntısının tanımı olacaktır.

Uzlaşma: Bilindiği gibi amacımız tüm matematiği $\mathbb{U}$ evrenine, daha doğrusu onun bir alt sınıfı olan bir $\mathbb{V}$ evrenine taşımaktır. $\underline{\mathcal{N}}$ bizim $\mathbb{U}$ evrenindeki doğal sayılarımız olacaktır. Yalınlık açısından, $\mathcal{N} \cong \underline{\mathcal{N}}$ olduğundan n ile $\underline{n}$ yi özdeşleyebiliriz. Her $\underline{n}$ Neumann doğal sayısını da yalın biçimde n ile göstereceğiz. Bu durumda elbette

$$0 = \emptyset, 1 = \{0\}, \dots, n+1 = \{0, 1, 2, \dots, n\} = n \cup \{n\}, \dots \quad (2.5)$$

olacaktır. $\mathbb{U}$ da asal öğeler olmadığından, $\mathbb{U}$ evreninde doğal sayılardan sözettiğimizde bunlar Neumann doğal sayıları olacaktır. Benzer biçimde $\underline{\mathbb{N}}$ yerine $\mathbb{N}$ ve $\underline{\mathcal{N}} := (\underline{\mathbb{N}}, ', \underline{0})$ yerine $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, ', 0)$ yazacağız. Herhangi bir durumda n doğal sayısının sezgisel mi yoksa Neumann doğal sayısı mı olduğu önemliyse bunu ayrıca belirteceğiz.

Elbette artık asal öğelerden oluşan $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ kümelerinin yerlerini şimdi, $\mathbb{N}$ Neumann doğal sayılarından kazanacağımız, öğeleri de kümeler olan ve aynı imlerle göstereceğimiz $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ kümeleri alacaktır. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \subseteq \mathbb{U}$ olduğu aşikardır. Neumann doğal sayılarımızın bir özelliğini tekrar vurgulamakta yarar var: Her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$m < n \iff m \in n \iff m \subset n \text{ ve}$$

$$n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \in n\} = u(n, \in) = u(n, <).$$

Şimdi tüm matematiğin bir tek $\in$ ikili bağıntısı üzerine kurulabileceğinin nedenini kısaca söyleyebiliriz. Her şeyden önce az önce belirttiğimiz gibi $\mathbb{U}$

evreninde analizdeki tüm sayı sistemlerimizi kurabiliyoruz. Evrenimiz yeterince zengin demektir. Ancak tüm matematiğin bir tek $\in$ ikili bağıntısı üzerine kurulabilmesini başka yerde aramak gerekir. Matematikte nesnelerimiz gerçek bir varlığa sahip değildir ve bu nedenle onların ne olduğu, fiziksel yapıları bizi hiç mi hiç ilgilendirmez! Matematik nesnelerinin yapısıyla değil onlar arasındaki *bağıntılarla* ilgilenir. Bir A kümesindeki tek basamaklı bağıntılar tamı tamına $B \subseteq A$ altkümeleridir. Altkümeler doğrudan $\in$ bağıntısı ile tanımlanırlar. $A_1 \times \cdots \times A_n$ kümesinde bir n basamaklı bağıntı bir $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ altkümesidir. Bu durumda her n doğal sayısı için $A_1 \times \cdots \times A_n$ kartezyen çarpımının $\in$ bağıntısı yardımıyla tanımlanabileceğini göstermek yeterlidir. Biz ise tüm kartezyen çarpımları iki kümenin kartezyen çarpımına indirgedik. İki kümenin kartezyen çarpımını ise $\in$ bağıntısına indirgemiştik. Bu açıklamalar yeterlidir. Artık rahatlıkla *tüm geleneksel matematik için kümelerin ve bir tek $\in$ ikili bağıntısının yeterli olduğunu söyleyebiliriz.*

Problem 2.3.1 (2.3.5)'in sonucunun kanıtında tanımlanan f fonksiyonunun $\mathbb{N}$ 'den A 'ya bir fonksiyon olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.3.2 Tümevarımla herhangi bir Peano yapısında toplama işleminin birleşmeli ve değişmeli olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.3.3 Peano'nun toplam işleminin yanlış tanımını nasıl düzelttiysek aynı şeyi yanlış çarpma tanımını için de yapınız.

Problem 2.3.4 Herhangi bir Peano yapısında toplama ve çarpma işlemlerini yakın biçimde $+$ ve $\cdot$ ile gösterirsek tümevarımla $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ dağılım kuralını kanıtlayınız.

Problem 2.3.5 Herhangi bir Peano yapısında $m^{n+k} = m^{n \cdot k}$ ve $(m^n)^k = m^{n \cdot k}$ olduğunu tümevarımla kanıtlayınız.

Problem 2.3.6 Neumann doğal sayılarının öğelerinin de Neumann doğal sayıları olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.3.7 $\mathcal{N}$ ve $\underline{\mathcal{N}}$ 'nin eş yapılı olduklarını kullanmadan tümevarımla $\subset$ ve $\in$ bağıntılarının $\underline{\mathbb{N}}$ kümesinde birbirine denk iki doğrusal (aslında iyi) sıralamalar olduğunu kanıtlayınız.

2.4 SAYILAR NEDİR VE NE OLMALILAR ?

Bu bölümün amacı okuyucuya, matematiğin mihenk taşlarından olan, Dedekind'in “ Was sind und was sollen die Zahlen? ([19])” adlı çalışmasının kısa bir özetini

vermektir. Doğal sayıların anlatıldığı bir yerde bu çalışmadan hiç söz etmemek büyük bir haksızlık olurdu! Çalışmayı özetlerken gösterimleri günümüz gösterimlerine uyarlayacağız.

Dedekind çokluklara **sistem** adını verir. Boş kümeyi dışlar. Kullandığı temel bağıntı altküme bağıntısıdır. a nesnesi S sistemine aitse bunu $a \subseteq S$ olarak gösterir. Kastettiği elbette $\{a\} \subseteq S$ 'dir ve biz böyle yazacağız. Bazı ifadelerin sonunda vereceğimiz rakamlar, o önermenin çalışmadaki teorem numarasıdır. Dördüncü paragraf ve ardından gelenler paragraflar halinde özetlenecektirler.

“1888 yılında genç bir doçent olarak Königsberg’ten yola çıkıp tüm Alman üniversitelerini dolaştım. İlk durağım Berlin’de, tüm matematik ortamlarında genç yaşlı herkesin - çoğu karşısında olmak üzere - Dedekind’in o zaman daha yeni çıkmış “Sayılar nedir ve ne olmalılar?” adlı çalışmasından söz ettiğini duydum. Bu çalışma Frege’nin incelemelerinin yanı sıra elementer sayılar kuramını temellendirmenin en önemli ilk derinlemesine bir dene-mesidir [33].”

Kitap “Bilimde kanıtlanabilir ne varsa, ona kanıtsız inanılmamalıdır” tümcesiyle başlar ve gerçekten de sözünü tutar: Tümevarımla kanıtlamanın ve tümevarımla tanımlamanın aslında kanıtlanabilir şeyler olduğunu kanıtlar. Bu bir ilktir. Benzerini sonluötesi için daha sonra Neumann yapacaktır [46].

Dedekind daha ilk sayfada başlıktaki soruyu yanıtlar:

“Bu soruya yanıtlım şudur: Sayılar nesnelerin farklılığını daha kolay ve daha kesin kavramamıza hizmet eden insan aklının serbest yaratılarıdır.”¹⁵

“**Nesne** düşüncemizin konusu olan her şeydir. Nesnelerden kolayca bahsedebilmek için onlar imlerle, örneğin harflerle gösterileceklerdir. Böylece a nesnesinden veya kısaca a ’dan sözedeceğiz; ancak kastettiğimiz elbette bu im değil nesnenin kendisi olacaktır. Bir nesne hakkında düşünülebilen ve söylenebilen şeylerle tam olarak belirlidir. a ve b iki nesne olmak üzere, a için düşünülebilen her şey b için ve b için düşünülebilen her şey a nesnesi için geçerli ise a nesnesi b ’nin aynıdır (b ile özdeştir). a ve b imlerinin bir ve aynı nesnenin isimleri olduğunu $a = b$ ve aynı zamanda $b = a$ olarak da gösterilir. Ayrıca $b = c$ ise, dd. c de tıpkı a gibi b ile gösterilen nesne için bir

¹⁵Dedekind’in “Doğal sayıları tanıyan yaratıcı, gerisi insan işidir” diyen Kronecker’den ne kadar farklı düşündüğüne dikkat ediniz.

im ise elbette $a = c$ 'dir. En az bir özellik a ve b nesnelerinden birinde var diğesinde yoksa bunlara *farklıdır* diyeceğiz.

Çoğu zaman $a, b, c, \dots$ gibi bazı nesneleri herhangi bir nedenle ortak bazı bakış açılarıyla zihninizde bir arada düşünürüz, o zaman onların bir S sistemi oluşturduğu söylenir; $a, b, c, \dots$ nesnelere S sisteminin öğeleri denir, bu nesneler S sistemi tarafından içerilirler; tersine S sistemi bu öğelerden oluşur. Böyle bir S sistemi (oluşumu, çokluğu, topluluğu) düşüncemizin malzemesi olarak bir nesnedir; her nesnenin S 'nin öğesi olup olmadığı belirli ise S sisteminin kendisi tümüyle belirlidir. Dolayısıyla S sisteminin her öğesi T sistemin de öğesi ve T sisteminin her öğesi S sistemin de öğesi ise S sistemi T sistemi ile aynıdır, dd. $S = T$."

Bu temel tanımları olduğu gibi aktardık. Belli nedenlerle boş sistemden vazgeçtiğini, buna karşın tek öğeli sistemlerden bahsetmenin ise avantajlı olduğunu belirtir. Dedekind'in sistemlerinin bugünkü terimlerle sınıflara karşılık geldiğini söyleyebiliriz, bir farkla ki sistemlerde nesneler olduklarından onlar da başka sistemlerin öğeleri olabilirler. Dedekind'in terimleriyle belirli, Cantor'un sözleriyle iyi tanımlı olmanın dışında sistem oluşturmaya hiçbir kısıtlama yoktur. Dedekind'in sistemlerinin tümüyle belirli olması Cantor ve Zermelo için kümelerin iyi tanımlı olmasıyla eş anlamlıdır, yine de Cantor'un tanımının daha ayrıntılı ve kesin olduğu görülür.

Bundan sonrası bildik biçimde devam eder. Altsistemler (= parçalar), öz altsistemler, birleşimler ve arakesit bildik biçimde tanımlanır. Boş sistem dışlandığından arakesit ancak boştan farklı ise vardır, boş ise anlamsızdır. Her defasında arakesitin var olup olmaması işini belirlemeyi okuyucuya bırakır. Birleşimini ve arakesitini aldığımız sistemlerin çokluğuna hiçbir kısıtlama getirilmemiştir. Arakesit, birleşim ve altsistemlere ilişkin bir yığın, akla gelebilecek en basit önermeleri bile kanıtlar.

S kümesinin bir dönüşümünden, S sisteminin her s öğesine, bu öğenin resmi denen belli bir $\varphi(s)$ nesnesi karşılık getiren bir yasaı anlar (Bunlara yine fonksiyon diyeceğiz). Değer bölgesinden söz etmez. Eğer $\varphi(S)$ resmi bir T sisteminin altsistemi ise dönüşüm S sisteminden T sistemine dir. Bir altsistemin resmi, özdeşlik dönüşümü bildik biçimde tanımlanır. Dönüşümlerin birleşimlerini, birebir dönüşümleri ve bunların tersini yine bildik biçimde tanımlar. Yine bu kavramlarla dile getirelebilecek en basit önermeleri bile ifade eder ve kanıtlar. Birebir dönüşümleri Dedekind "benzerlik" olarak isimlendirir.

Aralarında bir tameşleme olan sistemlere benzer sistemler der. Dedekind'in terimleriyle $\varphi(S) = T$ olacak biçimde bir $\varphi : S \rightarrow T$ benzerlik dönüşümü varsa S ve T sistemleri benzerdir denir. Benzer olmanın bir denklik bağıntısı

olduğunu kanıtlar ve tüm sistemleri benzer olanları bir araya toplayarak sınıflara ayırır.

4. Bir sistemin kendine resmi: Çalışma gerçek anlamda dördüncü paragrafta zincir kavramıyla başlar. Bir $\varphi : S \rightarrow S$ fonsiyonu verilmiş olsun. $s \in S$ ve $T \subseteq S$ ise $\varphi(s) =: s'$ ve $\varphi(T) =: T'$ ile gösterilsin. Bir $K \subseteq S$ altkümesine $K' \subseteq K$ ise, daha açıkça $\varphi(K) \subseteq K$ ise K bir $(\varphi-)$ zinciridir. S ve φ sabit verilmiş olsun ve kısaca zincir diyelim. Elbette S bir zincirdir. Zincirlerin arakesitleri de birleşimleri de bir zincirdir. L bir zincir, $A \subseteq S$ ve $A' \subseteq L$ ise $K := A \cup L$ de bir zincirdir ve $A \subseteq K$, $K' \subseteq L$. $A \subseteq S$ altsistemini içeren zincirlerin A_0 arakesiti de bir zincirdir ve buna A sisteminin zinciri der. φ ile ilişkisi vurgulanmak istenirse A_0 yerine $\varphi_0(A)$ yazılır. Dedekind'e uyararak, yanlış anlamaya yol açmayacağını umarak $A = \{a\}$ tek ögeli bir sistem olduğunda A_0 ve A'_0 yerine a_0 ve a'_0 yazacağız. Dedekind $(A_0)' = (A')_0$ olduğunu kanıtlar (57). Bu nedenle kısaca $A'_0 := (A_0)'$ yazar ve bunu A 'nın zincirresmi veya resimzinciri olarak adlandırır. Sonra $A_0 = A \cup A'_0$ olduğunu kanıtlar (58). Bunları okuyucu da kolayca gösterebilir. Ardından aşağıdaki teoremi kanıtlar:

Teorem 2.4.1 Tümevarım teoremi (59): *Herhangi bir Σ sistemi için, S sisteminin altsistemi olsun olmasın, $A_0 \subseteq \Sigma$ olduğunu kanıtlamak için aşağıdakileri göstermek yeterlidir:*

1. $A \subseteq \Sigma$,
2. $(A_0 \cap \Sigma)' \subseteq \Sigma$.

Kanıt. İlk koşuldan dolayı $\emptyset \neq A \subseteq G := A_0 \cap \Sigma \subseteq S$. Dolayısıyla $G' \subseteq A'_0 \subseteq A_0 \subseteq S$. İkinci koşuldan dolayı $G' \subseteq \Sigma$. Böylece $G' \subseteq G \subseteq S$ olur ve G bir zincirdir. Bu, $A \subseteq G$ ve A_0 zincirinin tanımından $A_0 \subseteq G$ olur. Tanım gereği $G \subseteq A_0$ olduğundan sonuçta $A_0 = G \subseteq \Sigma$ olur. ■

İşte bu teorem ileride doğal sayılar için tümevarımla kanıtlama yöntemini verecektir. Bu teorem şöyle de uygulanabilir: Bir $E(s)$ özelliğini A_0 zincirinin tüm ögeleri için kanıtlamak istediğimizde, a) A 'nın her s ögesi için $E(s)$ kanıtlanır, b) A_0 zincirindeki bir s için $E(s)$ doğruysa $E(s')$ 'nin de doğru olduğu gösterilir. Gerçekten de teoremdaki Σ sistemi olarak $E(s)$ 'nin doğru olduğu tüm s ögelerinin sistemini almak yeterlidir.

5. Sonlu ve sonsuz: Bir sistem bir öz altsistemine benziyorsa sonsuzdur, aksi durumda sonludur der¹⁶. Tek ögeli sistemler öz altsistemleri

¹⁶Dedekind bu tanımdan 1882'de Cantor'a, daha önceleri ise Schwarz ve Weber'e sözettğini bildiriyor.

olmadığı için - boş sistemi dışladığımızı unutmayınız - sonludurlar. Sıra Dedekind'in, sonradan bu çalışmayı geri çekmesine yol açan, çalışmasındaki tek sorunlu teoreme geldi. Teoremi ve kanıtını olduğu gibi vereceğiz.

Teorem 2.4.2 *Sonsuz çokluklar vardır*¹⁷.

Kanıt.¹⁸ Benim düşünce dünyam, dd. düşüncemin konusu olabilen tüm nesnelerin S çokluğu sonsuzdur. Çünkü s eğer S 'nin bir ögesi ise s 'nin düşüncemin konusu olduğu s' düşüncesinin kendisi de S 'nin bir ögesidir. Bunu s ögesinin $\varphi(s)$ resmi olarak düşünürsek böylece S 'de belirlenen dönüşümün S' resmi S 'nin bir altsistemidir; hem de S sisteminde (örneğin bizzat kendim gibi) her s' düşüncesinden farklı, dolayısıyla S' 'de olmayan ögeler olduğundan, S' , S 'nin öz altsistemidir. Son olarak a ve b , S 'nin farklı ögeleriye a' ve b' de farklı olacaklarından φ birebirdir ve dolayısıyla S sonsuzdur. ■

Sonra benzer sistemlerin aynı anda sonlu veya aynı anda sonsuz olduklarını (67), ardından sonsuz bir altsistemi olan sistemlerin de sonsuz olduğunu (68) kanıtlar. Sonlu bir sistemin altsistemlerine benzeyen sistemler de sonludur (69). S bir sonlu sistem ve a onun bir ögesi ise $S \setminus \{a\}$ da sonludur (70).

6. Basit sonsuz sistemler. Doğal sayılar serisi. Bir N sistemine birebir bir $\varphi : N \rightarrow N$ fonksiyonu ve bir $a \in N \setminus \varphi(N)$ ögesi $N = \varphi_0(\{a\}) = a_0$ olacak biçimde bulunabiliyorsa basit sonsuz der. Bu a ögesine N 'nin temel ögesi der ve onu 1 ile gösterir. Ayrıca N sistemi φ ile sıralanmıştır der. Uzlaşmamıza göre $\varphi(s)$ ögesi yerine s' yazarsak 1 ögesini içeren her φ - zinciri elbette $1, 1', 1'', 1''', \dots$ ögelerini de içerecektir. Diğer yandan bu ögelerin sistemi ise bir φ - zinciri oluştuturlar, öyleyse $N = \{1, 1', 1'', 1''', \dots\}$ olması istenmiştir. N sisteminin basit sonsuz olması bir $\varphi : N \rightarrow N$ dönüşünü ve bir $1 \in N$ ile aşağıdakilerin sağlanmasına denktir:

1. $1 \in N \setminus N'$.
2. φ birebirdir.
3. $N = 1_0$.

¹⁷Bu teorem ve kanıtı çalışmanın geri kalanını hiçbir biçimde etkilemez. Bu teoremi unutup sonsuz bir kümenin varlığını aksiyomatik olarak istersek çalışma bütünüyle kusursuz kalır.

Bu teorem ve kanıtında sorun nerede? Açmazlarımızı hatırlayın ve S sistemine yönelik sorunu bulunuz.

¹⁸Dedekind benzeri bir irdelenin Bolzano'nun "Sonsuzun açmazları" isimli çalışmasında da bulunduğu notunu düşer.

Bu koşullardan N sisteminin N' öz altsistemi ile benzer olduğunu görürüz. Bu nedenle basit sonsuz sistemler gerçekten de sonsuzdurlar.

Not 2.4.3 $(S, \varphi, 1)$ üçlüsüne baktığımızda bunun bir Peano yapısına çok benzediğini görürüz. Birinci ve ikinci koşullar doğrudan $(P1)$ ve $(P2)$ Peano aksiyomları olduğunu görürüz. Üçüncü koşulumuz $(P3)^{(2)}$ aksiyomundan daha zayıf görünmektedir. Bunun böyle olmadığını kanıtlayacağız, dd. $(P3)^{(2)}$ Dedekind için bir aksiyom değil kanıtlanabilir bir sonuçtur.

Her sonsuz S sistemi basit sonsuz bir N sistemi içerir (72). Gerçekten de tanım gereği birebir bir $\varphi : S \rightarrow S$ fonksiyonu örten olmayacak biçimde vardır. $s \in S \setminus S'$ herhangi bir öğe olmak üzere $N := s_0 := \varphi_0(\{s\}) \subseteq S$ zinciri basit sonsuzdur.

“Bir φ dönüşümü ile sıralanmış bir S sisteminin öğelerinin özel vasıflarından vazgeçer, yalnızca ayırtedilebilirliklerini ve φ sıralayan dönüşümü ile belirlenen birbirine karşı ilişkilerini elde tutarsak bu öğelere doğal sayılar veya sıra sayıları veya doğrudan sayılar ve 1 temel öğesine ise N doğalsayı serisinin temel sayısı denir. Öğelerin tüm diğer içeriklerinden arındırılmaları bağlamında (soyutlama) haklı olarak sayıların insan aklının serbest yaratıları oldukları söylenebilir. Yukarıdaki üç özellikten çıkarılan, dolayısıyla öğelerine raslantıyla verilen isimler ne olursa olsun, tüm basit sonsuz sistemlerde geçerli olan tüm ilişkiler ve yasalar sayılar biliminin veya aritmetiğin sıradaki konusudur.”

Bundan sonra N basit sonsuz sistemi, $1 \in N$ ve $\varphi : N \rightarrow N$ verilmiş olsun ve sabit tutulsun. $n \in N$ için $n' = \varphi(n)$ sayısına n sayısının izleyeni (bugünkü terimlerle ardılı) denir.

Teorem 2.4.4 (79) $K \subseteq N$ bir zincir ve $1 \in K$ ise $K = N$ (Bu önerme tamda $(P3)^{(2)}$ ’tür).

Kanıt. K bir zincir ve $1 \in K$ olduğundan $N = 1_0 \subseteq K_0 = K$. Diğer yandan zaten $N \subseteq N$, dolayısıyla $K = N$. ■

Teorem 2.4.5 Tümevarım Teoremi (80), (n ’den n' ’ye geçiş). Bir teorem bir m_0 zincirinin tüm n öğeleri için kanıtlamak istendiğinde aşağıdaki-leri göstermek yeterlidir:

1. m için doğru olduğu gösterilir.
2. m_0 zincirinin bir n öğesi için doğruysa n' için de doğru olduğu gösterilir.

Kanıt. Bu daha önce verdiğimiz tümevarım teroeminin (59), veya hemen onun ardından söylenenlerin doğrudan sonucudur. ■

7. Daha büyük daha küçük sayılar. Tümevarımla kanıt yöntemiyle donanmış olalarak, Dedekind en ufak ayrıntıyı atlamadan yoluna devam eder. Atlayarak özetleyeceğiz. Her $K \subseteq N$ zinciri tek olarak belirli bir k doğal sayısıyla $K = k_0$ biçimindedir (87). $m, n \in N$ ve $m \neq n$ ise $m_0 \subset n_0$ veya $n_0 \subset m_0$ bağıntılarından biri ve ancak biri doğrudur (88).

$$m < n : \Longleftrightarrow n_0 \subseteq m'_0$$

ile N üzerinde bir sıralama açıklandığını kanıtlar. Bu bir iyi sıralamadır (96). Z_n ile n 'den büyük olmayan doğal sayıların sistemi gösterilir. Elbette

$$m \leq n \Longleftrightarrow Z_m \subseteq Z_n, m < n \Longleftrightarrow Z_m \subset Z, n = Z_n \cap n_0$$

ve $N = Z_n \cup n'_0$. m sayısı $M \subseteq N$ kümesinin büyük ögesi ise $M \subseteq Z_m$. Tersine bir m doğal sayısı ile $M \subseteq Z_m$ ise M sisteminin büyük ögesi vardır.

8. Sayıserisinin sonlu ve sonsuz altsistemleri. Her Z_n ve büyük ögesi olan her $E \subseteq N$ altsistemi sonludur. Z_n ve Z_m ancak ve ancak $n = m$ ise benzerdirler (120).

Teorem 2.4.6 (122) $S \subseteq N$ sisteminin en büyük ögesi yoksa sonsuzdur.

Kanıt. Her $s \in S$ için $\varphi(s)$, S sisteminin s 'den sonra gelen öğelerinin en küçüğü olsun. Elbette $\varphi : S \rightarrow S$ birebirdir, ancak S 'nin en küçük ögesi resim olmadığından örten değildir. ■

9. N 'de fonksiyonların tümevarımla tanımı.

Teorem 2.4.7 (125) Ω herhangi bir sistem, $\theta : \Omega \rightarrow \Omega$ herhangi bir dönüşüm ve $\omega \in \Omega$ herhangi bir öğe olmak üzere her n doğal sayısı için $\psi_n : Z_n \rightarrow \Omega$ fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlayacak biçimde vardır ve tek olarak belirlidirler:

1. $\psi_n(1) = \omega$.
2. Her $t < n$ için $\psi_n(t') = \theta(\psi_n(t))$.

Teorem 2.4.8 (126) **Tümevarımla tanım teoremi.** Ω , ω ve θ bir önceki teoremdaki gibi olsunlar. Bu koşullarda aşağıdaki koşulları sağlayan bir tek $\psi : N \rightarrow \Omega$ fonksiyonu vardır:

1. $\psi(1) = \omega$.
2. Her n doğal sayısı için $\psi(n') = \theta(\psi(n))$.

Bu teoremlerin kanıtını vermeyeceğiz çünkü (2.3.3)'ün kanıtı doğrudan Dedekind'in burada verdiği kanıttan alınmıştır.

Dedekind'in önemli notu: Dedekind tümevarımla tanım teoremiyle, benzer gibi görünseler de, (2.4.1) tümevarım ve (2.4.5) tümevarımla kanıt teoremleri arasındaki farkı vurgular. (2.4.1) *herhangi* bir sistemdeki zincirler için geçerlidir. Buna karşın tümevarımla kanıt teoremi yalnızca N için ifade edilmiştir. Bu teoremden N yerine herhangi bir S sisteminde bir A_0 zincirini alırsak problemle karşılaşabiliriz. Sorun teoremin teklik kısmında değil, varlık kısmındadır. Teklik (2.4.1) ile veya hemen ardından söylenen yöntemle kolayca halledilir. Ancak genel durumda teoremin koşulları birbiriyle çelişebilir. Bir örnek verelim. Ancak önce genel durumda aranan $\psi : A_0 \rightarrow \Omega$ fonksiyonun sağlaması gereken koşulları yazalım: $a \in A_0$, $\omega \in \Omega$ ve $\theta : \Omega \rightarrow \Omega$ verilmiş olsun.

1. $\psi(a) = \omega$.
2. Her $x \in A_0$ için $\psi(x') = \theta(\psi(x))$.

Özellikle $A_0 = a_0$ ise A kümesinden seçtiğimiz öğe bu a olsun. Şimdi iki öğeli $S := \{a, b\}$ ve üç öğeli $\Omega := \{\alpha, \beta, \lambda\}$ sistemleri verilsinler. $\varphi : S \rightarrow S$ ve $\theta : \Omega \rightarrow \Omega$ dönüşümleri $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = a$, $\theta(\alpha) = \beta$, $\theta(\beta) = \lambda$, ve $\theta(\lambda) = \alpha$ olarak açıklansınlar. Bu durumda φ dönüşümüne göre $a_0 = b_0 = S$ olacaktır. Şimdi $\omega := \alpha$ ve $A_0 = a_0$ seçelim ve probleme bir çözüm arayalım. Yani $\psi(a) = \alpha$ ve her $n \in a_0$ için $\psi(n') = \theta(\psi(n))$ koşulunu sağlayan bir $\psi : a_0 \rightarrow \Omega$ fonksiyonu aramaktayız. Ancak böyle bir fonksiyon olamaz! Olsaydı bir yandan $\psi(a) = \alpha$ iken diğer yandan

$$\psi(b) = \psi(a') = \theta(\psi(a)) = \theta(\alpha) = \beta$$

ve buradan da

$$\psi(a) = \psi(b') = \theta(\psi(b)) = \theta(\beta) = \lambda$$

elde ederdik ki bu bir çelişkidir.

Bundan sonra aritmetiği bildik biçimde geliştirir. Bunlara girmeyeceğiz. Ancak şu kadarını belirtelim: Dedekind'de tüm aritmetik işlemlerin tanımları kusursuzdur. Buna karşın ondan sekiz yıl sonra Peano'nun verdiği tanımlar gerçekte tanım değildirler. Bu yanlış tanımlar çoğu kitapta da sürüp gitmektedirler.

Bu bölüm kitaba sonradan eklenmiştir. Bu kaynağa geç ulaştığım için üzgünüm. "Was sind und was sollen die Zahlen?" aslında bir kitapçıktır. İlk baskısı 1888'de yayımlanmıştır. Dedekind ilk taslağını 1872-1878 yılları arasında hazırladığını ve bir çok matematikcinin bunu tartıştığını belirtir.

Peano'nun bu konuya ilişkin çalışması ise 1889'da yayınlanmıştır. Niçin Dedekind aksiyomlarından değil de Peano aksiyomlarından sözedildiğini anlamış değilim!

2.4.1 Düzeltilebilir Dirençli Yanlıklar

Yıl 1888: Dedekind 2.4.8'nin kanıtından sonra, bunun gücünü vurgulamak için iki örnek verir. $G \neq \emptyset$ kümesinde $\cdot$ ile göstereceğimiz bir ikili işlem açıklanmış olsun, dd.

$$\cdot : G \times G \longrightarrow G ((x, y) \rightsquigarrow x \cdot y).$$

$a \in G$ olmak üzere

$$\theta_a : G \rightarrow G (x \rightsquigarrow a \cdot x)$$

olsun. 2.4.8 bize aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\psi : \mathbb{N} \rightarrow G$ fonksiyonunun *varlığını* ve *tekliğini* garanti eder.

1. $\psi(1) = a$ ve
2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\psi(n+1) = \theta_a(\psi(n)) = a \cdot \psi(n)$.

Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a^n := \psi(n)$$

olarak açıklarsak bu iki özellik aşağıdaki şekli alır:

- I $a^1 = a$ ve
- II Her $n \in \mathbb{N}$ için $a^{n+1} = a \cdot a^n$.

Önemli: Bu yaklaşımda a^n öğelerinin tanımları kusursuzdur; I ve II ise bu öğelerin *tanımı değil*, başka biçimde *tanımlanmış öğelerin özellikleridirler*. Ancak elinize alacağınız herhangi bir analiz veya cebir kitabında ise I ve II'nin sol yanındaki terimler sağ yandakilerle tanımlanır ve bu iki önermeyle her $n \in \mathbb{N}$ için a^n tanımlanmıştır denir. Benzer biçimde $S \neq \emptyset$ ve $f : S \rightarrow S$ ise Dedekind sizin de tahmin edeceğiniz gibi doğru olarak her $n \in \mathbb{N}$ için f^n fonksiyonlarını tanımlar ve bunların $f^1 = f$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f^{n+1} = f \circ f^n$ özelliklerine sahip olduğunu belirtir. Ama siz büyük bir olasılıkla bu iki önermeyle f^n fonksiyonlarının tanımlandığını öğrenmişsinizdir.

Yıl 1895: Peano aritmetiği aksiyomatik olarak yapılandırmak istediği “Formoulaire de Mathématiques” çalışmasında doğal sayılar için daha önce sözünü ettiğimiz toplam ve çarpım tanımlarını verir.

Yıl 1930: Landau'nun Analizin Temelleri [38] kitabında biri öğrenciler diğeri öğreticiler için olmak üzere iki önsöz vardır. Öğrencilerden diğeri

önsözü okumamalarını ister. Öğreticiler için yazılmış önsözde içten itiraf- lar vardır. Asistanı Grandjot, Landau'nun ders notlarını kullanarak verdiği analiz dersinin sonunda, ders notunu geri verirken ders sırasında bazı aksi- yomlar eklemek zorunda kaldığını belirtmiştir. Sorunlu gördüğü tanımlar, toplama ve çarpma işlemleri Peano'nunkiler olmak üzere doğal sayılar için açıklanan

$$x + y, x \cdot y, \sum_{i=1}^n x_i \text{ ve } \prod_{i=1}^n x_i \quad (2.6)$$

tanımlarıdır. Bu dürüst ve sevimli önsözü okumayı her meslektaşına öneri- rim. Landau asistanın haklı olduğunu görür ve gerekli düzeltmeleri yapar. (II.2)'de verilen iki tanımın doğru tanımlar olmadığını belirtmiştik.

Yıl 1966: Schmidt, Dedekind'ten seksen yıl sonra hala duymayan kaldıy- sa hala çok sık kullanılmakta olan bu yanlış tanımların tanım olmadıklarını tekrar duyurur [51].

Bu tanımlara ve (2.6)'daki toplam ve çarpımlara hemen birinci sınıfta, ilk yarı yılda gereksinim duyarız. Bu aşamada ise belki tekrarlı teoremi kanıtlamak istemeyebiliriz. Ne yapmalı? Aşağıdaki önerme ve ekini kanıtsız verebilir ve kullanabiliriz. Onların savundukları o kadar akla yatkındır ki, onların savları tartışmasız kabul görür.

$\tilde{U}$ 'da bir $\square : \tilde{U} \times \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ ikili işlemi verilsin. $\square(x, y)$ yerine $x \square y$ yazalım. Ayrıca $\tilde{U}$ 'da bir $h : \mathbb{N} \rightarrow \tilde{U}$ dizisi verilsin. $x_n := h(n)$ alalım. Bu koşullarda aşağıdaki önerme geçerlidir:

Önerme 2.4.9 *Aşağıdaki koşulları sağlayan tek olarak belirli bir $f : \mathbb{N} \rightarrow \tilde{U}$ fonksiyonu vardır:*

1. $f(0) = x_0$ ve
2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n+1) = f(n) \square x_{n+1}$.

Kamıt. (2.3.3)'te $a := x_0$ alalım ve G fonksiyonunu ise her $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için $G(m, n) := n \square x_{m+1}$, diğer yerlerde istenildiği gibi, örneğin özdeş olarak $\emptyset$ olarak açıklayalım. Bu koşullarda 2.3.3 teoremi bize tek olarak belirli

1. $f(0) = x_0$,
2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n+1) = G(n, f(n)) = f(n) \square x_{n+1}$

koşullarını sağlayan bir $f : \mathbb{N} \rightarrow \tilde{U}$ fonksiyonu verir. ■

Sonuç 2.4.10 $X \neq \emptyset$ sınıfında bir $\square : X \times X \rightarrow X$ ikili işlemi ve bir $h : \mathbb{N} \rightarrow X$ dizisi verilmiş olsunlar. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n := h(n)$ olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan bir tek $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ fonksiyonu vardır:

1. $f(0) = x_0$.
2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n+1) = f(n) \square x_{n+1}$.

Kanıt. X 'deki ikili işlemi herhangi bir biçimde $\tilde{U}$ 'da bir ikili işleme genişletelim. (2.4.9)'dan dolayı istenilen koşulları sağlayan bir $f : \mathbb{N} \rightarrow \tilde{U}$ fonksiyonu tek olarak vardır. Geriye $f[\mathbb{N}] \subseteq X$ olduğunu göstermek kalıyor. Bu ise basit bir tümevarım işidir. $M := \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \in X\}$ dersek $f(0) = x_0 \in X$ olduğundan $0 \in M$. Şimdi $n \in M$ olsun, dd. $f(n) \in M$. Buradan ise

$$f(n+1) = f(n) \square x_{n+1} \in M \implies n+1 \in M$$

olur ve işimiz biter. ■

Örnek 2.4.11 (2.4.10)'da $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\square$ işlemi $+$ toplama işlemi olsun. $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ önermemizdeki fonksiyon olmak üzere

$$\sum_{k=0}^n x_k := \sum_{k < n+1} x_k := f(n)$$

olarak tanımlanır. Bu durumda fonksiyonumuzun özellikleri

$$\sum_{k=0}^0 x_k = x_0, \sum_{k=0}^{n+1} x_k = \left(\sum_{k=0}^n x_k \right) + x_{n+1}$$

şeklini alır. $\square$ işlemi $\cdot$ çarpma işlemi olduğunda ise

$$\prod_{k=0}^n x_k := \prod_{k < n+1} x_k := f(n)$$

olarak tanımlanır. Bu durumda fonksiyonumuzun özellikleri

$$\prod_{k=0}^0 x_k = x_0, \prod_{k=0}^{n+1} x_k = \left(\prod_{k=0}^n x_k \right) x_{n+1}$$

şeklini alırlar. Eğer toplama ve çarpma işlemlerimizin sırasıyla 0 ve 1 ile göstereceğimiz etkisiz öğeleri varsa, bu tanımlar

$$\sum_{k \in \emptyset} x_k := 0 =: \sum_{k < 0} x_k \text{ ve } \prod_{k \in \emptyset} x_k := 1 =: \prod_{k < 0} x_k$$

olarak genişletilirler. □

Örnek 2.4.12 (2.4.10)'da $X = \mathbb{U}$ ve $\square$ işlemi olarak $\cup$ işlemini alalım. x_n yerine A_n yazalım ve $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{U}$ teoremimizin verdiği fonksiyon olmak üzere $A_0 \cup \dots \cup A_n := f(n)$ olarak tanımlanır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A_0 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1} = (A_0 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}$$

elde ederiz. $\square$ işlemi $\times$ kartezyen çarpım işlemi aldığımızda ise

$$A_0 \times \dots \times A_n \times A_{n+1} = (A_0 \times \dots \times A_n) \times A_{n+1}$$

elde ederiz. $\square$

Tanımların nasıl yapılacağını öğrenmiş bulunuyoruz. Tekrarlı teoremlerin varlığını ve tekliğini garanti ettiği fonksiyonları kullanıyoruz. Peano yapılarında toplama, çarpma ve üs işlemlerini bu şekilde t_m , p_m ve e_m fonksiyonları yardımıyla yaptık. $\underline{n}$ Neumann doğal sayılarının tanımını yine tekrarlı teoremlerle kazandığımız bir fonksiyon aracılığı ile yaptık. Kuşkusuz doğal sayılar için $n!$ sayısının tanımı size $0! := 1$ ve $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$ olarak verilmiştir. Doğru tanımı şöyle verebilirsiniz: Önce yine $0! := 1$ olarak açıklanır. Ardından (2.4.10)'da $X = \mathbb{N}^*$, işlem çarpma ve $x_k := k$ alınırsa her $n \in \mathbb{N}^*$ için

$$n! := \prod_{k=1}^n k$$

olarak açıklanabilir. $\prod_{k=1}^n x_k$ çarpımını kullanmayan bir başka tanımı (II.17)'de vereceğiz.

Bu kadar örnekten sonra bu tanımların nasıl yapılacağını öğrendik, ancak sorunu biraz ayrıntılı tartışmakta yarar var. Her şeyden önce niçin bu yanlışların sürüp gittiğini kanıtlamamız gerekir. Şimdiye kadar tümevarımla tanım bağlamında yaptığımız tanımlar, tekrarlı teoremler yardımıyla onarılabilir tanımlar olduklarından bir sorunla karşılaşmadık, dd. başımızı duvara çarpmadık. Bir diğer neden de burada, Dedekind gibi keskin zekalı bir matematikçiye gerektiren, farkedilmesi çok zor bir sorunun bulunmasıdır. Tüm bunların yanı sıra herhangi bir biçimsel kuramın nesne dili, dd. kendi öz dili ile bu kuramdam söz ederken kullandığımız sözedeki dil ayrımı ve bu kuramın kendi teoremleriyle, bu kuram hakkında bir başka kuram kullanarak elde ettiğimiz sözedeki teoremler ayrımı ancak aksiyomatik kümeler kuramıyla 20.yüzyılın ilk çeyreğinde netleşmiş kavramlardır. Eğer kümeler kuramı yapmıyorsak, örneğin geleneksel matematikte olduğu gibi Peano Aritmetiği yapıyorsak, diller ve teoremler birbirine karışmış durumdadır. Biçimsel bir kuram olarak işlenecek Aksiyomatik Kümeler Kuramında bazen aşırı titiz izlenimi uyandıracak yaklaşımı anlamamız için de buradaki tartışma önemlidir.

Karşı görüş: Tekrar 2.4.8'e dönelim. Ω bir sistem, $\omega \in \Omega$ ve $\theta : \Omega \rightarrow \Omega$ oradaki gibi verilmiş olsunlar. Bu teoremin kanıtını unutalım ve bir $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \Omega$ fonksiyonunu

- I $\psi(1) := \omega$ ve
- II Her $n \in \mathbb{N}$ için $\psi(n') := \theta(\psi(n))$

olarak tanımlayalım (Burada Dedekind anlamında doğal sayılar söz konusu ve bunlar 1 ile başlar, ancak bu hiç önemli değildir). Şimdi şunu savunuyorum: *I ve II ile ψ fonksiyonunu iyi tanımlanmıştır ve bu özelliklerle tek olarak belirlidir.* Önce hemen tekliği görelim. $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \Omega$ fonksiyonu da bu iki özelliğe sahip olsun. $E := \{n \in \mathbb{N} \mid \psi(n) = \varphi(n)\}$ diyelim. I'den dolayı $1 \in E$, II'den dolayı ise $n \in E$ ise (tvk)

$$\psi(n') := \theta(\psi(n)) \stackrel{tvk}{=} \theta(\varphi(n)) = \varphi(n')$$

dolayısıyla $n' \in E$ olur. Böylece tümevarım teoreminden $E = \mathbb{N}$ olur. Burada sakat bir şey var mı? (Hayır! Bu tamamdır). Diğer yandan herhangi bir $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \Omega$ fonksiyonu, her $n \in \mathbb{N}$ için değeri biliniyorsa, biliniyordur. Şimdi bizim durumumuzda ψ fonksiyonunun 1'deki değeri I'den dolayı biliniyor, $\psi(1)$ değeri I ile tanımlanmıştır (tümevarım başlangıcı), II'den dolayı ise değeri n için biliniyorsa n' içinde biliniyor, dd. " $\psi(n)$ tanımlanmışsa" $\psi(n')$ 'de tanımlıdır (tümevarım adımı), dolayısıyla ψ fonksiyonum her n için tanımlıdır. Sorun nerede?

Sorun artık sizin de sezdiğiniz gibi yalnızca II'de. Orada tanım elenebilirlik koşuluna uymaz. Bir başka sorun " ψ fonksiyonum" tümcesindedir¹⁹. Burada siz ψ fonksiyonunu her iki özelliğe sahip olarak varsayıyorsunuz ve ikinci adımda gösterilen aslında ilk adımın aynısıdır: varsa teklik. Landau'nun II'ye itirazı ise şudur: "II bize $\psi(n)$ tanımlanmışsa $\psi(n')$ 'nün tanımını verir. Fakat biz $\psi(n)$ 'yi hiç de tanımlamış değiliz."

Biraz daha açalım. Bir $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \Omega$ tanım gereği belli koşulu sağlayan bir $\psi \subseteq \mathbb{N} \times \Omega$ altkümesidir. ψ fonksiyonunu vermek demek kümeler kuramının ψ 'yi içermeyen bir η formülüyle

$$\psi := \eta, \text{ (}\eta \text{ formülü hiçbir biçimde } \psi \text{'yi içermez)}$$

olarak açıklamak demektir. Bu söylediklerimizi Dedekind'in 2.4.8 kanıtına dönerek daha iyi belirtebiliriz. Dedekind önce her $n \in \mathbb{N}$ için $Z_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$ olmak üzere bir $\psi_n : Z_n \rightarrow \Omega$ fonksiyonunun

$$\psi_n(1) = \omega \text{ ve } \forall m \in \mathbb{N} (m' \leq n \implies \psi_n(m') = \theta(\psi_n(m)))$$

¹⁹Burada [51]'den bir alıntının tam yeridir. Schmidt der ki "Nürnberg'liler birini yakalamışlarsa asmazlar!". Siz önce şu ψ 'yi bir yakalayın, sonra asarsınız.

olacak biçimde varlığını ve tekliğini kanıtlar. Ardından

$$\psi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \psi_n \quad (2.7)$$

olarak tanımlar. ψ kümeler kuramının bir formülü ile tanımlanmıştır ve tanımlanan tanımlayanda geçmez! Sonra sırasıyla ψ 'nin bir fonksiyon olduğunu, I ve II özelliklerini sağladığını, ardından da tekliğini kanıtlar. Şimdi siz tanım olarak düşündüğünüz I ve II'yi (2.7)'ye benzer bir biçimine sokabilir misiniz?

Olayın bir de sözeden dil ve nesne dili açısından ele alınmasında yarar vardır. Bir $\mathcal{A} = (A, ', 0)$ Peano yapısında aritmetik yapıyor olalım. Evrenimiz A 'dır. Aksiyomlarımız Peano aksiyomlarıdır ve mantıktan aldığımız bir takım çıkarım kurallarımız vardır. Peano Aritmetiğinden anlamak istediğimiz şey bu evrende yaşayan sanal bir yaratığın aksiyomlarından yola çıkarak, kendi kuramının nesne dilindeki formüllerinden çıkarım kuralları yardımıyla kanıtladıkları teoremleri bulmaktır, yoksa bir başka kuramın kendi dilinde “Peano Aritmetiğine” ilişkin teoremler değildir. Sonuncular Peano Aritmetiği hakkında sözeden teoremlerdir (Bu konuya ilişkin açmazların tartışması sırasında söylediklerimize tekrar gözatmakta yarar vardır). Peano Aritmetiğinde anlam taşıyacak tanımlar bu sanal yaratığın anlayabileceği, dolayısıyla kuramın nesne dili ile yapılanlardır.

Şimdi her $n \in A$ için A 'da şimdilik bir $\blacksquare_n$ kara kutusuyla göstereceğimiz nesneler tanımlamak istiyoruz. Bir n için nesnemizin ne olduğunu tanımlamışsak nesnemizi $\square_n$ ile gösterelim. Genelde tanım olarak verilen şema şöyledir: A kümesinden baştan bir $a_0 \in A$ ögesi seçilir, $\square_0 := a_0$ olarak tanımlanır ve ayrıca elimizde bir K kuralı vardır ve her $n \in A$ için $\blacksquare_{n+1} := K(\blacksquare_n)$ olmasını isteriz. Böyle bir denklem ancak nesnemiz n için tanımlanmışsa nesnemizin $n + 1$ için bir tanımına dönüşür, dd. $\square_{n+1} = K(\square_n)$. “ $\square_n$ tanımlanmış olsun”, o zaman $\square_{n+1} := K(\square_n)$ dediğimizde “” içindeki tümce Peano Yapıları Kuramının nesne diline ait değildir; dolayısıyla böylece her n için nesnelerimizin tanımlandığına ilişkin kanıtımız bu kuramın bir kanıtı değildir! Örneğin her n doğal sayısı için tanımlamak istediğimiz nesne $n!$ olsun. Siz

$$0! := 1, 1! := 0! \cdot 1, 2! := 1! \cdot 2, 3! := 2! \cdot 3, 4! := 3! \cdot 4$$

olarak tanımlayabilirsiniz; bunlar Peano Yapıları Kuramında kusursuz tanımlardır. Ancak herhangi bir n doğal sayısı için $n!$ tanımlanmadığı sürece o kuramda

$$(n + 1)! := n! \cdot (n + 1)$$

hiçbir anlam taşımaz! $n!$ tanımlanmamışsa gerçekte bu tanım hiçbir anlam içermeyen

$$(n + 1)! := \blacksquare_n \cdot (n + 1)$$

ifadesine dönüşür.

Tümevarımla kanıtla tekrarlı tanım arasındaki farkı bir kez de şöyle vurgulayalım. Tümevarımla kanıtta her n doğal sayısı için *verilmiş* φ_n önermelerimiz var ve bizden istenen bu önermelerin her birinin doğru olduğunu kanıtlamaktır. *Verilmiş* önermelerimiz yardımıyla tek olarak belirli $M := \{n | \varphi_n \text{ doğru}\}$ kümesi tanımlanır ve bizden istenen $M = \mathbb{N}$ olduğunu göstermektir. Tekrarlı tanımlamada ise bize her n doğal sayısı için bir a_n nesnesi *verilmiş değildir*; bize verilen kural veya kurallardır ve bizden istenen ise bu kuralları sağlayan a_n nesnelerinin varlığını ve tekliğini göstermektir. Öyleyse *önce* bir biçimde bu nesneleri *vermek* durumundayız. Verdiğimiz nesnelerin teklik ve ve kurallara uygunluklarını göstermek ancak bundan sonra gelen şeylerdir.

İzleyeceğimiz yol: Okuyucunun da şimdiden fark ettiği gibi farklı kavramların tanımları farklı fonksiyonların bulunmasını zorunlu kılar ve bazan bazı manevralar yapmak gerekir. Bu yolu katıksız izlemek sıkıcı bir hal alabilir. Ama yine de biz aritmetiğin temel kavramlarının tanımlarını kusursuz verdik. Bir de tüm matematiği üzerine kurmayı planladığımız kümeler kuramının temel kavramlarının tanımların tekrarlı teorem yardımıyla kusursuz olarak yapacağız. Ancak bazı teoremlerin kanıtında, kanıtları fazla uzatmamak için dahi olsa, daha önceki gevşek yolu izlemekte bir sakınca görmeyeceğiz.

2.4.2 Doğal Sayılarımızı Biliyor muyuz?

Epeyce yol aldık, iyi güzel de doğal sayılar nelerdir? Dedekind ve Peano ile yaptığımız şey Peano yapılarını araştırma ve orada aritmetiğin temellerini atmak olmuştur. Ancak Peano bize bir Peano yapısı sunmamıştır. Dedekind biraz daha fazlasını çok daha doğru söylemiştir. O her sonsuz sistemde bir sayıserisi, dd. bir Peano yapısı bulunduğunu kanıtlamıştır. Ne var ki bize bir sonsuz sistem bulmak düşünüyor. Bir tane bulsak gerisi tamam. Dedekind bir sonsuz sistemin varlığını kanıtlamıştır, ancak bu kanıt ve sistem çelişkili olduğundan kabul edilemez.

Dedekind ve Peano ile, eğer bir sayıserisi varsa veya bir Peano yapısı varsa bunların sahip olacakları özellikleri araştırdık. Onlar yardımıyla Neuman doğal sayılarımızı da tanımladık. Dedekind doğal sayılardan yola çıkarak tam, rasyonel, gerçekte ve karmaşık sayıların nasıl kazanılacağını da göstermiştir.

Tüm gereksinimiz bir sonsuz küme! Onun varlığını ise aksiyom olarak istemekten başka çaremiz yok. Dolayısıyla Aksiyomatik Kümeler Kuramında bir sonsuz kümenin varlığı bir aksiyom olarak istenir. O aksiyomda “sonsuz” kelimesi geçmez, ancak tüm Neumann doğal sayılarını öge olarak içermesi garanti edilir; bu yeterlidir.

2.5 EŞGÜÇLÜ KÜMELER

İnsanın bir bakışta *saymadan* algılayabildiği çokluk dörttür [34]. Bu sayının kargalarda üç olduğu göz önüne alınırsa görsel çokluk kavrayışımızın pek gelişmiş olduğu söylenemez. Bugün bile bazı kabilelerin dillerinde dörtten büyük çokluklar için bir ad bulunmadığını biliyoruz. Bu bize *sayma* işleminin insanoglunun sıradan bir etkinliği olmadığını ve oldukça gelişmiş bir soyutlama yeteneğini gerektirdiğini kanıtlar. Buna rağmen çok eski zamanlarda bile insanlar çoklukları *kıyaslamayı* öğrenmişlerdir. Örneğin koyunlarının çokluğunu akılda tutmak için değişik yöntemler geliştirmişlerdir: Bir koyun-bir kertik, bir koyun-bir çakıl taşı, bir koyun-bir düğüm, bir koyun-bir parmak boğumu vb... . Bir koyun-bir taş eşlemesini yaptığımızda aslında K koyunlar kümesinden T taşlar kümesine bir $f : K \rightarrow T$ fonksiyonu tanımlamış olmaktadır. İkisi aynı anda bittiğinde, dd. f bir tameşleme olduğunda ne kadar koyun varsa o kadar taş vardır diyoruz. Koyunlar bittiğinde henüz eşleşmemiş taşlar varsa, f birebir ama örten değildir ve bu durumda koyunların az olduğu sonucuna varırız. Bu en eski matematiksel sezgimiz bugün de çoklukları kıyaslamada kullandığımız en güvenilir ölçümümüzdür.

Tanım 2.5.1 A ve B iki küme olmak üzere:

1. A ile B **eş güçlüdür** (imlerle : $A \sim B$) : $\iff \exists f : A \rightleftarrows B$ (tameşleme). $\neg(A \sim B)$ yerine bazen kısaca $A \not\sim B$ yazacağız.
2. A **en fazla B kadar güçlüdür** (imlerle : $A \preceq B$) : $\iff \exists f : A \rightarrow B$ (birebir).
3. B , A 'dan **daha güçlüdür** (imlerle : $A \prec B$) : $\iff (A \preceq B) \wedge \neg(A \sim B)$.

Seçme Aksiyonu kullanılarak kolayca, $A \neq \emptyset$ ise

$$\exists f : A \rightarrow B \text{ birebir} \iff \exists g : B \rightarrow A \text{ örten}$$

kanıtlanabilir. Böylece $A \neq \emptyset$ ise

$$A \preceq B \iff \exists f : A \rightarrow B \text{ (birebir)} \iff \exists g : B \rightarrow A \text{ (örten)}.$$

Kolayca görüleceği gibi

- (1) $A \sim A$.
- (2) $A \sim B \implies B \sim A$.
- (3) $A \sim B \wedge B \sim C \implies A \sim C$.

Bu özellikler bize her X kümesi için $\sim$ bağıntısının $\mathcal{P}(X)$ 'de bir denklik bağıntısı olduğunu söyler. Ancak herhangi bir $\emptyset \neq x \in \mathbb{U}$ için $[x]_{\sim} = \{y \in \mathbb{U} \mid x \sim y\}$ bir küme değildir ve bu CKK'da çokluk ve sıra sayılarının tanımındaki zorlukların nedenidir. Örneğin $a \in \mathbb{U}$ için $[\{a\}]_{\sim} = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{U}\}$ tek öğeli kümelerin sınıfı bir küme olsaydı $\bigcup[\{a\}]_{\sim} = \mathbb{U}$ 'nun da bir küme olması gerekirdi!

$2 = \{0, 1\}$ ve A herhangi bir küme olmak üzere ${}^A 2 = \{f \mid f : A \longrightarrow 2\}$. $X \subseteq A$ altkümesi için

$$c_X(a) := \begin{cases} 1 & a \in X \\ 0 & a \in A \setminus X \end{cases}$$

ile tanımlanan $c_X : A \longrightarrow 2$ fonksiyonuna X kümesinin A kümesindeki **özgün (karakteristik) fonksiyonu** denir. Her $X \in \mathcal{P}(A)$ için $f(X) := c_X$ ile tanımlanan $f : \mathcal{P}(A) \longrightarrow {}^A 2$ fonksiyonu bir tameşlemedir.

Teorem 2.5.2 *Her A, B ve C kümeleri için*

1. ${}^A 2 \sim \mathcal{P}(A)$.
2. $B \cap C = \emptyset$ ise ${}^{B \cup C} A \sim {}^B A \times {}^C A$.
3. ${}^C({}^B A) \sim {}^{B \times C} A$.
4. ${}^C(A \times B) \sim {}^C A \times {}^C B$.

Kanıt. 1. $X \subseteq A$ altkümesini c_X özgün fonksiyona resmeden dönüşüm $\mathcal{P}(A)$ kümesinden ${}^A 2$ kümesine bir tameşleme tanımlar.

2. Bir $f : B \cup C \longrightarrow A$ fonksiyonunu $(f|_B, f|_C)$ 'ye resmeden fonksiyon ${}^{B \cup C} A$ kümesinden ${}^B A \times {}^C A$ kümesine bir tameşleme tanımlar.

3. Bir $f \in {}^{B \times C} A$ verilsin. Her $c \in C$ için $f_c(b) := f(b, c)$ ile bir $f_c \in {}^B A$ tanımlanır. $f^*(c) := f_c$ olarak tanımlanırsa bir $f^* \in {}^C({}^B A)$ elde edilir. $g(f) := f^*$ ile tanımlanan $g : {}^{B \times C} A \longrightarrow {}^C({}^B A)$ fonksiyonu bir tameşlemedir.

4. Her $f : C \longrightarrow A \times B$ fonksiyonu tek olarak belirli $f_1 : C \longrightarrow A$ ve $f_2 : C \longrightarrow B$ fonksiyonları ile her $x \in C$ için $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ biçimindedir. $g(f) := (f_1, f_2)$ olarak tanımlanan $g : {}^C(A \times B) \longrightarrow {}^C A \times {}^C B$ fonksiyonu bir tameşlemedir. ■

Teorem 2.5.3 A, B ve C herhangi üç küme olmak üzere

1. $A \preccurlyeq A$,
2. $A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A \implies A \sim B$, (*Cantor-Schröder-Bernstein Teoremi*)
3. $A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq C \implies A \preccurlyeq C$.

Not 2.5.4 Genellikle Schröder-Bernstein teoremi olarak bilinen bu teoremi ilk kez açık biçimde Dedekind ifade etmiş ve 1887 günlüğünde aşağıda izleyeceğimiz yayınlanmamış kanıtı vermiştir. Rautenberg bu kanıtın ilk kez ders notunda yayınladığını belirtmektedir. Bu kanıt bir yandan Seçme Aksiyomunu, güç kümesi aksiyomunu ve sonsuzluk aksiyomunu kullanmazken diğer yandan olduğu gibi sınıflara aktarılabilirdiği için de önemlidir. $\square$

Kanıt. Birinci ve üçüncü önermeler açıkça doğrudurlar. Kanıtlanması gereken 2. önermedir. Bunu kanıtlamak için aşağıdaki önermeyi kanıtlamak yeterlidir:

$$(*) \quad Y \subseteq X \wedge X \preccurlyeq Y \implies X \sim Y.$$

Şimdi $(*)$ doğru ve $A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A$ olsun. Tanım gereği $f : A \rightarrow B$ ve $g : B \rightarrow A$ birebir fonksiyonları vardır. $C := \text{res } g$ olmak üzere $C \subseteq A$ ve $h := g \circ f : A \rightarrow C$ birebirdir. Böylece $C \subseteq A \wedge A \preccurlyeq C$, dolayısıyla $(*)$ ile $A \sim C$ olur. Ayrıca $g : B \xrightarrow{\sim} \text{res } g = C$ olduğundan $C \sim B$, sonuçta $A \sim B$.

■

Şimdi $(*)$ ayrı bir teorem olarak kanıtlanacaktır.

Teorem 2.5.5 $B \subseteq A \wedge A \preccurlyeq B \implies A \sim B$. Sözlerle: Bir A kümesinden kendisinin bir B altkümesine birebir bir dönüşüm varsa A ve B eş güçlüdürler.

Sonuç 2.5.6 $B \subseteq X \subseteq A$ ve $B \sim A$ ise $X \sim A$.

Kanıt. Tanım gereği bir $f : A \rightarrow B$ birebir fonksiyonu vardır. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(A)$ kümesi

$$(1) \quad f^{-1}[P] \subseteq P, \quad \text{ve} \quad (2) \quad P \cap B \subseteq \text{res } f$$

koşulunu sağlayan P ögelerinden oluşsun, dd. $\mathcal{S} := \{P \in \mathcal{P}(A) \mid (1) \wedge (2)\}$. $U := \bigcup \mathcal{S}$ olsun. $x \in A \setminus B$ ise $x \notin \text{res } f$ olacağından $P = \{x\}$ kümesi için $(1) \wedge (2)$ sağlanır, dolayısıyla $x \in U$. Buradan $A \setminus U \subseteq B$ çıkar. Dolayısıyla

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & , x \in U \\ x & , x \in A \setminus U \end{cases}$$

ile bir $g : A \rightarrow B$ fonksiyonu tanımlanır. Biz $g : A \rightleftharpoons B$ olduğunu savunuyoruz. $x \in U$ olsun. Bir P ile $x \in P \in \mathcal{S}$ olacaktır. $P' := P \cup \{f(x)\} \in \mathcal{S}$ olduğu kolayca görülür:

$$P' \cap B = (P \cap B) \cup \{f(x)\} \subseteq resf$$

ve f birebir olduğundan

$$f^{-1}[P'] = f^{-1}[P] \cup \{x\} \subseteq P \subseteq P'.$$

Dolayısıyla $f(x) \in U$ ve bu nedenle

$$(3) \quad f[U] \subseteq U.$$

Önce g fonksiyonun birebir olduğunu görelim. Şimdi $x, x' \in A$ ve $x \neq x'$ olsun. Bu iki öğenin ikisi de U kümesinde veya ikisi de $A \setminus U$ kümesindeyse $g(x) \neq g(x')$ olduğu aşıkardır. Şimdi $x \in U$ ve $x' \in A \setminus U$ olsun. Bu durumda (3)'ten $g(x) = f(x) \in U$, ayrıca $g(x') = x' \in A \setminus U$ olacağından yine $g(x) \neq g(x')$ olur.

Son olarak g 'nin örten olduğunu görelim. $y \in B$ keyfi verilsin. $y \notin U$ ise $y = g(y) \in resg$. $y \in U$ ise, örneğin $y \in P \in U$ ise (2)'den dolayı $y \in resf$ olur. Bir x ile $y = f(x)$. Bu durumda ise (1) ile $x \in f^{-1}[P] \subseteq P$, dolayısıyla $x \in P$, bunun sonucunda ise $x \in U$ olur. Böylece $g(x) = f(x) = y$, dolayısıyla yine $y \in resg$ olur.

Sonucun kanıtı: $f : A \rightarrow B$ birebir ve $i : B \rightarrow X$ doğal gömme olmak üzere $g := i \circ f : A \rightarrow X$ birebirdir. Dolayısıyla $A \preceq C$ olacağından teoremden $A \sim C$ olur. ■

Not 2.5.7 Bu yalın ve güzel kanıttan sonra (2.5.3) için ikinci bir kanıt vereceğiz. Bu kanıtta önce ekimizi kanıtlayacağız. $B \subseteq X \subseteq A$ ve $B \sim A$ ise $X \sim A$ olduğunu savunuyoruz. $X = A$ ise kanıtlanacak bir şey yoktur. Bu nedenle $Y := A \setminus X \neq \emptyset$ varsayalım. Verilerden dolayı bir $f : A \rightleftharpoons B$ tameşlemesi vardır. Tekrarlı tanımlamayla bir $g : \mathbb{N} \rightarrow U$ fonksiyonu

$$g(0) := Y \text{ ve } g(n+1) := f[g(n)]$$

olarak tanımlansın. $Z := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g(n)$ olmak üzere bir $h : A \rightarrow X$ fonksiyonu

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & , x \in Z \\ x & , x \notin Z \end{cases}$$

olarak tanımlansın. h fonksiyonunun bir tameşleme olduğunu savunuyoruz.

Önce örtenliği gösterelim. $x \in X$ keyfi verilsin. $x \notin Z$ ise $x = h(x) \in resh$. $x \in Z$ olsun. $x \in X$ olduğundan $x \notin A \setminus X = g(0)$. Bu nedenle bir n ile $x \in g(n+1) = f[g(n)]$. Dolayısıyla bir $z \in Z$ ile $x = f(z) = h(z)$.

Şimdi de h dönüşümünün birebir olduğunu görelim. $x, y \in A$ ve $x \neq y$ olsun. h ayrı ayrı Z ve $A \setminus Z$ 'de birebir olduğundan $x \in Z$ ve $y \notin Z$ durumunu irdelemek yeterlidir. Ancak bu durumda $h(y) \notin Z$ ve $h(x) = f(x) \in Z$ olacağından $h(x) \neq h(y)$ olur ve h birebirdir.

Şimdi $B \subseteq A \wedge A \preceq B$ olsun. Birebir bir $k : A \rightarrow B$ dönüşümü vardır. $k[A] \subseteq B \subseteq A$ ve $k[A] \prec A$ olduğundan az önce kanıtladığımızla $B \prec A$ olur. Bu kanıt da kısa ve güzel bir kanıt olmasına karşın her iki kanıt arasında önemli bir fark vardır. İlk kanıt kümeler kuramının çok erken evresinde verilebilirken ikinci kanıt için epeyce yol katetmek gerekecektir: Doğal sayıları tanımlamış ve tekrarlı tanımlamayı öğrenmiş olmanız gerekecektir. Bu kanıt aslında Dedekind'in tekrarlı tanımlamayı kullanmayan bir kanıtının, Dedekind'in zincir kavramı kullanılmadığı için, aslında yalın bir kanıtın karmaşıklaştırılmış şeklidir²⁰. Dedekind bu kanıtı Cantor'a 1899'da yazdığı bir mektupta bildirmiştir ([16], *Aus dem Briefwechsel zwischen Cantor und Dedekind*). Burada tanımlanan Z kümesi Y kümesinin f -zincirinden başka şey değildir, dd. $Z = f_0(Y)$. $\square$

Örnek 2.5.8 Bir A kümesinden kendisinin bir B altkümesine birebir bir fonksiyon bulabiliyorsak teorem (2.5.5)'ten dolayı $A \prec B$ olur. $0 \neq r \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayılarımızı sadeleştirilmiş biçimlerde $m, n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ olmak üzere $r = \frac{m}{n}$ olarak yazalım ve m ile $\frac{m}{1}$ öğelerini özdeşleyerek $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ elde edelim. p, q ve σ birbirinden farklı herhangi üç asal sayı olmak üzere

$$m > 0 \text{ ise } f\left(\frac{m}{n}\right) := p^m q^n, \quad m < 0 \text{ ise } f\left(\frac{m}{n}\right) := \sigma^{-m} q^n \text{ ve } f(0) := 0$$

ile tanımlanan $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ dönüşümü birebirdir. Dolayısıyla $\mathbb{Q} \prec \mathbb{N}$, bunun sonucu olarak da $\mathbb{Q} \prec \mathbb{Z} \prec \mathbb{N}$. $\square$

Örnek 2.5.9 $\mathbb{R}$ uzayında herhangi iki açık aralık eşgüçlüdür. Gerçekten de $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sayıları $a < b$ ve $\alpha < \beta$ olacak biçimde verilsinler. Her $x \in (a, b)$ için

$$f(x) := \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x - a) + \alpha$$

ile tanımlanan $f : (a, b) \rightarrow (\alpha, \beta)$ fonksiyonu bir tameşlemedir. Diğer yandan

$$g(x) := \frac{x}{|x| + 1}$$

ile tanımlanan $g : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ bir tameşlemedir. Böylece $\mathbb{R}$ her açık aralıkla, bunun bir sonucu olarak da bir açık aralık içeren her altkümeyle eşgüçlüdür. $\square$

²⁰Dedekind'in "Was sind und was sollen die Zahlen" kitapçığını kitap tamamlandıktan sonra incelediğim için bunu da geç farkettim.

Örnek 2.5.10 Her $k \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{N}_k := \{k, k+1, k+2, \dots\}$ ve $t_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_k$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $t_k(n) := k+n$ ile tanımlanmış fonksiyon olsun. t_k 'ler birebir (aslında tameşleme) olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_k$. $\square$

Örnek 2.5.11 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ve $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dönüşümleri $f(n) := (n, 0)$ ve $g(m, n) := 2^m \cdot 3^n$ olarak tanımlansınlar. Bu iki fonksiyon da birebir olduğundan (2.5.3) ile $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ elde edilir. $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ olduğundan $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ elde edilir. Buradan tümevarımla kolayca her $0 \neq n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^n \sim \mathbb{Q}^n$ gösterilir. $\square$

Örnek 2.5.12 Şimdi ${}^{\mathbb{N}}2 \sim \mathbb{R}$, dolayısıyla bir sonraki teoremizle birlikte $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ olduğunu savunuyoruz. $2 = \{0, 1\}$ olduğu için herhangi iki öğeli A kümesi, özellikle $A = \{0, 2\}$ kümesi için ${}^{\mathbb{N}}2$ ve ${}^{\mathbb{N}}A$ kümeleri eş güçlüdürler. Her $x \in {}^{\mathbb{N}}A$ için

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(n)}{3^{n+1}}$$

ile tanımlanan $f : {}^{\mathbb{N}}A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu birebirdir. Bu nedenle ${}^{\mathbb{N}}2 \preceq \mathbb{R}$. Diğer yandan ${}^{\mathbb{N}}2 \sim P(\mathbb{N})$ olduğunu biliyoruz (2.5.2). Geriye $\mathbb{R} \preceq P(\mathbb{N})$ olduğunu göstermek kalıyor. Örnek 2.5.9'dan dolayı $I = (0, 1)$ olmak üzere $I \sim \mathbb{R}$ olduğundan bir birebir $g : I \rightarrow P(\mathbb{N})$ bulmak yeterlidir. Her $x \in I$ sayısı, 9'lu tekrar olmamak koşuluyla, tek biçimde ondalık açılımla $x = 0.x_0x_1x_2x_3 \dots$ olarak yazılabilir.

$$g(x) := \{x_0, x_0x_1, x_0x_1x_2, x_0x_1x_2x_3, \dots\}$$

olarak tanımlanan $g : I \rightarrow P(\mathbb{N})$ fonksiyonun birebir olduğu apaçıktır ve işimiz biter²¹. $C := \text{res } f$ kümesi **Cantor kümesi** olarak bilinen önemli bir kümedir. Elbette yan ürün olarak $C \sim I \sim \mathbb{R}$ elde ettik.

$\mathbb{R} \preceq P(\mathbb{N})$ olduğunu başka şekilde de kolayca görebiliriz. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$ olduğundan $P(\mathbb{N}) \sim P(\mathbb{Q})$ olur (Prob.2.5.3). Herhangi farklı iki gerçekte sayı arasında bir rasyonel sayı bulunduğundan $f : \mathbb{R} \rightarrow P(\mathbb{Q})$ ($r \rightsquigarrow \{x \in \mathbb{Q} : x \leq r\}$) fonksiyonu birebirdir. Dolayısıyla $\mathbb{R} \preceq P(\mathbb{Q}) \sim P(\mathbb{N})$. $\square$

Örnek 2.5.13 İkinci örneği genelleştireceğiz. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Öklid normu olsun. $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ve pozitif $r \in \mathbb{R}$ için

$$B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$$

²¹Burada örneğin $x_0 = 3$, $x_1 = 2$ ise x_0x_1 'den 32 doğal sayısı kastedilmiştir.

ile a merkezli r yarıçaplı açık topu gösterelim. Merkez orijin olduğunda, dd. $a = (0, \dots, 0)$ olduğunda bu topu kısaca B_r ile gösterelim. Her $r > 0$ için

$$g_r : B_1 \longrightarrow B_r \quad (x \rightsquigarrow rx = (rx_1, \dots, rx_n))$$

dönüşümü bir tameşlemedir. Diğer yandan $\mathbb{R}^n$ 'de

$$t_a(x) := x + a$$

ile tanımlanan öteleme dönüşümü B_r açık topunu birebir olarak $B_r(a)$ açık topu üzerine resmeder, dolayısıyla $B_r \sim B_r(a)$. Bu nedenle $\mathbb{R}^n$ uzayındaki herhangi iki açık top eşgüçlüdür. Ayrıca her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$b(x) := \frac{x}{\|x\| + 1}$$

ile tanımlanan $b : \mathbb{R}^n \longrightarrow B_1$ dönüşümü bir tameşlemedir. Sonuçta $\mathbb{R}^n$ uzayı kendisindeki her açık topla eşgüçlüdür. Bunun bir sonucu olarak da bir iç nokta içeren, dd. bir açık top içeren her altkümesiyle eşgüçlüdür. $\square$

Örnek 2.5.14 Şimdi her $0 \neq n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$ olduğunu görelim. Bunun için $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$ olduğunu göstermek yeterlidir, gerisi bir tümevarım işidir. $D := [0, 1) \times [0, 1)$ ve $I := [0, 1)$ olmak üzere (2.5.13) ve (2.5.9) nolu örneklerden dolayı $\mathbb{R}^2 \sim D$ ve $\mathbb{R} \sim I$ olduğundan $D \sim I$ olduğunu göstermek yeterlidir. Her $x \in I$ sayısı, 9'lu tekrar olmamak üzere tek olarak belirli bir $x = 0.x_0x_1x_2x_3 \dots$ ondalık açılma sahiptir. $D = I \times I$ olduğundan herhangi bir $p = (x, y) \in D$ için $x, y \in I$. $x = 0.x_0x_1x_2x_3 \dots$ ve $y = 0.y_0y_1y_2y_3 \dots$ olsun. Bu durumda

$$f : D \longrightarrow I \text{ ve } g : I \longrightarrow D \text{ fonksiyonları}$$

$$f(x, y) := 0.x_0y_0x_1y_1x_2y_2 \dots \quad \text{ve} \quad g(x) := (x, 0)$$

olarak tanımlansınlar. Her iki fonksiyon da birebir olduklarından (2.5.3) ile $D \sim I$ elde edilir. $\square$

Kısaca Cantor'un [5] çalışmasından söz edeceğiz. Cantor'un kümeler kuramına ilişkin ilk çalışması diyebileceğimiz bu çalışmada henüz "küme", "sayılabilirlik" ve "güç" kavramları ve sıradaki teoremin ardından gelen teoremden vereceğimiz "köşegen yöntemi" ortalıkta yoktur. Cantor önce cebirsel sayıları doğal sayılarla numaralayabileceğimizi, bugünkü terimlerle bu sayıların kümesinin sayılabilir olduğunu kanıtlar. Bunu kolaylıkla kanıtlamasına karşın aşağıdaki teoremi kanıtlarken oldukça zorlandığını belirtir:

Teorem 2.5.15 *Doğal sayılarla numaralanmış ve birbirinden farklı*

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots$$

gerçek sayıları nasıl verilirse verilsinler keyfi verilen her (α, β) aralığında bu dizide olmayan bir η gerçek sayısı bulabiliriz [5]²².

Kanıt. Şimdi $\alpha < \beta$ olmak üzere (α, β) açık aralığı verilsin. Bu aralığa düşen ω_ν sayıları birden fazla ise bunlardan numaralarına göre ilk ikisi α', β' ve $\alpha' < \beta'$ olsun. (α', β') aralığına düşen ω_ν sayıları birden fazla ise bunlardan numaralarına göre ilk ikisi α'', β'' ve $\alpha'' < \beta''$ olsun. Böyle devam edersek iki durumla karşılaşırız.

Birinci Durum: Sonlu adım sonra içinde ω_ν sayılarından en fazla bir tane bulunan bir $(\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)})$ aralığına ulaşırız. Bu aralıkta, eğer varsa, içine düşen ω_ν sayısından farklı seçeceğimiz her η işimizi görür.

İkinci Durum: Birinci durum söz konusu değildir. Bu durumda

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots$$

dizisinin kesin artan

$$\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots$$

alt dizisi ile kesin azalan

$$\beta', \beta'', \beta''', \dots$$

dizilerini ve bunların belirlediği

$$(\alpha, \beta) \supset (\alpha', \beta') \supset (\alpha'', \beta'') \supset \dots$$

iç içe aralıklar dizisini elde ederiz. $\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots$ kesin artan ve üstten sınırlı olduğundan bir α^∞ gerçek sayısına, $\beta', \beta'', \beta''', \dots$ kesin azalan ve alttan sınırlı olduğu için bir β^∞ gerçek sayısına yakınsar. Burada da iki durum söz konusudur. Bu durumları irdelemeden önce hemen belirtelim ki aralıklarımızın tanımı gereği daima $\omega_\nu \notin (\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)})$. Birinci durum $\alpha^\infty = \beta^\infty$ olmasıdır. Bu durumda $\eta = \alpha^\infty$ alabiliriz. Herhangi bir p doğal sayısı için $\alpha^\infty = \omega_p$ olamaz; çünkü bir yandan $\alpha^\infty \in (\alpha^{(p)}, \beta^{(p)})$, diğer yandan $\omega_p \notin (\alpha^{(p)}, \beta^{(p)})$! İkinci durumda ise $\alpha^\infty < \beta^\infty$. Bu kez $(\alpha^\infty, \beta^\infty)$ aralığından seçeceğimiz her bir η gerçek sayısı $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots$ dizisinde geçmez. ■

Durup soluklanmanın tam zamanı! Şu anda kanıtını verdiğimiz teorem matematikte çığır açan, farklı türden sonsuzluklarla ilk temasa geçtiğimiz, kümeler kuramını başlatan teoremdir. Cantor'un epeyce zihinsel çaba harcamasına yol açsa da sonunda ortaya çıkan kanıt yalınlık ve anlaşılabilirliği ile

²²Bu teoremin ifadesinde ve kanıtında Cantor'un gösterimlerine sadık kaldık. Günümüzde bu teoremin, bir kısmıyla kitabımızda da karşılaşacağınız, kısa ve anlaşılır kanıtları vardır. Teoremin Kümeler Kuramı'ndaki öneminden dolayı size bu ilk kanıtı da sunmak istedik.

insanı şaşırtmaktadır. Bu Cantor'un tüm makalelerinin ortak özelliğidir. Daha sonra [13]'de bu teoremin köşegen yöntemiyle daha yalın bir kanıtını verir. Aslında mutlaka karşılaşmış olacağınız köşegen yöntemiyle doğal sayılar kümesinden iki ögeli bir kümeye tüm fonksiyonların kümesinin sayılamayacağını kanıtlar. Şimdi vereceğimiz teorem ve kanıtı, Öklid'in asal sayıların sonsuz çoklukta olduğunu söyleyen teorem ve kanıtını yadsımamakla birlikte, matematikteki önemi, kanıtın yalınlığı ve güzelliği açısından kuşkusuz zirvededir.

Teorem 2.5.16 (Cantor) Her A kümesi için $A \prec \mathcal{P}(A)$.

Kanıt. $f(a) := \{a\}$ ile tanımlanan $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ dönüşümü birebir olduğundan $A \preceq \mathcal{P}(A)$. Herhangi bir $g : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ fonksiyonunun örten olamayacağını gösterirsek işimiz biter.

$g : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ fonksiyonunun örten olduğunu varsayalım.

$$B := \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$$

kümesi A kümesinin bir altkümesi olduğundan en az bir $a \in A$ ögesinin resmidir, dd. $g(a) = B$. Eğer $a \in B$ ise B 'nin tanımından $a \notin g(a)$, dolayısıyla $a \notin B$ olacaktır. Böylece $a \in B \implies a \notin B$ olduğunu kanıtladık. Şimdi $a \notin B$ olduğunu varsayalım. B 'nin tanımından $a \in g(a)$, dolayısıyla $a \in B$ olacaktır. Sonuçta $a \in B \iff a \notin B$ çelişkisini elde ederiz ve işimiz biter. ■

Köşegen Yöntemi: İnanılmaz yalınlıkta ve güzellikteki bu kanıtla Cantor matematiğe son derece güçlü bir yöntem kazandırmıştır. Köşegen yöntemi olarak bilinen bu yöntemin kavranılması son derece önemli olduğundan, onu önce en kolay izleyeceğimiz durumda tartışacağız.

Özel Durum: $\mathbb{N}$ ile ${}^{\mathbb{N}}2$ kümelerinin eşgüçlü olmadıklarını savunuyoruz. Bu iki kümenin eşgüçlü olduklarını varsayalım. En az bir $\psi : \mathbb{N} \rightleftharpoons {}^{\mathbb{N}}2$ tameşlemesi vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n := \psi(n)$ olsun ve her $m \in \mathbb{N}$ için $f_{nm} := f_n(m)$ olmak üzere f_n fonksiyonunu $f_n = (f_{n0}, f_{n1}, f_{n2}, f_{n3}, \dots)$ olarak yazalım. Fonksiyonlarımızın aldıkları değerleri yukarıdan aşağıya doğru bir tabloya sırasıyla yerleştirelim:

$$\begin{array}{cccccc} f_{00} & f_{01} & f_{02} & f_{03} & \cdot & \cdot \\ f_{10} & f_{11} & f_{12} & f_{13} & \cdot & \cdot \\ f_{20} & f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdot & \cdot \\ f_{30} & f_{31} & f_{32} & f_{33} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Şimdi tüm bu f_n fonksiyonlarından farklı bir $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ fonksiyonunu tanımlayacağız. f fonksiyonun n 'deki değerini köşegen üzerindeki $(n+1)$. değerden, dd. f_{nn} 'den farklı seçeceğiz. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(n) := 1 - f_{nn} = 1 - f_n(n) \neq f_n(n).$$

Açıkça $f \in {}^{\mathbb{N}}2$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f \neq f_n$. Bu bir çelişkidir. Bu kanıt (2.5.2)1.'in kanıtındaki ${}^{\mathbb{N}}2 \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tameşlemesiyle birleştirildiğinde (2.5.16)'daki kanıt karşımıza çıkar. Bunu genel durumda verelim.

Genel Durum: Her A kümesi için $\mathcal{P}(A)$ kümesinin A kümesinden daha güçlü olduğunu savunuyoruz. Bir $f : A \rightleftharpoons \mathcal{P}(A)$ tameşlemesinin bulunduğunu varsayalım. Her $x \in A$ için $f(x)$ kümesinin A kümesindeki özgün fonksiyonunu $f_x := c_{f(x)}$ ile gösterelim. Her $y \in A$ için $f_{xy} := f_x(y)$ olsun. Bu durumda $f_x = (f_{xy})_{y \in A}$ yazarsak, sıralamayı göz ardı eden gevşek bir yaklaşımla tüm $f(x)$ kümelerinin özgün fonksiyonlarına bir $F = (f_{xy})_{x,y \in A}$ matrisi karşılık getirebiliriz. Bu matrisin köşegenini kullanarak bir $f^* : A \rightarrow 2$ fonksiyonu her $x \in A$ için

$$f^*(x) := 1 - f_{xx} = 1 - f_x(x) \neq f_x(x)$$

olarak açıklansın. Her $x \in A$ için $f^* \neq f_x$ olduğundan her $x \in A$ için

$$f(x) = \{y \in A \mid f_x(y) = 1\} \neq \{y \in A \mid f^*(y) = 1\} =: A^* \in \mathcal{P}(A)$$

olur ve bu f fonksiyonun tameşleme olmasıyla çelişir.

Not 2.5.17 Cantor Teoremi'nden dolayı $\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Diğer yandan $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim {}^{\mathbb{N}}2 \sim \mathbb{R}$ olduğundan $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ olur. Şimdi kolayca kazandığımız ve sıradan matematiksel bilgilerimiz arasında olan bu sonucun ilk bulunduğu ne anlama geldiğini ve matematiğe neler kattığını vurgulamak için az bilinen bir örnekle sözü yine Cantor'a bırakalım. $\mathbb{R}^n$ uzayını doğal topolojisiyle alalım, açık ve bağlantılı kümelerle bölge dendiğini hatırlatalım. Bulduğu bu sonuçtan sonra Cantor şu teoremi bir uygulama olarak kanıtlamıştır:

Cantor: $n \geq 2$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ bir bölge ve $B \subseteq A$ sayılabilirse $A \setminus B$ de bir bölgedir. $A \setminus B$ kümesinin herhangi iki noktası bu kümedeki sonlu sayıda çember parçalarıyla birleştirilebilir[13].

Bir X kümesinin sayılabilir olması $X \prec \mathbb{N}$ olması demektir. $\mathbb{Q}^n$ kümesinin de sayılabilir ve $\mathbb{R}^n$ uzayında yoğun olduğunu anımsarsak teorem hiç de az şey söylemiyor. $x, y \in A \setminus B$ keyfi verilsinler. A bir bölge olduğundan bu iki nokta bu kümede bir poligonla birleştirilebilir ve bu poligonun köşeleri ise $A \setminus B$ kümesinde seçilebilir. $[p, q]$ bu poligonun bir kenarı olsun. Şimdi bu kenarı $A \setminus B$ 'de bir çember parçasıyla değiştireceğiz. Uzayımızda bu kenarı içeren herhangi bir 2-boyutlu D düzlemi alalım. Artık D düzleminde

çalışacağız. $A' := A \cap D$ ve $B' := B \cap D$ olsun. B' kümesi sayılabilir ve A' kümesi ise D düzleminin görelî topolojisinde $[p, q]$ kenarını içeren bir açık kümedir. D düzleminde $[p, q]$ doğru parçasının orta noktasından geçip bu doğru parçasına dik olan L doğrusunu alalım. D düzleminde, merkezleri L doğrusu üzerinde olup p, q noktalarından geçen çemberlere bakalım. Bu çemberler p ve q noktalarından geçen iki çember parçası belirler. Bu parçalardan en az birinin, merkez m ise buna C_m diyelim, tümüyle A' kümesinde olanlarının merkezlerinin oluşturduğu kümeye M diyelim. $[p, q]$ doğru parçası A' açık kümesinin bir kompakt altkümesi olduğundan M kümesi L doğrusu üzerinde bir açık aralık içerir ve bu nedenle $M \sim \mathbb{R}$. Farklı C_m çemberlerinin yegane ortak noktaları p ve q noktalarıdır ve bunlar da B' 'de değildirler. Bu nedenle $M' := \{m \in M \mid C_m \cap B' \neq \emptyset\}$ için $M' \preccurlyeq B' \preccurlyeq \mathbb{N} \prec M$ olduğundan $C_m \cap B' = \emptyset$ olacak biçimde $m \in M$ vardır. $[p, q]$ kenarını böyle bir C_m çember parçasıyla değiştirelim. Bu işlem poligonumuzun her kenarıyla yapıldığında x, y noktaları $A \setminus B$ de sonlu sayıda çember parçalarıyla birleştirilmiş olur. $\square$

Bu teoremden sonra Cantor uzay ve mekanik hakkından bazı görüşler belirtir. Bu teorem bize $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$ uzayında da bir yerden diğerine sürekli hareketlerle gidebileceğimizi söyler.

“Uzay hem içindeki biçimler hem de hareket bağlamında bütünüyle sürekli olarak düşünülür. Bundan anlaşılansa her aritmetik (x, y, z) noktasının uzaya ait olduğudur. Bunun içinse hiçbir zorlayıcı içsel neden yoktur. Uzayın süreklilik hipotezi üç boyutlu $\mathbb{R}^3$ aritmetik uzayı ile olayların içinde cerayan ettiği olaylar uzayımızın noktaları arasında bir tameşleme olduğudur.

İçinde sürekli hareketlerin olduğu bir uzayın zorunlu olarak sürekli olması gerekmez! Örneğin $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$ te sürekli hareketler olanaklıdır [8].”

Bir önerme kanıtladıktan sonra Cantor Teoremi'nin bizi nerelere götüreceğine bir bakacağız.

Önerme 2.5.18 *Bir I kümesinin her ögesi için bir A_i kümesi verilsin ve her $i \in I$ ögesine karşılık bir $j \in I$ ögesi $A_i \prec A_j$ olacak biçimde bulunsun. Bu durumda $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ olmak üzere her $i \in I$ için $A_i \prec A$ olur.*

Kanıt. Her i için $A_i \subseteq A$ olduğundan her i için $A_i \preccurlyeq A$. Şimdi bir i için $A_i \prec A$ olmadığını varsayalım. Bu durumda tanım gereği $A_i \sim A$ olmak zorundadır. Dolayısıyla her $A_j \subseteq A$ altkümesi için $A_j \preccurlyeq A_i$ olur ki bu en az bir $j \in I$ için $A_i \prec A_j$ olmasıyla çelişir. ■

2.3.5'de $G : \tilde{\mathbb{U}} \rightarrow \tilde{\mathbb{U}}$ fonksiyonu olarak her $x \in \mathbb{U}$ için $G(x) := \mathcal{P}(x)$, tüm $x \in \tilde{\mathbb{U}} \setminus \mathbb{U}$ içinse istenildiği gibi örneğin $G(x) := \emptyset$ olarak açıklansın. a olarak ise $\mathbb{N}$ alınsın. Teoremimiz tek olarak belirli ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir $f : \mathbb{N} \rightarrow \tilde{\mathbb{U}}$ fonksiyonunu verir:

1. $f(0) = \mathbb{N}$ ve
2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n+1) = G(f(n)) = \mathcal{P}(f(n))$.

Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{P}^n(\mathbb{N}) := f(n)$$

olarak tanımlarsak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{P}^0(\mathbb{N}) = \mathbb{N}, \text{ ve } \mathcal{P}^{n+1}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^n(\mathbb{N}))$$

olur. Şimdi elimizde uzayıp giden *her biri farklı güçte* bir kümeler zinciri var:

$$\mathbb{N} \prec \mathcal{P}^1(\mathbb{N}) \prec \mathcal{P}^2(\mathbb{N}) \prec \mathcal{P}^3(\mathbb{N}) \prec \mathcal{P}^4(\mathbb{N}) \prec \dots$$

Tüm bu kümelerin birleşimi

$$\mathcal{P}^\omega(\mathbb{N}) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^n(\mathbb{N})$$

de bir kümedir ve bu küme her bir $\mathcal{P}^n(\mathbb{N})$ 'den daha güçlüdür (bkz. (2.5.18)). Şimdi aynı G fakat $a = \mathcal{P}^\omega(\mathbb{N})$ alırsak

$$h(0) = \mathcal{P}^\omega(\mathbb{N}) \text{ ve } \forall n \in \mathbb{N} \ h(n+1) = G(h(n)) = \mathcal{P}(h(n))$$

koşullarını sağlayan tek olarak belirli bir $h : \mathbb{N} \rightarrow \tilde{\mathbb{U}}$ fonksiyonu elde ederiz.

$$\mathcal{P}^{\omega+n}(\mathbb{N}) := h(n)$$

olarak tanımlarsak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{P}^{\omega+0}(\mathbb{N}) := \mathcal{P}^\omega(\mathbb{N}) \text{ ve } \mathcal{P}^{\omega+n+1}(\mathbb{N}) := \mathcal{P}(\mathcal{P}^{\omega+n}(\mathbb{N}))$$

olur. Böylece *her biri farklı güçteki*

$$\mathbb{N} \prec \mathcal{P}^1(\mathbb{N}) \prec \mathcal{P}^2(\mathbb{N}) \prec \dots; \mathcal{P}^\omega(\mathbb{N}) \prec \mathcal{P}^{\omega+1}(\mathbb{N}) \prec \mathcal{P}^{\omega+2}(\mathbb{N}) \prec \dots$$

kümeler zincirimizi elde ederiz. Artık bu işlemi sürgit yineleyebileceğimizi biliyoruz²³.

²³Bu zinciri ne kadar uzatırsak uzatalım, durumumuz masal kahramanınıkinden farksızdır: Az gittim uz gittim, dere tepe düz gittim, döndüm baktım ardıma, arpa boyu yol gittim.

Yukarıda $\mathbb{N}$ ile başlayarak yaptığımız işlemleri herhangi bir A kümesinden yola çıkarak yaparsak

$$A \prec \mathcal{P}^1(A) \prec \mathcal{P}^2(A) \prec \dots; \mathcal{P}^\omega(A) \prec \mathcal{P}^{\omega+1}(A) \prec \mathcal{P}(A)^{\omega+2} \prec \dots$$

zincirini elde ederiz. En güçsüz kümeyle, yani $A = \emptyset$ ile başlamış olsak bile $\mathcal{P}^\omega(\emptyset) \prec \mathbb{N}$ olduğunu göstermek hiç de zor değildir; bir sonraki bölümde öğrendiklerimizle apaçık doğru olacaktır. Yine akıl almaz çokluklara ulaşmış oluyoruz.

Kümeleri güçlerine göre sıralamaya kalkarsak, görünen o ki doğal sayılardan öteye sandığımızdan çok *sıra sayılarına* gereksinimiz vardır.

Problem 2.5.1 Her $x \in \tilde{\mathbb{U}}$ ve her A kümesi için $A \prec A \times \{x\}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.5.2 $A \times B \prec B \times A$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.5.3 $A \prec B \implies \mathcal{P}(A) \prec \mathcal{P}(B)$.

Problem 2.5.4 $A \prec A' \wedge B \prec B' \implies A \times B \prec A' \times B'$.

Problem 2.5.5 $A \prec A' \wedge B \prec B' \wedge (A \cap B = \emptyset) \wedge (A' \cap B' = \emptyset) \implies A \cup B \prec A' \cup B'$.

Problem 2.5.6 $\{A_i\}_{i \in I}$ ve $\{A'_i\}_{i \in I}$ iki ayrık aile ve her $i \in I$ için $A_i \prec A'_i$ ise $\bigcup_{i \in I} A_i \prec \bigcup_{i \in I} A'_i$.

Problem 2.5.7 $\{A_i\}_{i \in I}$ bir ayrık aile $\{I_j\}_{j \in J}$ ise $I \neq \emptyset$ kümesinin bir parçalanışı ise $B_j := \bigcup_{i \in I_j} A_i$ olmak üzere $\{B_j\}_{j \in J}$ 'nin de bir ayrık aile ve $\bigcup_{i \in I} A_i \prec \bigcup_{j \in J} B_j$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.5.8 $I \neq \emptyset$ ve her $i \in I$ için $A_i \prec A'_i$ ise $\prod_{i \in I} A_i \prec \prod_{i \in I} A'_i$.

Problem 2.5.9 $I \neq \emptyset$ kümesinin bir $\{I_j\}_{j \in J}$ parçalanışı verildiğinde $\prod_{i \in I} A_i \prec \prod_{j \in J} (\prod_{i \in I_j} A_i)$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.5.10 $\{X_i\}_{i \in I}$ bir ayrık aileyse $X := \bigcup_{i \in I} X_i$ olmak üzere ${}^X Y \prec \prod_{i \in I} {}^{X_i} Y$.

Problem 2.5.11 ${}^Z (\prod_{i \in I} X_i) \prec \prod_{i \in I} {}^Z X_i$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.5.12 $\mathcal{P}^\omega(\emptyset) \prec \mathbb{N}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.5.13

$$f : {}^\omega\{0, 2\} \longrightarrow \mathbb{R} \left(x \rightsquigarrow \sum_{n \in \omega} \frac{f(n)}{3^{n+1}} \right)$$

fonksiyonunun birebir olduğunu gösteriniz.

Problem 2.5.14 Her $n \geq 1$ doğal sayısı için $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^n \sim \mathbb{Z}^n \sim \mathbb{Q}^n$ ve $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^n$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.5.15 $f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ $((m, n) \rightsquigarrow 2^m(2n + 1) - 1)$ dönüşümünün bir tameşleme olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.5.16 r herhangi bir gerçekte sayı olmak üzere $f : \mathbb{R} \longrightarrow (r, +\infty)$ ve $g : \mathbb{R} \longrightarrow (-\infty, r)$ tameşlemeleri bulunuz.

Problem 2.5.17 $A \subseteq B \subseteq C$ ve $A \sim C$ ise $B \sim C$ olduğunu vereceğimiz ipucuyla kanıtlayınız. İpucu: $Q := B \setminus A$ ve $R := C \setminus B$ olsun. $f : C \rightleftharpoons A$ bir tameşleme olsun. $N \subseteq A$ kümesine $Q \sqcup f[N] \subseteq N$ ise normal diyelim. X ile A kümesinin normal altkümelerinin arakesiti gösterilirse X de normaldir ve $X = f[X] \sqcup Q$ ve $A = f[X] \sqcup Y$ olmak üzere $B = Y + X \sim A$ olduğunu gösteriniz. Zermelo'nun bu güzel kanıtını []'de bulabilirsiniz.

2.6 SONLU, SONSUZ, SAYILABİLİR VE SAYILAMAZ KÜMELER

Uzlaşma: Bu alt bölümde $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi daima $\underline{\mathbb{N}}$ Neumann doğal sayıları kümesini kastedecektir.

Eşgüçlü kümeleri tanımlarken çıkış noktamız doğrudan çoklukların *sezgisel kıyaslaması* olmuştur. Buradaki “güç” kelimesi “çokluk” ölçüsüdür ve “eş güçlüdür” tam da “**eş çokluktur**” anlamında kullanılmaktadır. En temel **sezgisel aksiyom**larımızdan biri ölçülebilen bir büyüklük (uzunluk, alan, hacim, ağırlık vb. ...) açısından *bütünün öz parçasından büyük olduğudur*. Ancak biz daha şimdiden bu aksiyoma ters düşen kümelerle karşılaştık. $\mathbb{Q} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^n \sim \mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$ bu aksiyoma ters düşen ve kabul edilmesi hiç de kolay olmayan sonuçlardır. Kümeler kuramının kurucusu Cantor'un kendisi bizzat üç yıl boyu $\mathbb{R}^2$ düzleminin $\mathbb{R}$ doğrusundan daha güçlü olduğunu kanıtlamak için uğraşmıştır! Kümelere ilişkin güçlü sezgilere sahip olan Cantor bile ancak üç yıllık başarısızlıktan sonra acaba $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$ olabilir mi diye düşünmüş ve böyle olduğunu göstermesi hiç de uzun sürmemiştir. Ancak kanıtladığı şey öylesine beklenmedik bir sonuçtur

ki Dedekind'e yazdığı bir mektupta “*Görüyorum ama inanamıyorum.*” diye yazmıştır.

İçinde gerçekten yaşamakta olduğumuz evren (**sezgisel**) **sonludur**; bu kavramı az ileride tanımlayacağız. Sonlu evrenimizden aldığımız eş çokluğun tanımı sonlu kümeler için bu aksiyoma uyar. İlerde kanıtlayacağımız teoremlerden biri şudur: *Bir kümenin sonlu olması için gerek ve yeter koşul hiçbir öz altkümesiyle eş güçlü olmamasıdır*(dd. *her öz altkümesinden daha güçlü olmasıdır*). Sonlu olmayan kümelere (**sezgisel**) **sonsuz** der ve bu teoremi tersden okursak *bir kümenin sonsuz olması için gerek ve yeter koşul en az bir öz altkümesiyle eş güçlü olmasıdır*. Görüldüğü gibi bir kümenin sonsuz olması için gerek ve yeter koşul en temel sezgisel aksiyomumuza *ters* düşmesidir. Bundan sonra *sonsuzlar aleminde sezgiye ters düşen gerçekleri beklemek son derece doğaldır*.

İçinde yaşadığımız evrendeki her kümenin öğelerini sezgisel doğal sayılarımızla sayabiliyoruz. Özellikle her bir $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ Neumann doğal sayısının öğeleri kendi öğeleriyle sayılmıştır ve tam da sezgisel n öğeli bir kümedir. Bu bizi aşağıdaki tanıma götürür:

Tanım 2.6.1 *Bir A kümesi verilsin. $n \sim A$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ sezgisel Neumann doğal sayısı bulunabiliyorsa A kümesi (**sezgisel**) **sonludur** denir. Sezgisel sonlu olmayan kümeler ise (**sezgisel**) **sonsuz** kümeler denir. $\mathbb{N}$ ile eşgüçlü kümelere (**sezgisel**) **sayılabilir sonsuz**, en fazla $\mathbb{N}$ kadar güçlü olan kümelere (**sezgisel**) **sayılabilir** denir. Sayılabilir olmayan kümelere ise (**sezgisel**) **sayılamaz** denir.²⁴*

Bu tanımla her $n \in \mathbb{N}$ için $n \sim n$ olduğundan n sonludur. Ayrıca:

$$\begin{aligned} A \text{ sonludur} &\iff \exists n \in \mathbb{N} (n \sim A) \\ A \text{ sonsuzdur} &\iff \forall n \in \mathbb{N} (n \not\sim A) \\ A \text{ sayılabilir} &\iff A = \emptyset \vee \exists f (f : \mathbb{N} \rightarrow A) \\ &\iff \exists g (g : A \rightarrow \mathbb{N}) \\ A \text{ sayılabilir sonsuz} &\iff A \sim \mathbb{N} \\ A \text{ sayılamaz} &\iff A \text{ sonsuz ve } A \not\sim \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Teorem 2.6.2 *Hiçbir sonlu küme, kendisini öz altküme olarak içeren bir küme ile eşgüçlü olamaz! Özel olarak*

$$\forall m, n \in \mathbb{N} (n < m \implies n \not\sim m).$$

²⁴Vurgulamak gerekmedikçe “sezgisel” kelimesini kullanmayacağız. Bu kitaptaki tüm kavramlar “sezgisel” kavramlardır.

Sonuç 2.6.3 $\forall m, n \in \mathbb{N} (n \sim m \iff n = m)$.

Kanıt. Savunduğumuz şey elbette

$$\forall n \in \mathbb{N} (n \subset A \implies n \approx A)$$

önermesine denktir. Şimdi bu önermeyi tümevarımla kanıtlayalım. $n = 0$ ve $n \subset A$ ise $n = \emptyset$ ve $A \neq \emptyset$ olacağından $\emptyset \approx A$ doğrudur. Savımız n için kanıtlanmış olsun. $n + 1 \subset A$ verilsin. $f : n + 1 \rightrightarrows A$ olduğunu varsayalım. $n + 1 \subset A$ olduğundan en az bir $a \in A \setminus (n + 1)$ vardır. f bir tameşleme olduğundan $f(k) = a$ olacak biçimde bir tek $k \in n + 1$ vardır. Genellikle bir şey kaybetmeden $k = n$ varsayabiliriz (Eğer $k \neq n$ ise $a' := f(n)$ olsun. Şimdi $f' : n + 1 \rightarrow A$ fonksiyonunu $f'(k) := a', f'(n) := a$ ve her $i \in (n + 1) \setminus \{k, n\}$ için $f'(i) := f(i)$ olarak tanımlarsak f' bir tameşlemedir ve $f'(n) = a$ olur). Bu durumda $f|n : n \rightrightarrows A \setminus \{a\}$ bir tameşlemedir ve $n \subset A \setminus \{a\}$ olduğundan tümevarım koşuluyla çelişir.

$m, n \in \mathbb{N}$ ve $n < m$ ise (2.4) ile $n \subset m$ olacağından (2.6.2)'den dolayı $n \approx m$. Sonuç artık aşıkardır. ■

Örnek 2.6.4 Her $n \in \mathbb{N}$ için $n \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ olduğundan n bu kümelerden hiçbirisi ile (2.6.2)'den dolayı eşgüçlü olamaz. Dolayısıyla $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri sonsuzdurlar. Bu sonuçla $\mathbb{N}$ ile eşgüçlü kümelere verilen “sayılabilir sonsuz” ismi haklılık kazanır. Diğer yandan $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$ olduğundan $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ kümeleri sayılabilir sonsuz kümelere aittir. Her $0 \neq n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^n \sim \mathbb{Z}^n \sim \mathbb{Q}^n$ olduğundan $\mathbb{N}^n, \mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}^n$ kümeleri de sayılabilir sonsuzdurlar. $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$ olduğundan $\mathbb{R}$ sayılamaz! □

Önerme 2.6.5 A ve B sonlu kümelerse ve $x \in \tilde{U}$ ise

1. $A \cup \{x\}, A \cup B, A \cap B, A \times B, A \setminus B$ ve $\mathcal{P}(A)$ sonlu kümelerdir.
2. $A \in \mathcal{U}$ sonlu ve her $x \in A$ sonlu ise $\bigcup A$ ve $\prod A = \prod_{x \in A} x$ kümeleri de sonludurlar.
3. Sonlu bir kümenin her altkümesi de sonludur.

Kanıt. $n, m \in \mathbb{N}$, $A \sim n$ ve $B \sim m$ olsun. Önce n üzerinden tümevarımla (3) önermesini kanıtlayalım. $n = 0$ için $A = \emptyset$ olduğundan yegane altkümesi kendisidir ve sonludur. Savımız n için kanıtlanmış olsun. Şimdi $A^* \sim n + 1$ ve $C \subseteq A^*$ olsun. $C = A^*$ ise kanıtlanacak bir şey yok. $C \subset A^*$ ve $a^* \in A^* \setminus C$ olsun. $\exists \varphi : A^* \rightrightarrows n + 1$. $\varphi(a^*) = n$ ise açıkça $\varphi|A : A \rightrightarrows n$ bir tameşleme olacağından A sonludur ve tümevarım koşulundan $C \subseteq A$ de sonludur. Eğer $\varphi(a^*) = k < n$ ve $\varphi^{-1}(n) = a$ ise $\psi(a^*) = n$, $\psi(a) = k$

ve her $x \in A^* \setminus \{a, a^*\}$ için $\psi(x) = \varphi(x)$ olarak açıklanan $\psi : A^* \rightleftharpoons n+1$, $\psi(a^*) = n$ koşulunu sağlayan bir tameşlemedir ve bu durumu tartıştık.

(1) önermesini kanıtlayalım. $x \in A$ ise $A \cup \{x\} = A$ olacağından $A \cup \{x\}$ sonludur. Şimdi $x \notin A$ ve $f : A \rightleftharpoons n$ bir tameşleme olsun. $g|_A := f$ ve $g(x) := n$ ile tanımlanan $g : A \cup \{x\} \rightleftharpoons n+1$ bir tameşlemedir ve $A \cup \{x\}$ sonludur. Şimdi m üzerinden tümevarımla $A \cup B$ kümesinin sonlu olduğunu görelim. $m = 0$ için $B = \emptyset$ olduğundan sav doğrudur. Savımız m için kanıtlanmış olsun. Şimdi $B^* \sim m+1$, $b \in B^*$, $B := B^* \setminus \{b\}$ olsun. Tümevarım koşulundan $A \cup B$ sonludur; dolayısıyla az önce kanıtladığımız önermeden $A \cup B^* = A \cup B \cup \{b\}$ sonludur. A sonlu ise (3)'ten dolayı $A \cap B \subseteq A$ ve $A \setminus B \subseteq A$ kümeleri de sonludurlar.

Şimdi m üzerinden tümevarımla $A \times B$ kümesinin sonlu olduğunu görelim. Her şeyden önce $A \sim n$ ise herhangi bir x ögesi ile $A \times \{x\} \sim n$ olduğu apaçıktır. $m = 0$ ise $B = \emptyset$ olacağından $A \times B = \emptyset$ sonludur. Önerme m için kanıtlanmış olsun. $B^* \sim m+1$ ve $b \in B^*$ ise, yukarıdaki irdelemelerle de gördüğümüz gibi $B := B^* \setminus \{b\} \sim m$ olur. $A \times \{b\}$ ve tümevarım koşulundan $A \times B$ sonlu olduğundan $A \times B^* = A \times B \cup A \times \{b\}$ de sonludur.

Şimdi n üzerinden tümevarımla $\mathcal{P}(A)$ kümesinin sonlu olduğunu görelim. $n = 0$ için $A = \emptyset$ ve $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \sim 1$ sonludur. Önerme n için kanıtlanmış, $A^* \sim n+1$, $a \in A^*$ ve $A := A^* \setminus \{a\}$ olsun. $A \sim n$ olduğundan $\mathcal{P}(A)$ sonludur. Dolayısıyla $\mathcal{A} := \{X \cup \{a\} \mid X \in \mathcal{P}(A)\} \sim \mathcal{P}(A)$ olduğundan $\mathcal{A}$ da sonludur. Böylece iki sonlu kümenin birleşimi olarak $\mathcal{P}(A^*) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{A}$ da sonludur.

(2)'nin kanıtı: A sonlu ve her $x \in A$ sonlu olsun. Yine tümevarım kullanacağız. $n = 0$ için $A = \emptyset$, dolayısıyla $\bigcup A = \emptyset$ sonludur. Önerme n için kanıtlanmış, $A^* \sim n+1$, $a \in A^*$ ve $A := A^* \setminus \{a\}$ olsun. $A \sim n$ olduğundan $\bigcup A^* = (\bigcup A) \cup a$ iki sonlu kümenin birleşimi olarak sonludur.

$$\prod A = \prod_{x \in A} x = \{f \mid f : A \rightarrow \bigcup A \vee \forall x \in A (f(x) \in x)\} \subseteq \mathcal{P}(A \times \bigcup A)$$

olduğundan, kanıtladıklarımızdan $\prod A$ sonlu olur. ■

Teorem 2.6.6 *A bir sonlu kümeysse*

1. Her birebir $f : A \rightarrow A$ fonksiyonu bir tameşlemedir.
2. Her örten $f : A \rightarrow A$ fonksiyonu bir tameşlemedir.

Kanıt. (1)'in kanıtı: A sonlu ve $f[A] \subseteq A$ olduğundan $f[A]$ da sonlu bir kümedir. f birebir olduğundan $A \sim f[A]$. f örten olmasaydı $f[A] \subset A$ ve $f[A] \sim A$ olurdu ki bu (2.6.2) ile çelişir.

(2)'nin kanıtı: f fonksiyonu örten olduğundan $a \in A$ için $A_a^f = f^{-1}[\{a\}]$ sapsı boş değildir ve $\mathcal{P} := \{A_a^f\}_{a \in A}$ ailesi A kümesinin bir parçasıdır.

$s : \mathcal{P} \longrightarrow \bigcup \mathcal{P} = A$ ise bir seçen fonksiyon olsun. Her $a \in A$ için $g(a) := s(A_a^f)$ ile tanımlanan $g : A \longrightarrow A$ fonksiyonu birebirdir. Gerçekten de f birebir değilse enaz bir A_a^f sapı birden fazla öge içerir ve $g : A \longrightarrow A$ birebir dönüşümü örten olmaz. Bu ise 1 ile çelişir. f birebirdir. ■

“Burada fazla büyük olmayan bir sonsuzluk var (Neumann).”

Teorem 2.6.7 *Her sonsuz kümenin $\mathbb{N}$ ile eş güçlü bir altkümesi vardır.*

Kanıt. Tekrarlı seçme uygulanacaktır. A sonsuz bir küme olsun. $A \neq \emptyset$ olduğundan bir $a_0 \in A$ ögesini seçebiliriz. $a_0, \dots, a_n$ ögeleri seçilmiş olsun $A \setminus \{a_0, \dots, a_n\} \neq \emptyset$ olmak zorundadır, aksi halde $A \sim n+1$ ve A sonlu olurdu! Bu farktan bir a_{n+1} ögesi seçebiliriz. Böylece $B := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ ve $\mathbb{N} \sim B$ ($f(n) := a_n$ ile tanımlanan $f : \mathbb{N} \longrightarrow B$ bir tameşlemedir). ■

Not 2.6.8 Örnek 2.5.10’da $t_k : \mathbb{N} \rightleftharpoons \mathbb{N}_k$ tameşlemelerini tanımladık. $n \geq 1$ için $\mathbb{N}_k \subset \mathbb{N}$ ’dir. Bu nedenle $\mathbb{N}$ kümesinin eşgüçlü olduğu öz altkümeleri vardır. Bu sonsuz kümeler için tipiktir. □

Teorem 2.6.9 *A kümesi sonsuz ise*

1. *Birebir bir $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ fonksiyonu vardır,*
2. *Birebir ama örten olmayan bir $f : A \longrightarrow A$ fonksiyonu vardır,*
3. *Örten ama birebir olmayan bir $f : A \longrightarrow A$ fonksiyonu vardır.*

Kanıt. 1. B ve $f : \mathbb{N} \rightleftharpoons B$ tameşlemesi bir önceki kanıttaki gibi olsunlar. $f : \mathbb{N} \rightarrow A$.

2. B ve f az önceki gibi olsunlar. Her $k \in \mathbb{N}$ için $B_k := f[\mathbb{N}_k]$ ve $t_k : \mathbb{N} \rightleftharpoons \mathbb{N}_k$ olmak üzere

$$g_k := f \circ t_k^{-1} \circ (f^{-1}|_{B_k})$$

olsun. Açıkça $g_k : B_k \rightleftharpoons B$ ve $k \geq 1$ için B_k kümesi B kümesinin öz altkümesidir. Şimdi $h_k : A \longrightarrow A$ fonksiyonunu $x \in A \setminus B$ için $h_k(x) := x$ ve $x \in B$ içinse $h_k(x) := g_k^{-1}(x)$ olarak açıklarsak h_k birebirdir ancak $h_k[A] = (A \setminus B) \cup B_k$ olduğundan $k \geq 1$ için örten değildir.

3. $k \geq 1$ olsun ve $B \setminus B_k$ ’den bir b ögesini seçelim. Şimdi $u_k : A \longrightarrow A$ fonksiyonu $A \setminus B$ ’de yine özdeşlik, B_k ’de g_k ve her $x \in B \setminus B_k$ içinse $u_k(x) := b$ olsun. $u_k[A \setminus B] = A \setminus B$ ve $u_k[B_k] = B$ olduğundan u_k fonksiyonu örtendir. Ayrıca b değerini hem B_k , hem de $B \setminus B_k$ kümelerinde en az birer kez alır; dolayısıyla birebir değildir. ■

(2.6.6) ve (2.6.9) birlikte doğrudan aşağıdaki teoremi verirler

Teorem 2.6.10 *Bir A kümesi için aşağıdaki önermeler denktirler:*

1. A kümesi sonludur.
2. Her birebir $f : A \rightarrow A$ fonksiyonu tameşlemedir.
3. Her örten $f : A \rightarrow A$ bir tameşlemedir.

Teorem 2.6.11 1. Bir kümenin sonlu olması için gerek ve yeter koşul hiçbir öz altkümesiyle eşgüçlü olmamasıdır.

2. Bir kümenin sonsuz olması için gerek ve yeter koşul en az bir öz altkümesiyle eşgüçlü olmasıdır.

Kanıt. 1'i ödev olarak bırakıyoruz.

2'nin kanıtı: (a) X kümesi sonsuz olsun. Birebir ama örten olmayan bir $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu vardır. $f[X] \subset X$ ve $f[X] \sim X$.

(b) $Y \subset X$ ve $Y \sim X$ olsun. Bir $f : X \rightleftharpoons Y$ tameşlemesi vardır. $i : Y \rightarrow X, i(x) = x$ ile verilen doğal gömme olmak üzere $g := i \circ f : X \rightarrow X$ birebirdir ama tameşleme değildir. X sonlu değildir ((2.6.10)). ■

Not 2.6.12 (2.6.11) ile sonlu kümeleri doğal sayıları kullanmadan da belirleyebileceğimizi öğrenmiş oluyoruz. Öyleyse doğal sayılar kullanılmadan da sonlu tanımını verebiliriz [19]. Bir A kümesine, ancak ve ancak her birebir $f : A \rightarrow A$ fonksiyonu bir tameşleme ise **Dedekind sonlu** (kısaca **D-sonlu**) diyelim. Biz sonlu ve D-sonlu kavramlarının denk olduklarını kanıtladık. Bunu gösterirken Seçme Aksiyomunu kullandık. Bu iki kavramın ZF'de denk olmadıkları biliniyor. □

Not 2.6.13 K bir küme olmak üzere $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k \in K}$, $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k \in K}$ küme aileleri verilsin. $\mathcal{A}$ ailesi ayrık olsun ve her $k \in K$ için bir $f_k : A_k \rightarrow B_k$ fonksiyonu verilsin. $A := \bigsqcup \mathcal{A}$, $B := \bigcup \mathcal{B}$, $f := \bigcup_{k \in K} f_k$ olmak üzere $f : A \rightarrow B$ (her $k \in K$ için $f|_{A_k} = f_k$). Ayrıca her $k \in K$ için f_k örtense f fonksiyonu da örtendir. İlerdeki irdelemelerde bundan sıkça yararlanacağız. □

Tek doğal sayıların kümesini $T := \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$ ile gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) := 2n + 1$ ile açıklanan $f : \mathbb{N} \rightarrow T$ fonksiyonu bir tameşlemedir. Dolayısıyla $\mathbb{N} \sim T$. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n := 2^n T := \{2^n t : t \in T\}$ olarak açıklansın. $m \neq n$ için $B_m \cap B_n = \emptyset$ ve $\mathbb{N}_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ olduğu apaçıktır. Bir bütünü, $\mathbb{N}^* := \mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, \dots\}$ kümesini, kendi çokluğu kadar $B_0, B_1, B_2, \dots$ ayrık parçalarına, her bir parça bütünüle aynı çoklukta olacak biçimde böldük! Daha inanılmazını da gerçekleştirebilirsiniz. Sonsuz çoklukta asal sayı alıp bunları, farklı asal sayılara farklı doğal sayılar karşılık gelmek üzere $p_0, p_1, p_2, \dots$ olarak numaralayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $P_n := \{p_n^k : k \in \mathbb{N}^*\}$ olarak tanımlansın. Yine bu kümelerin sonsuz, ikiye ayrık ikiye ayrık oldukları ve her n için $P_n \sim \mathbb{N}$ olduğu apaçıktır. Tüm bunlara

karşın $\mathbb{N}$ 'den her bir P_n kümesini attıktan sonra kalan $M := \mathbb{N} \setminus \bigcup P_n$ kümesinin çokluğu baştaki $\mathbb{N}$ kümesi kadardır, dd. $M \sim \mathbb{N}$. Matematikçi olarak alıştığımız için belki yadırgamadığımız bu gerçeğin sezgimize ne kadar ters olduğunu anlamak istiyorsanız bunu sıradan bir insana söyleyip tepkisini görmeniz yeterlidir. Aşağıdaki basit gerçeği sıkça kullanacağız:

$f : A \rightarrow B$ örten ve A sayılabilirse B de sayılabilir.

Teorem 2.6.14 1. *Sayılabilir çoklukta sayılabilir kümelerin birleşimi de sayılabilir.*

2. *$A_1, A_2, \dots, A_n$ sayılabilirlerse $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ de sayılabilir.*

3. *A sayılabilirse her $n \in \mathbb{N}$ için A^n sayılabilir.*

Kanıt. 1. $\mathcal{A}$ sayılabilir bir aile olsun. Önce her $A \in \mathcal{A}$ kümesi için $A \neq \emptyset$ varsayabiliriz; çünkü boş küme olan öğeler birleşime katkıda bulunmazlar. Bu varsayım altında iki durumu inceleyeceğiz.

(a) $\mathcal{A} \sim \mathbb{N}$. Bu durumda $\mathcal{A}$ ailesinin öğelerini $A_0, A_1, A_2, \dots$ olarak numaralayabiliriz. $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ayrık ailesi yukarıda verdiğimiz $\mathbb{N}_1$ kümesinin parçalanışı olsun. Her A_n sayılabilir olduğundan bir $f_n : B_n \rightarrow A_n$ örten dönüşümü vardır. Bu bize bir $f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n : \bigcup \mathcal{B} \rightarrow \bigcup \mathcal{A}$ örten dönüşümü, dd. bir $f : \mathbb{N}_1 \rightarrow \bigcup \mathcal{A}$ örten dönüşümü verir. Dolayısıyla $\bigcup \mathcal{A}$ sayılabilir.

(b) $\mathcal{A}$ sonlu olsun ve öğeleri $A_0, A_1, \dots, A_n$ olarak sıralansın. Her $k > n$ için $A_k := A_n$ olarak tanımlayarak $\mathcal{A}^* := \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ailesine geçelim. 1.'den dolayı $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}^*$ sayılabilir.

2. Herhangi bir A_k boş küme ise çarpım uzayı da boş küme olacağından kanıtlanacak bir şey yoktur. Şimdi her bir k için $A_k \neq \emptyset$ olsun. Her bir k için bir örten $f_k : \mathbb{N} \rightarrow A_k$ dönüşümü vardır ve bunlar bize $f(x_1, \dots, x_n) := (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$ ile tanımlanan bir örten $f : \mathbb{N}^n \rightarrow A_1 \times \dots \times A_n$ dönüşümü verir ve $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^n$ olduğundan işimiz biter.

3 doğrudan 2'den çıkar. ■

Örnek 2.6.15 Bu teoremin sevilen bir uygulamasını verelim. $\mathbb{Z}[x]$ ile katsayıları tam sayılar olan polinomların halkasını gösterelim. $p \in \mathbb{Z}[x]$ polinomu $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0$ ile verilmiş ve $a_n \neq 0$ ise bu polinoma n . derecedendir denir. Cebirin Ana Teoremi'ne göre böyle bir polinomun $\mathbb{R}$ 'de en fazla n kökü vardır. p polinomunun köklerinin kümesini $K(p)$ ile gösterelim. P_n ile $\mathbb{Z}[x]$ deki n . dereceden polinomların kümesini gösterelim. $\mathcal{C}_e := \bigcup \{K(p) \mid p \in \mathbb{Z}[x]\}$ kümesinin öğelerine cebirsel sayılar denir. $K_n := \bigcup \{K(p) \mid p \in P_n\}$ olmak üzere $\mathcal{C}_e = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ olduğundan $\mathcal{C}_e$ cebirsel sayılar kümesinin sayılabilir olduğunu kanıtlamak için her bir K_n kümesinin sayılabilir olduğunu göstermek; bunun içinse P_n kümesinin

sayılabilir olduğunu görmek yeterlidir. Bu ise

$$(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0) \xrightarrow{\varphi} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0$$

ile tanımlanan $\varphi : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow P_n$ örten dönüşümünün doğrudan sonucudur. Bunun bir sonucu ise $\mathbb{R} \setminus \mathcal{C}e$ aşkın sayılar kümesinin sayılamaz olduğudur. $\square$

Tanım 2.6.16 *A herhangi bir küme olmak üzere*

1. $A^{<\omega} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$
2. $\mathcal{P}_\omega(A) := \{X \mid X \subseteq A \text{ ve } X \text{ sonlu}\}$ olsun.

Önerme 2.6.17 *A sayılabilirse $A^{<\omega}$ ve $\mathcal{P}_\omega(A)$ kümeleri de sayılabilirlerdir.*

Kanıt. 1. A sayılabilir olsun. (2.6.14)'ten her A^n ve dolayısıyla $A^{<\omega}$ sayılabilirlerdir.

2. $f : A^{<\omega} \rightarrow \mathcal{P}_\omega(A)$ $((a_1, \dots, a_n) \rightsquigarrow \{a_1, \dots, a_n\})$ dönüşümü örtendir ve iğimiz biter. ■

Not 2.6.18 Sonsuz çoklukta asal sayı alıp bunları $p_0, p_1, p_2, \dots$ olarak numaralayalım. g fonksiyonu $\{n_1, \dots, n_k\} \in \mathcal{P}_\omega(\mathbb{N})$ öğesine $p_{n_1} \cdots p_{n_k}$ doğal sayısını karşılık getirsin. $g : \mathcal{P}_\omega(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$ 'nin birebir olduğu apaçıktır. Buradan $\mathcal{P}_\omega(\mathbb{N}) \preceq \mathbb{N}$ elde edilir. $\mathbb{N} \preceq \mathcal{P}_\omega(\mathbb{N})$ bağıntısını da kolayca gösterecek bir kez daha $\mathcal{P}_\omega(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}$ elde edersiniz. Aynı sonuca aşağıdaki gibi de ulaşabilirsiniz. Her $\{n_1, \dots, n_k\} \in \mathcal{P}_\omega(\mathbb{N})$ için

$$\varphi(\{n_1, \dots, n_k\}) := \sum_{i=1}^n 2^{n_i}$$

ve $\varphi(\emptyset) := 0$ olarak tanımlanan $\varphi : \mathcal{P}_\omega(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonu bir tameşlemedir. $\square$

Problem 2.6.1 *X kümesi bir öz altkümesiyle eşgüçlü ise sayılabilir sonsuz bir altküme içerir. (Amacımız bildiğiniz bir gerçeğin başka bir kanıtını öğretmektir. $Y \subset X$ ve $g : X \rightarrow Y$ birebirse bir $a \in X \setminus Y$ seçip tekrarlı tanımlamayla bir $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ dönüşümünü $f(0) = a$ ve $f(n+1) = g(f(n))$ olarak tanımlayınız ve f fonksiyonunun birebir olduğunu kanıtlayınız)*

Problem 2.6.2 *(2.6.18)'te söylenenleri kanıtlayınız.*

Problem 2.6.3 *I bir küme, $I \preceq \mathbb{R}$ ve her $i \in I$ için $A_i \preceq \mathbb{R}$ ise $\bigcup_{i \in I} A_i \preceq \mathbb{R}$ olduğunu kanıtlayınız.*

Problem 2.6.4 $M \sim m, m \in \mathbb{N}$ ise $\mathcal{P}(M) \sim 2^m$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.6.5 A ve B kümeleri ayrık sonlu kümeler ve $n, m \in \mathbb{N}$ ile $A \sim n, B \sim m$ ise $A \sqcup B \sim n + m$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.6.6 A ve B sonlu kümeler ve $n, m \in \mathbb{N}$ ile $A \sim n, B \sim m$ ise $A \times B \sim nm$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.6.7 Güvercin Yuvası Teoremi $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m < n$ olmak üzere n mektup m kutuya dağıtıldığında en az bir kutuda birden fazla mektup olacağını kanıtlayınız.

Problem 2.6.8 Evlilik Teoremi: E bir sonlu küme olsun ve her $x \in E$ için bir K_x kümesi verilsin. Her $M \subseteq E$ altkümeleri için $M \preccurlyeq K_M := \bigcup_{x \in M} K_x$ ise birebir bir $f : E \rightarrow K_E$ fonksiyonu her $x \in E$ için $f(x) \in K_x$ olacak biçimde vardır. ($\mathfrak{H}$ üzerinden Tümevarım uygulayınız. Yorum: Bir şehirdeki bekar erkelerin kümesini E ile gösterelim. Her $x \in E$ için K_x ile x 'in bekar kız arkadaşlarının kümesini gösterelim. Elbette farklı bekar erkelerin ortak kız arkadaşları da olabilir. x , kız arkadaşı olan $f(x)$ ile evlenecektir. Teorem özetle verilen koşulda her bekar erkeğin kız arkadaşlarından biriyle evlenebileceğini söyler.).

Problem 2.6.9 A ve B sonlu kümeler ve $A \sim n, B \sim m$ ise ${}^A B \sim m^n$ olduğunu kanıtlayınız. A kümesinden B kümesine tüm bağıntıların kümesine R dersek, $R \sim 2^{nm}$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.6.10 $X \subseteq Y$, X sonsuz ve $Y \setminus X$ sayılabilirse $X \sim Y$ olduğunu kanıtlayınız.

2.7 ÇOKLUK SAYILARI (İlk Bilgiler)

Bu bölümde $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi daima $\underline{\mathbb{N}}$ Neumann doğal sayıları kümesini kastedecektir. $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, ', 0)$ Peano yapısındaki her n Neumann doğal sayıları aynı zamanda çokluk sayıları ve sıra sayıları da olacaklardır. Her çokluk sayısı aynı zamanda bir sıra sayısıdır. Her grup için toplama, çarpma ve üs işlemleri açıklayacağız. Karışıklığa yol açmamak için i) Farklı işlemler için farklı imler kullanmak, ii) İşlemler için aynı imleri kullanıp hangi anlamda olduğunu vurgulamak veya okuyucunun doğru anlayacağını ummak veya iii) Nesneler için farklı anlamlarda farklı imler kullanmak gibi değişik yollar izlenmektedir. Biz birinci yol yeğleyeceğiz. Bu bölümde $m, n \in \mathbb{N}$ için toplama, çarpma ve üs işlemleri sırasıyla 1) Doğal sayılar olarak düşünüldüğünde $m +^{\mathcal{N}} n, m \cdot^{\mathcal{N}} n$ veya daha yalın olarak bazan $m \times n, \mathcal{N}m^n$, 2) Çokluk sayıları olarak $m \dot{+} n, m * n, !m^n$, ve ileride 3) sıra sayıları olarak ise $m + n, m \cdot n$ (veya mn), m^n olarak gösterilecektir.

Bir kümenin çokluk sayısını nasıl tanımlamalı? Eşgüçlü kümelere eşit çoklukta diyeceğiz. Bir A kümesine karşılık getireceğimiz çokluk sayısı ne olmalıdır?

“Bir M kümesinin “gücünden” veya “çokluk sayısından” anladığımız etken düşünce yeteneğimiz yardımıyla her m ögesinin özelliklerinden ve sıralamadaki verilişlerinden soyutladığımızda kalan genel kavramı anlıyoruz.

Bu iki kat soyutlamanın sonucunu, M 'nin gücünü veya çokluk sayısını $\overline{M}$ ile gösteriyoruz. Her bir m ögesini özelliklerinden soyutladığımızda bir “Bir” oluşacağından $\overline{M}$ çokluk sayısı, verilen M kümesinin bir zihinsel resmi veya izdüşümü olarak zihnimizde sırf “Birlerden” oluşan bir küme olarak bir varlığa sahiptir[14], [16] s.286.”

Bu Cantor'un çokluk sayılarının tanımına ilişkin en çok atıfta bulunulan söylemidir. Oluşturduğumuz “Birler” birbirinden ayırt edilebilir olmak zorundadırlar. Dedekind'in bunu açıkça belirttiğini ve daha titiz davrandığını anımsayınız. Yapılan, bir kümeyi onunla eşgüçlü olan, ancak “Birlerden” oluşan eş güçlü bir kümeyle değiştirmekten başka bir şey değildir. Bir başka deyişle çokluklar için, sırf birlerden oluşan örnekler oluşturmuş oluyoruz.²⁵

Cantor'un düşüncesini bir başka örnekle anlatmayı deneyelim. 70 koltuklu bir sinema salonu düşünelim. Koltuklar *herhangi* bir biçimde birden yetmiş kadar numaralandırılmış olsunlar. Salonda *numaralı* biletler almış izleyicilerin belli bir *düzen* içinde biletleriyle aynı numarayı taşıyan koltuklara, her koltukta bir kişi olmak üzere oturduklarını varsayalım ve boş koltuk kalmasın. Bu durumda biz rahatlıkla içerde 70 izleyici olduğunu söyleriz. Fakat daha fazlasını da biliyoruz: Beş numaralı izleyici beşinci koltukta, kırk numaralı izleyici kırkıncı koltukta oturmaktadır. Bireyleri ayırt edebiliyorum. Bireyleri tüm kişisel özelliklerinden arındıralım, en iyisi onları unutalım. Her bireyi üzerine oturduğu numaralı koltukla değişelim. Geriye bireylerin oturacağı *numaralanmış* koltuklar kalsın. Şimdi koltukların numaralarını sökelim. İzleyiciler salona girdiklerinde boş buldukları herhangi bir koltuğa *rasgele* otursunlar. Her koltukta bir kişi olmak üzere yine tüm

²⁵Bir I çubuğuyla işe başlayıp oluşturulan herhangi bir nesnenin sonuna yeni bir çubuk ekleme işlemi ile kuşkusuz, Hilbert veya Lorenzen gibi, $I, II, III, IV, \dots$ doğal sayılarını oluşturabilirsiniz. Her ne kadar bu şekillerde görsel olarak net biçimde sırasıyla *bir, iki, üç, dört,* çokluklarını temsil etseler de kümeler değildir dolayısıyla kuramımızın nesneleri değildirler.

koltuklar dolu olduğunda içerde 70 izleyici olduğunu söyleriz²⁶. Bu salondaki numarasız koltukların kümesi 70 çokluk sayısını temsil eder, tıpkı bir elimdeki parmakların atalarımız için beşi temsil etmesi gibi:

““Beş” çokluk sayısı için sadece bunu temsil eden bir kümeye (örneğin bir elimin parmakları) gereksinim vardır. Bu nedenle aslında “beş” kendi başına bir kavramdır ve “iki” veya “üç” veya herhangi bir başka çokluk sayısından bağımsızdır. $2 + 3 = 5$ gibi bir denklem bizi sanki 5 kavramının 2 ve 3 kavramlarını *parçaları olarak içerdiği* varsayımına götürmemelidir. Onları sadece *sanal parçalar* olarak düşünebiliriz[16], *Mitteilun-gen zur Lehre vom Transfiniten*, s.418.”

Zaman içerisinde çokluklara *sıfır, bir, iki, ...* gibi şimdi *çokluk sayıları* (veya *kardinal sayıları*) dediğimiz isimler taktık ve sonradan bu sayılara ise 0, 1, 2, ... gibi imler karşılık getirdik. Çokluk sayıları için

$$\overline{A}, |A|, \aleph A$$

gösterimleri yaygındır. Biz $\aleph A$ gösterimini yeğleyeceğiz. Çokluk sayılarından ne anlarsak anlayalım onlardan beklediğimiz temel özellik

$$\aleph A = \aleph B \iff A \sim B \quad (2.8)$$

olmasıdır. $\sim$ bağıntısı yansımalı, bakışımli ve geçişli olduğundan ilk akla gelen $\aleph A$ çokluk sayısını $\{X \in \mathbb{U} \mid X \sim A\}$ olarak açıklamaktır (Frege-Russel). Ancak daha önce de belirttiğimiz gibi $A \neq \emptyset$ ise $\{X \in \mathbb{U} \mid X \sim A\}$ bir küme değildir, bir öz sınıftır ve CKK’ de kümelerin çokluk sayılarının da bir küme olmasını istiyoruz. Russell bu tanımlı seçti. Ancak biz bunu NBG kuramında da tanım olarak kullanmayacağız. Böyle bir tanım bize çokluk sayılarından küme oluşturma şansı bırakmaz!

Tüm matematik nesnelerimiz kümeler olacaksa *çokluk sayılarımız da*, Cantor’un da işaret ettiği gibi *kümeler olacaktırlar*. Bu kümelerin seçiminde bir doğallık olmalıdır. Cantor $\tilde{\mathbb{U}}$ ’de çalıştığından böyle bir doğal seçimi bulamayıp yukarıda verdiğimiz açıklamada bulunmuş olabilir. Ancak $\mathbb{U}$ ’da çalışan Neumann doğal bir biçimde her çokluk için onu temsil eden bir küme tanımlamıştır. Sezgisel sonlu kümeler için bunlar tam da (2.5) Neumann doğal sayılarıdır:

$$0 = \emptyset, 1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, 3 = \{0, 1, 2\}, \dots$$

²⁶Salona *düzenli* bir biçimde oturmakla *düzensiz* biçimde oturmanın aynı sonucu vermesinin matematiksel nedeni sonlu bir kümenin herhangi iki iyi sıralamasının eşyapılı olmasıdır. Sonsuz kümelerde bu yanlıştır. İlerde öğreneceğiz.

her bir $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ Neumann doğal sayısı tam da sezgisel n ögesi bir kümedir. (2.6.3)'ten dolayı herhangi bir sonlu kümenin eşgüçlü olduğu $n \in \mathbb{N}$ tek olarak belirli olduğundan aşağıdaki tanım kusursuzdur.

Tanım 2.7.1 *A sonlu bir kümeysse $A \sim n$ koşulunu sağlayan tek olarak belirli $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısına A kümesinin **çokluk sayısı** veya **kardinal sayısı** denir ve bu $\sharp A = n$ ile gösterilir.*

Bu tanıma göre elbette her $n \in \mathbb{N}$ için $\sharp n = n$. (2.6.3)'ten dolayı (2.8) sağlanır. Bir sonlu kümenin hiçbir öz altkümesiyle eşgüçlü olmaması bu kümeler için çokluk sayısı tanımını nispeten kolaylaştırmıştır. Sonsuz kümelerde, bazı öz altkümeleri ile eş güçlü oldukları için, işimiz biraz zordur. Bunu şimdilik (II.15)'e erteliyoruz. İlerde sıra sayılarını açıkladığımızda $\sharp A$ çokluk sayısını A ile eş güçlü olan sıra sayılarının en küçüğü olarak açıklayacağız. Şimdilik şunu bilmek yeterlidir: Her sonsuz A kümesine de, onun çokluk sayısı diyeceğimiz bir $\sharp A$ kümesi (2.8) sağlanacak biçimde karşılık getirilmiş olsun. A sonsuz olduğunda $\sharp A$ **sonsuzdur** diyeceğiz.

Çokluk sayıları arasında

$$\sharp A < \sharp B \iff A \prec B$$

ile tanımlanan $<$ bağıntısı $Cks := \{\sharp A \mid A \in \mathbb{U}\}$ sınıfında²⁷ (2.5.3)'ten dolayı bir kısmi sıralamadır. Özellikle ν, μ çokluk sayıları ise (2.5.3)'ten

$$\nu \leq \mu \wedge \mu \leq \nu \implies \nu = \mu.$$

Ashında ileride bunun bir iyi sıralama olduğunu öğreneceğiz. Ancak her $A, B \in \mathbb{U}$ için

$$A \prec B \vee A \sim B \vee B \prec A$$

olduğunu bile henüz kanıtlamadık. İlerde bunu kanıtlayacağız.

2.7.1 Çokluk Sayılarında İşlemler

Çokluk sayılarımızın uymasını istediğimiz temel özellik

$$\sharp A = \sharp B \iff A \sim B$$

idi. A ve B iki küme ise $A \sim A \times \{0\}$, $B \sim B \times \{1\}$ olduğunu biliyoruz, öyleyse $\sharp A = \sharp(A \times \{0\})$ ve $\sharp B = \sharp(B \times \{1\})$. Diğer yandan

$$A \sim A' \wedge B \sim B' \wedge (A \cap B = \emptyset) \wedge (A' \cap B' = \emptyset) \implies A \cup B \sim A' \cup B'.$$

$$A \sim A' \wedge B \sim B' \implies A \times B \sim A' \times B'.$$

$$A \sim A' \wedge B \sim B' \implies {}^A B \sim {}^{A'} B'.$$

²⁷İlerde bu sınıfın bir öz sınıf olduğunu öğreneceğiz.

$\{A_i\}_{i \in I}$ ve $\{A'_i\}_{i \in I}$ iki küme ailesi ve her $i \in I$ için $A_i \sim A'_i$ ise

$$\prod_{i \in I} A_i \sim \prod_{i \in I} A'_i.$$

Eğer ayrıca her iki aile de *ayrık*sa

$$\bigcup_{i \in I} A_i \sim \bigcup_{i \in I} A'_i.$$

Bu özelliklerden dolayı aşağıdaki tanımdaki kavramlar iyi tanımlıdır. Ayrıca $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ve $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ sonlu kümelerse $A \times B$ kümesinin $n \cdot^{\mathcal{N}} m$ ögeli ve ${}^A B$ kümesinin ise $\mathcal{N}m^n$ ögeli olduğunu biliyoruz (Gerçekten de bir $f : A \rightarrow B$ fonksiyonu her bir a_k ögesini m farklı ögeye resmedebileceğinden sonuçta A kümesinden B kümesine

$$\underbrace{m \cdot^{\mathcal{N}} m \cdot^{\mathcal{N}} \dots \cdot^{\mathcal{N}} m}_{n\text{-kez}} = \mathcal{N}m^n$$

farklı fonksiyon tanımlanabilir). Bunlar ise çokluk sayıları arasındaki çarpım ve üs tanımına ışık tutacaklardır.

Tanım 2.7.2 A, B kümeler, $\{A_i\}_{i \in I}$ bir küme ailesi ve $\kappa = \mathfrak{h}A, \lambda = \mathfrak{h}B, \kappa_i = \mathfrak{h}A_i$ olmak üzere

1. $\kappa \dot{+} \lambda = \mathfrak{h}A \dot{+} \mathfrak{h}B := \mathfrak{h}((A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}))$.
2. $\kappa * \lambda = \mathfrak{h}A * \mathfrak{h}B := \mathfrak{h}(A \times B)$.
3. $!\lambda^\kappa = !(\mathfrak{h}B)^{\mathfrak{h}A} := \mathfrak{h}({}^A B)$.
4. $\sum_{i \in I} \kappa_i = \sum_{i \in I} \mathfrak{h}A_i := \mathfrak{h}(\bigcup_{i \in I} A_i \times \{i\})$, eğer ayrıca $\{A_i\}_{i \in I}$ **ayrık**sa $\sum_{i \in I} \kappa_i := \mathfrak{h}(\bigcup_{i \in I} A_i)$.
5. $\prod_{i \in I}^* \kappa_i = \prod_{i \in I}^* \mathfrak{h}A_i := \mathfrak{h}(\prod_{i \in I} A_i)$.
6. $\aleph_0 := \mathfrak{h}\mathbb{N}$ ve $\mathfrak{c} := \mathfrak{h}\mathbb{R}$.

Not 2.7.3 $\sum_{i \in I} \kappa_i$ ve $\prod_{i \in I}^* \kappa_i$ gösterimleri formüllerde

$$\sum_{i \in I} \kappa_i \quad \text{ve} \quad \prod_{i \in I}^* \kappa_i$$

şeklini alırlar. Bu tanımlardan ve eşgüçlü kümeler hakkında bildiklerimizden doğrudan görülen bazı gerçekleri sıralayalım. Aşağıdaki notlarda $\kappa := \mathfrak{h}A, \lambda := \mathfrak{h}B, \varkappa := \mathfrak{h}C$ ve her $i \in I$ için $\kappa_i = \mathfrak{h}A_i$ olacaktır.

1. Her şeyden önce herhangi iki A, B kümesi ayrıkça

$$\kappa \dot{+} \lambda = \natural A \dot{+} \natural B = \natural(A \sqcup B)$$

olduğu açıktır.

2. Çokluk sayıları arasında açıklanan bu toplama ve çarpma işlemleri

$$A \times \{0\} \cup B \times \{1\} \smile B \times \{1\} \cup A \times \{0\} \text{ ve } A \times B \smile B \times A$$

olduğu için değişimlidirler., dd.

$$\kappa \dot{+} \lambda = \lambda \dot{+} \kappa \text{ ve } \kappa * \lambda = \lambda * \kappa.$$

3. A, B, C kümeler, B ve C ayrıkçalar, $A \times B$ ve $A \times C$ kümeleri de ayrıktır. $A \times (B \sqcup C) = (A \times B) \sqcup (A \times C)$ olduğundan

$$\kappa * (\lambda \dot{+} \varkappa) = (\kappa * \lambda) \dot{+} (\kappa * \varkappa)$$

dağılım özelliği elde edilir.

4. A bir küme, $\{A_i\}_{i \in I}$ ayrık bir aile olsun. $A \times \bigsqcup_{i \in I} A_i = \bigsqcup_{i \in I} A \times A_i$ bir ayrık birleşim olduğundan

$$\kappa * \left(\sum_{i \in I} \kappa_i \right) = \sum_{i \in I} (\kappa * \kappa_i), \text{ (Genel dağılım kuralı).}$$

5. $I \neq \emptyset$ ve $\{I_j\}_{j \in J}$ ise I kümesinin bir parçalanışı ve her $i \in I$ için κ_i bir çokluk sayısı ise Prob.(2.5.7) ve (2.5.9) ile

$$\sum_{i \in I} \kappa_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} \kappa_i \right) \text{ ve } \prod_{i \in I}^* \kappa_i = \prod_{j \in J}^* \left(\prod_{i \in I_j}^* \kappa_i \right) \text{ (gruplama).}$$

Özel olarak

$$\kappa \dot{+} (\lambda \dot{+} \varkappa) = (\kappa \dot{+} \lambda) \dot{+} \varkappa \text{ ve } \kappa * (\lambda * \varkappa) = (\kappa * \lambda) * \varkappa.$$

6. λ ve her $i \in I$ için κ_i birer çokluk sayısı olmak üzere (Prob.2.5.10)

$$!\lambda^{\sum_{i \in I} \kappa_i} = \prod_{i \in I}^* !\lambda^{\kappa_i}.$$

Özel olarak

$$!\lambda^{\kappa + \nu} = !\lambda^{\kappa} * !\lambda^{\nu}.$$

7. κ, λ ve $\varkappa$ çokluk sayıları ise (2.5.2)(3) ile

$$!(\kappa^\lambda)^\varkappa = !\kappa^{\lambda * \varkappa}.$$

8. Prob. 2.5.11'den

$$!\left(\prod_{i \in I}^* \kappa_i\right)^\lambda = \prod_{i \in I}^* !\kappa_i^\lambda.$$

Özel olarak

$$!(\kappa * \nu)^\lambda = !\kappa^\lambda * !\nu^\lambda.$$

9.

$$\sum_{i \in \emptyset}^* \kappa_i = 0, \prod_{i \in \emptyset}^* \kappa_i = 1$$

ve $I = \{1, 2\}$ için

$$\sum_{i \in I}^* \kappa_i = \kappa_1 \dot{+} \kappa_2, \prod_{i \in I}^* \kappa_i = \kappa_1 * \kappa_2.$$

10. $A = \bigsqcup_{a \in A} \{a\}$ ayrık birleşim olduğundan

$$\kappa = \underbrace{1 \dot{+} 1 \dot{+} 1 \dot{+} \cdots}_{\kappa \text{ kez}}$$

11. $A \times B = \bigsqcup_{b \in B} A \times \{b\}$ ayrık birleşim olduğundan

$$\kappa * \lambda = \sum_{v \in \lambda}^* \kappa.$$

12. ${}^A B = \prod_{a \in A} B$ olduğundan

$$!\lambda^\kappa = \prod_{\nu \in \kappa}^* \lambda, \quad (\kappa = \mathfrak{d}A).$$

13. Her sonsuz κ için $\aleph_0 \leq \kappa$. Ayrıca $\aleph_0 < \mathfrak{c}$ ve $\mathfrak{c} = !2^{\aleph_0}$. $\square$

Neumann doğal sayılarımız için daha fazlasını söyleyebiliriz:

Önerme 2.7.4 Her $m, n \in \mathbb{N}$ için çokluk sayıları arasındaki toplama, çarpma ve üs işlemleri, Peano yapısından kaynaklanan toplama, çarpma ve üs işlemleriyle çakışır, dd.

$$m \dot{+} n = m +^{\mathcal{N}} n, m * n = m \cdot^{\mathcal{N}} n, !m^n = \mathcal{N}m^n$$

Bu eşitliklerde sol yanda çokluk sayıları işlemleri, sağ yanda ise Peano yapısı işlemleri bulunmaktadır.

Kanıt. Örnek oluşturmak üzere n üzerinden tümevarımla

$$m \dot{+} n = m +^{\mathcal{N}} n$$

olduğunu gösterelim. $m \in \mathbb{N}$ keyfi verilip sabit tutulsun. Her şeyden önce herhangi bir k doğal sayısı için $k \dot{+} 1 \sim k \cup \{k\} = k +^{\mathcal{N}} 1$ olduğundan her k doğal sayısı için $k \dot{+} 1 = k +^{\mathcal{N}} 1$ olduğu apaçıktır(*).

- i) $n = 0$ için: $m \dot{+} 0 = m = m +^{\mathcal{N}} 0$.
- ii) Önerme n için kanıtlanmış olsun.

$$\begin{aligned} m \dot{+} (n \dot{+} 1) &= (m \dot{+} n) \dot{+} 1 \stackrel{tvk}{=} (m +^{\mathcal{N}} n) \dot{+} 1 \\ &\stackrel{(*)}{=} (m +^{\mathcal{N}} n) +^{\mathcal{N}} 1 = m +^{\mathcal{N}} (n +^{\mathcal{N}} 1) \end{aligned}$$

olur ve işimiz biter. Çarpma toplam, üs ise çarpma üzerinden kazanılabileceğinden buradan yola çıkarak diğer işlemlerin örtüştüğünü kanıtlamayı ödev olarak bırakıyoruz. ■

Daha önce eşgüçlü kümelerle ilişkin elde ettiğimiz bazı sonuçları şimdi çokluk sayıları türünden ifade edeceğiz. Her şeyden önce A, B herhangi iki boştan farklı kümelerse $\{A \times \{b\}\}_{b \in B}$ ve $\{\{a\} \times B\}_{a \in A}$ aileleri $A \times B$ kümesinin birer parçalanışdır. Buradan, $\kappa := \sharp A$ ve $\lambda := \sharp B$ dersek

$$\kappa * \lambda = \underbrace{\kappa \dot{+} \kappa \dot{+} \kappa \dot{+} \cdots}_{\lambda \text{ kez}} = \underbrace{\lambda \dot{+} \lambda \dot{+} \lambda \dot{+} \cdots}_{\kappa \text{ kez}}$$

Ayrıca ${}^A 2 \sim \mathcal{P}(A)$ olduğundan her A kümesi için

$$\sharp \mathcal{P}(A) = !2^{\sharp A} = !2^{\kappa}$$

olur. Daha önce elde ettiğimiz her $0 \neq n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^n$ ve $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^n$ bağıntılarından her $0 \neq n \in \mathbb{N}$ için $!\aleph_0^n = \aleph_0$ ve $!\mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}$, özellikle

$$\aleph_0 * \aleph_0 = \aleph_0 \text{ ve } \mathfrak{c} * \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

olur. T ve C kümeleri sırasıyla tek ve çift doğal sayıların kümelerini göstermek üzere bir yandan $T \sim C \sim \mathbb{N}$ iken diğer yandan $T \cap C = \emptyset$ ve $\mathbb{N} = T \cup C$

olduğundan $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ olur. Yine $[0, 1)$, $[1, 2)$ ve $[0, 2)$ aralıklarının her biri bir yandan $\mathbb{R}$ ile eşgüçlüdürler, diğer yandan $[0, 2) = [0, 1) \cup [1, 2)$. Buradan

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c} + \mathfrak{c}$$

olur. Ayrıca her $\kappa \leq \aleph_0$ ve her $\lambda \leq \mathfrak{c}$ için $\kappa + \aleph_0 = \aleph_0$ ve $\lambda + \mathfrak{c} = \aleph_0 + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ olduğu aşıkardır. Yine her $0 \neq n \in \mathbb{N}$ için $\mathbb{N} \preccurlyeq n \times \mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{N}$ ve $\mathbb{R} \preccurlyeq n \times \mathbb{R} \preccurlyeq \mathbb{N} \times \mathbb{R} \preccurlyeq \mathbb{R}^2 \preccurlyeq \mathbb{R}$ olduğu için

$$n * \aleph_0 = \aleph_0, n * \mathfrak{c} = \aleph_0 * \mathfrak{c} = \mathfrak{c}.$$

Özellikle $\aleph_0 + \mathfrak{c} = \aleph_0 * \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ olduğunu görüyoruz ve bu tüm sonsuz çokluk sayıları için tipiktir: İki sonsuz çokluğun toplamı ve çarpımı bu çoklukların büyük olanına eşittir. Bu ilerde (2.15.12) olarak kanıtlanacaktır.

Problem 2.7.1 κ, λ ve μ çokluk sayıları ise $\kappa + \mu = \lambda + \mu \implies \kappa = \lambda$ ve $\kappa * \mu = \lambda * \mu \implies \kappa = \lambda$ çıkarımlarının genelde doğru olmadıklarını kanıtlayınız.

Problem 2.7.2 $X \neq \emptyset$ kümesinde bir R denklik bağıntısı verilsin. Tüm denklik sınıflarının çokluk sayıları aynı ve κ ise $\mathfrak{h}X = \mathfrak{h}(X/R) * \kappa$ olduğunu kanıtlayınız. Gruplar kuramındaki indeks teoreminin bununla bir ilgisi var mıdır?

Problem 2.7.3 $f : X \rightarrow Y$ örten ve her X_y^f sapının çokluk sayısı aynı ve κ ise $\mathfrak{h}X = \mathfrak{h}Y * \kappa$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.7.4 κ bir sonsuz çokluk sayısı ise $\aleph_0 + \kappa = \kappa$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $n + \kappa = \kappa$ olduğunu gösteriniz. İpucu: Bir μ çokluk sayısı ile $\kappa = \mu + \aleph_0$ olduğundan yola çıkınız.

Problem 2.7.5 $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ 'dan yola çıkarak tek satırda $\mathfrak{c} * \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.7.6 Her $i \in I$ için $\kappa_i \leq \mu_i$ ise $\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \sum_{i \in I} \mu_i$ ve $\prod_{i \in I}^* \kappa_i \leq \prod_{i \in I}^* \mu_i$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.7.7 κ, ν, μ çokluk sayıları ve $\nu \leq \mu$ ise $!\kappa^\nu \leq !\kappa^\mu$ ve $!\nu^\kappa \leq !\mu^\kappa$ olduğunu gösteriniz.

2.8 SIRA SAYILARI

Bu altbölümün kaynağı Neumann'ın [44] çalışmasıdır. Sıra sayılarını Aksiyomatik Kümeler Kuramında bizim de yapacağımız gibi $\in$ ile iyi sıralanmış geçişli kümeler

olarak açıklamak bu tanımın mantığı hakkında hiçbir ipucu vermez. Neumann'ın sıra sayılarına ilişkin ilk çalışması olan bu çalışmayı iki nedenle izleyeceğiz: Birincisi Neumann doğal sayıların ve sıra sayıların tanımlarının son derece yalın nedenlerini öğretir, ikincisi ise iyi sıralanmış kümelerin tanımı ve onlar arasındaki eşyapı fonksiyonlarının tanımı dışında hiçbir ön bilgiyi gerektirmez. Yine de çabucak hedefe ulaşılır.

Bir A sınıfındaki R bağıntısına A 'da:

yansımalıdır	$:\iff \forall x \in A (xRx).$
yansımazdır	$:\iff \forall x \in A \neg(xRx).$
bakışlıdır	$:\iff \forall x, y \in A (xRy \implies yRx).$
ters bakışlıdır	$:\iff \forall x, y \in A (xRy \wedge yRx \implies x = y).$
geçişlidir	$:\iff \forall x, y, z \in A (xRy \wedge yRz \implies xRz).$
bağlantılıdır	$:\iff \forall x, y \in A (xRy \vee x = y \vee yRx).$

dediğimizi anımsatalım.

Sıralı ikili tanımını öz sınıflara da genişleteceğiz. A ve B 'den en az biri öz sınıf ise

$$(A, B) := A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$$

olarak tanımlansın. Bu tanım sıralı ikililerden beklediğimiz temel

$$(A, B) = (A', B') \iff A = A' \wedge B = B'$$

özellğine sahiptir.

Tanım 2.8.1 A sınıfında bir R bağıntısı verilsin. R bağıntısı yansımaz ve geçişli ise A 'da bir **(kısmi) sıralama bağıntısıdır** denir. Eğer R bağıntısı yansımaz, geçişli ve bağlantılı ise buna A sınıfında bir **doğrusal sıralama** denir. Eğer R bağıntısı yansımali, ters bakışlı ve geçişli ise A sınıfında bir **yansımali (kısmi) sıralama bağıntısıdır** denir. Ayrıca bağlantılı olan yansımali kısmi sıralamalara **yansımali doğrusal sıralamalar** denir. A sınıfında bir R kısmi sıralaması verilsin. Bu durumda $\mathcal{A} := (A, R)$ ikilisine bir **(kısmi) sıralanmış sınıf** denir. Bazen kısaca $\mathcal{A} := (A, R)$ **(kısmi) sıralanmıştır** diyeceğiz.

Tanım 2.8.2 $\mathcal{A} := (A, R)$ ve $\mathcal{B} := (B, S)$ iki kısmi sıralanmış sınıf olsunlar.

$$\forall x, y \in A (xRy \iff f(x)Sf(y))$$

koşulunu sağlayan $f : A \rightarrow B$ tamsellemelerine $\mathcal{A}$ 'dan $\mathcal{B}$ 'ye **eşyapı dönüşümleri** denir ve bu durum $f : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ ile gösterilir. Eğer böyle bir eşyapı dönüşümü varsa $\mathcal{A}$ ile $\mathcal{B}$ **eşyapılıdır** denir ve bu durum $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ ile gösterilir.

Bundan sonra $<$ ile herhangi bir R yansız kısmi sıralamasını göstereceğiz. Bu sıralamaya ilişkin $\underline{R}$ yansız sıralamasını ise $\leq$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.8.3 A sınıfında herhangi bir R ikili bağıntısı verilsin. $B \subseteq A$ ve $x \in A$ için

$$B_x^R := \{y \mid y \in B \wedge y < x\}$$

sınıfına x **öğesinin** R bağıntısına göre B sınıfındaki **başlangıcı** veya **uzantısı** denir. A sınıfındaki uzantılardan kısaca uzantılar olarak söz edeceğiz. Bu kavramın ikilisi ise x **öğesinin** R bağıntısına göre B sınıfındaki **sonrası** diyeceğiz

$$B_R^x := \{y \mid y \in B \wedge x < y\}$$

kümesidir. Yanlış anlamadan çekinmediğimiz durumlarda B_x^R ve B_R^x yerine kısaca B_x ve B^x yazacağız.

Tanım 2.8.4 X ve R sınıflar olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlandığında R , X sınıfında bir **iyi sıralamadır** ve $\mathcal{X} = (X, R)$ ikilisine bir **iyi sıralanmış sınıftır** diyeceğiz:

1. $\mathcal{X} = (X, R)$ doğrusal sıralanmıştır,
2. X sınıfının boştan farklı her altkümesinin R bağıntısına göre bir en küçük öğesi vardır, dd.

$$\forall B \in \mathbb{U} (\emptyset \neq B \subseteq A \implies \exists b \in B \forall x \in B (b \neq x \implies bRx))$$

3. Her $x \in X$ için X_x^R uzantısı bir kümedir (X bir kümeysse bu koşul hep sağlanır).

Not 2.8.5 Şimdi bize $(A, <_A)$ ve $(B, <_B)$ gibi iki iyi sıralanmış küme verilsin ve $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ olsun. A ve B kümelerinin çokluklarını kıyasladığımız saflıkla bu iki kümenin sıralamalarını da kıyaslayabiliriz. A kümesinin en küçük öğesini a_0 , B kümesinin en küçük öğesi b_0 , $A \setminus \{a_0\}$ kümesinin en küçük öğesi a_1 , $B \setminus \{b_0\}$ kümesinin en küçük öğesi $b_1, \dots$ olsun. Bu işlemi mümkün olduğu sürece sürdürelim. a_0 öğesi b_0 ile, a_1 öğesi b_1 ile... eşleşsin. İki durum söz konusudur: Bu iş aynı anda biter, o zaman $(A, <_A) \cong (B, <_B)$, ya da biri diğerinden önce biter, o zaman önce biten diğerinin bir uzantısıyla eşyapılıdır. Bu doğrudur ve ileride kanıtlayacağız. Bu irdeleme aynı zamanda *iki iyi sıralanmış küme arasında, eğer varsa ancak bir eş yapı dönüşümü olduğunu da gösterir*. Çünkü böyle bir eşyapı dönüşümü, sıralamaya sadık olacağından, zorunlu olarak a_0 öğesini b_0 öğesine, a_1

ögesini b_1 ögesine..... resmetmek zorundadır. Ayrıca bu irdelemede bir tekrarlı seçme vardır. Doğal sayılarda olduğu gibi burada da tekrarlı seçmenin dayanağı Seçme Aksiyomu ve sonluötesi tümevarım teoremidir. $\square$

Not 2.8.6 Kısaca Seçme Aksiyomu ile *iyi sıralama aksiyomunun* ($:=$ Her küme iyi sıralanabilir) ilişkisine değinelim. İyi sıralama aksiyomu geçerli olsun. $\mathcal{A}$ bir küme ailesi ve her $A \in \mathcal{A}$ kümesi boştan farklı olsun. Her $A \in \mathcal{A}$ kümesini $<_A$ ile iyi sıralayalım ve a_A ise bu sıralamaya göre A kümesinin en küçük ögesi olsun. Bu durumda $f := \{(A, a_A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ Seçme Aksiyomunun istediği bir $f : \mathcal{A} \rightarrow \bigcup \mathcal{A}$ fonksiyonudur.

[Safça irdelemeler] Şimdi Seçme Aksiyomu verilmiş olsun ve bize bir $A \neq \emptyset$ kümesi verilsin. A kümesini iyi sıralamak istiyoruz. Bu kümeden bir a_0 ögesini seçip onu en küçük öge olarak tanımlarız. $A \setminus \{a_0\}$ kümesinden rastgele bir a_1 ögesini seçer ve onu a_0 ögesinden hemen sonra gelen öge, dd. $A \setminus \{a_0\}$ kümesinin en küçük ögesi olarak açıklarız. Elbette $a_0 < a_1$ olacaktır. Bu işlem bizi sonlu kümelerde kesin bir iyi sıralamaya götürür. Biraz tedirgin biçimde olsa da sonsuz A kümelerinde de Seçme Aksiyomu yardımıyla bu işlemin bizi A kümesinde bir iyi sıralamaya götüreceğini umarız. Bu gerçekten de böyledir ve bu iki aksiyom denktir. Biz Seçme Aksiyomundan yola çıktığımız için her kümenin iyi sıralanabileceği bir teoremdir. Ancak bir kümenin iyi sıralanabilineceğini bilmek ve onu iyi sıralamak çok farklı şeylerdir. Örneğin biz $\mathbb{R}$ kümesinin iyi sıralanabileceğini biliyoruz ancak bugüne kadar bu kümeyi iyi sıralayabilmiş değiliz! Bu Seçme Aksiyomunun kurgusal olmayışından kaynaklanır. $\square$

“Her sıralanmış kümeye $\overline{M}$ ile göstermek istediğimiz belli bir *sıralama tipi* veya kısaca belli bir *tip* karşılık getirilir; bundan anladığımız ise M kümesinden, *sıralamalarını koruyarak öğelerini tüm özelliklerinden soyutladıktan sonra elde edilen genel kavramdır.*

Buna göre $\overline{M}$ sıralama tipinin *kendisi*, M kümesinden soyutlanarak elde edildikleri öğelerin kendi aralarındaki sıralamalarını koruyan *salt birlerden oluşan sıralanmış bir kümedir* (Cantor [15], [16] s.297).²⁸

Bu tanım Dedekind’in sırasayıları tanımına benzemektedir. Ne var ki Dedekind nesneleri tüm özelliklerinden arındırırken ayırt edilebilirliklerinin korunacağını özellikle belirterek daha titiz davranmıştır. Cantor’un asıl amacı eşyapılı sıralanmış kümelerin *sıralamaya ilişkin* ortak özelliklerini incelemektir. Önemli olan sıralanmış kümenin nesnelerinin ne olduğu değil

²⁸Bu birler elbette ayırtedilebilir olmalıdırlar.

onların birbiri arasındaki sıralamaya ilişkin konumlarıdır. Cantor'un, M kümesindeki sıralamayı koruyan ve sırf birlerden oluşan $\overline{M}$ kümesi sıralama tipi hakkında kafamızda oldukça iyi bir resim oluşturmaya karşın kuramımızda kullanabileceğimiz bir nesne değildir. Çokluk sayılarının tanımında olduğu gibi her sıralanmış $\mathcal{A}$ kümesine $\overline{\mathcal{A}}$ veya $st\mathcal{A}$ ile göstereceğimiz ve $\mathcal{A}$ 'nın **sıralama tipi** diyeceğimiz, ne olduğu önemli olmayan, ancak

$$\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{B}} \iff \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$$

bağıntısını sağlayan bir nesne (Hausdorff'un yaptığı gibi) veya bir sıralanmış küme (bizim yapacağımız gibi) karşılık getirilebilir. İyi sıralanmış kümelerin sıralama tiplerine Cantor **sıra sayıları** demektir.

İyi sıralanmış $\mathcal{A} = (A, <_A)$ 'nın $srs\mathcal{A}$ ile gösterilen sıra sayısının ilk aklı gelen tanımlarından bir diğeri aşağıdaki gibidir:

$$srs\mathcal{A} \stackrel{?}{=} \{\mathcal{B} : \mathcal{B} \cong \mathcal{A}\}.$$

Bu tanım da çokluk sayılarındaki aynı nedenle sorunludur, sağ yan yine, $A \neq \emptyset$ için bir sınıf olduğundan Cantor Kümeler Kuramında yeri yoktur.

Cantor sıra sayıları arasında da bir sıralama tanımlamış ve bu sıralamayla Ω ile gösterdiği sıra sayıları sınıfının iyi sıralanmış olduğunu kanıtlamıştır. Okuyucunun da kolayca kanıtlayacağı gibi iyi sıralanmış n ögeli iki sonlu küme daima eşyapılıdır. Bu nedenle $\emptyset$ kümenin sıralama tipini 0 ve n ögeli sonlu bir kümenin sıralama tipini yine n ile gösterebiliriz. Bir an için bu sıra sayıları arasındaki sıralamayı geçici olarak $\prec$ ile gösterirsek yine

$$0 \prec 1 \prec 2 \prec \dots \prec n \prec \dots$$

geçerlidir. $0, 1, \dots, n-1$ sıra sayılarının $\prec$ ile iyi sıralanmış $\{0, 1, \dots, n-1\}$ kümesinin sıralama tipi, dd. sıra sayısı tam da n sıra sayısıdır. Cantor bu özelliğin tüm sıra sayıları için doğru olduğunu kanıtlamıştır: *Her α sıra sayısı kendinden önce gelen sıra sayılarının sıralama tipidir.*

Bu bölümde iyi sıralanmış kümeler için onlarla eşyapılı olanlar arasından doğal adayları belirleyip sıra sayıları olarak açıklayacağız. Bu bağlamda Neumann'ın izlediği yol genel kabul görmüştür. Şimdi bu yolu tanıyalım ve iyi sıralanmış kümeler hakkında sadece iki tanımı, (2.8.2), (2.8.4)'ü bilmenin yeterli olacağını bir kez daha anımsatalım. Sözü önce Cantor'a sonra Neumann'a bırakalım:

“1, 2, 3, ... pozitif tam gerçekte sayılar dizisinin oluşum nedeni, tekrarlanan birim eklemek ve eklenen birbirine eşit birimlerin birleştirilmesidir. ν sayısı bir yandan sonlu sayıda birbirini

izleyen eklemelerin sayısını, diğer yandan ise eklenen birimlerin bir bütüne birleştirilmesini gösterir. Böylece sonlu tam gerçek sayıların oluşturulması şimdiden oluşturulmuş olan sayıya bir birim eklemeye dayanır; büyük sayıların oluşturulmasında da önemli rol oynayacak bu işleme *Birinci Üretme İlkesi* diyeceğim. Bu şekilde elde edilen ν sayılarının oluşturduğu sınıf (I) sonsuzdur ve öğelerinin bir en büyüğü yoktur. Her ne kadar sınıf (I)'in en büyük öğesinden söz etmek çelişkili ise de, tüm (I)'in içeriğinin yasaya uygun olarak doğal ardışıklığında verilmişliğinin ifadesi olacak ω ile göstereceğim *yeni* bir sayı düşünmekte rahatsız edici hiçbir yan yoktur (tıpkı ν 'nün belli bir sonlu sayıdaki birimlerin bir bütüne birleşmesinin bir ifadesi olması gibi). Hatta yeni oluşturulan ω sayısını, ν sayılarının yaklaştığı bir *sınır* olarak düşünebilirim; bundan anlaşılacak ise ω sayısının her bir ν sayısından büyük olup onlardan sonra gelen *ilk* sayı olduğudur. *İkinci Üretme İlkesi*: En büyüğü olmayan bir tam sayılar dizisi verildiğinde bunların *sınırı* olan ve her birinden büyük olup hemen bunlardan sonra gelen bir tam sayı oluşturulabilir. Böylece

$$1, 2, 3, \dots; \omega, \omega + 1, \dots; \omega^2, \omega^2 + 1, \dots; \omega^3, \dots; \omega^4, \dots$$

elde edilir. Tüm $\omega n + m$ tipindeki tam sayılardan sonra ise ikinci üretme ilkesi ile ω^2 elde edilir. Böylece devam edilerek

$$\omega^\mu n_\mu + \omega^{\mu-1} n_{\mu-1} + \dots + \omega n_1 + n_0$$

tipinde tam sayılar elde edilir. Tüm bunlardan sonra ise ikinci üretme ilkesi ile ω^ω elde edilir” [15].

“Biz aslında “Her sıra sayısı kendisinden önce gelen sıra sayılarının tipidir” önermesini araştırmalarımızın temeli yapacağız. Açık olmayan “tip” kavramından sakınmak içinse “Her sıra sayısı kendinden önce gelen sıra sayılarının kümesidir” şekliyle yapacağız. Ama bu sıra sayılarına ilişkin kanıtlanmış bir teorem değildir, daha ziyade, eğer sonluötesi tümevarım geliştirilmiş olsaydı, sıra sayılarının bir tanımı olurdu [44].”

$\mathcal{X} = (X, <)$ iyi sıralanmış bir küme olsun. Her $x \in X$ için $\mathcal{X}_x := (X_x, <)$ de iyi sıralanmıştır. Şimdi önümüzdeki problem şudur: Her iyi sıralanmış kümeye onunla eşyapılı olan iyi sıralanmış bir küme karşılık getireceğiz. $(\mathbb{U}, \in)$ 'da çalışacağız ve mümkün olduğunca az bilgi kullanmak istiyoruz.

$\mathcal{X}$ ve $\mathcal{X}_x$ 'lere karşılık gelecek iyi sıralanmış kümeler α ve α_x ise Cantor'un önermesi doğrultusunda

$$\alpha = \{\alpha_x \mid x \in X\} \text{ ve } \alpha_x = \{\alpha_y \mid y \in X \wedge y < x\}$$

olmalıdır. $y < x$ için $\alpha_y < \alpha_x$ olacaksa sıra sayıları arasındaki sıralama bağıntısı için doğal aday $\in$ ögesi veya $\subset$ bağıntılarıdır, dd.

$$\alpha_y < \alpha_x \iff \alpha_y \in \alpha_x \iff \alpha_y \subset \alpha_x$$

olmalıdır. Bunların gerçekleştirilebileceğini göreceğiz.

$\mathcal{X} = (X, <)$ iyi sıralanmış ve $Y \subseteq X$ ise $\mathcal{Y} = (Y, < \upharpoonright Y)$ yerine kısaca $\mathcal{Y} = (Y, <)$ yazacağız. $x \in X$ ve $y \in X_x$ olmak üzere, y ögesinin X_x ve X kümelerindeki uzantılarının eşit, dd.

$$(*) \quad y \in X_x \text{ ise } (X_x)_y = X_y$$

olduğunu görmek kolaydır (bunun için $\mathcal{X}$ 'in doğrusal sıralanmış olması yeterlidir). $\mathcal{X}_x := (X_x, <)$ olsun.

Tanım 2.8.7 Bir $f : X \longrightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonuna her $x \in X$ için

$$f(x) = f[X_x] = \{f(y) \mid y \in X_x\} = \{f(y) \mid y \in X \wedge y < x\}$$

ise $\mathcal{X}$ için bir **sıralı sayma fonksiyonu** ve $f[X]$ 'e ise $\mathcal{X}$ için bir **sıra sayısı** diyeceğiz. $\mathcal{X}$ için bir sıralı sayma fonksiyonu varsa $\mathcal{X}$ **sıralı sayılabilir** diyeceğiz²⁹.

$\{f(y) \mid y \in X \wedge y < x\}$ yerine kısaca $\{f(y) \mid y < x\}$ yazacağız. Her iyi sıralanmış $\mathcal{X}$ 'in *tek* bir sıralı sayma fonksiyonu ile sıralı sayılabileceğini ve sıra sayısının da *tek* olarak belirli olduğunu kanıtlayacağız. Ancak önce küçük bir irdelmenin yararlı olacağını düşünüyoruz.

$\mathcal{A} = (A, <)$ iyi sıralanmış kümesi verilsin. A kümesinin öğelerini küçükten büyüğe doğru

$$a < a' < a'' < a''' < \dots$$

olarak sıralayalım. $f : A \longrightarrow \mathbb{U}$ bir sıralı sayma fonksiyonu ise

$$\begin{aligned} f(a) &= f[\emptyset] = \emptyset, \quad f(a') = \{f(a)\} = \{\emptyset\}, \\ f(a'') &= \{f(a), f(a')\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots \end{aligned}$$

²⁹Neumann aslında kısaca **sayma** ve **sayılabilir** demektedir. Daha önce verdiğimiz sayılabilirlik kavramıyla karıştırmamak için biz bu kavramların başına “sıralı” kelimesini ekledik.

olur. Karşımızda tam da $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, ... Neumann doğal sayıları var ve *şimdi* bu sayıların gökten düşmediğini, son derece yalın bir mantığın ürünleri olduklarını öğrenmiş oluyoruz. Ayrıca A kümesini sıralı sayan *her fonksiyon* $0, 1, 2, \dots$ ile *sayar*! Diğer yandan başka bir iyi sıralanmış $\mathcal{B} = (B, <)$ 'yi sıralı saymayı denersek *yine aynı* Neumann doğal sayıları ile saymaya başlayacağız. Bu basit irdelemeler bir yandan her iyi sıralanmış $\mathcal{A}$ için *bir tek sıralı sayma fonksiyonu* olabileceğini açık ederken diğer yandan tüm iyi sıralanmış kümeleri *aynı* isimlerle saydığımızı da gösterir.

Teorem 2.8.8 1. f ve g fonksiyonları $\mathcal{X}$ için sıralı sayma iseler $f = g$.

2. f , $\mathcal{X}$ için bir sıralı sayma ise her $x \in X$ için $f_x := f|_{X_x}$ de $\mathcal{X}_x$ için bir sıralı saymadır ve $f_x[X_x] = f(x)$.

3. Her $x \in X$ için $\mathcal{X}_x$ sıralı sayılabilirse $\mathcal{X}$ de sıralı sayılabilir.

4. Her iyi sıralanmış $\mathcal{X} = (X, <)$ sıralı sayılabilir.

Kanıt. 1. f ve g fonksiyonları $\mathcal{X}$ için sıralı sayma olsunlar. $f \neq g$ varsayalım. Bu durumda $A := \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\} \neq \emptyset$. $\mathcal{X}$ iyi sıralı olduğundan A kümesinin en küçük ögesi vardır, bu a olsun. $a \in A$ olduğundan $f(a) \neq g(a)$, diğer yandan

$$f(a) = \{f(x) \mid x < a\} = \{g(x) \mid x < a\} = g(a)!$$

Bu bir çelişkidir.

2. (a) f , $\mathcal{X}$ için bir sıralı sayma ve (b) her $x \in X$ için $f_x := f|_{X_x}$ olsun. Her $y \in X_x$ için

$$\begin{aligned} f_x(y) &\stackrel{(b)}{=} f(y) \stackrel{(a)}{=} \{f(z) \mid z \in X_y\} \stackrel{(*)}{=} \{f(z) \mid z \in (X_x)_y\} \\ &\stackrel{(b)}{=} \{f_x(z) \mid z \in (X_x)_y\} \end{aligned}$$

olduğundan f_x gerçekten de $\mathcal{X}_x$ için bir sıralı saymadır ve

$$f_x[X_x] = \{f_x(z) \mid z \in X_x\} \stackrel{(b)}{=} \{f(z) \mid z \in X_x\} \stackrel{(a)}{=} f(x).$$

3. Her $x \in X$ ögesine karşılık $\mathcal{X}_x$ için bir f_x sıralı sayma fonksiyonu bulunsun. (1)'den dolayı f_x ve $f_x[X_x]$ tek olarak belirlidirler. Bir $f : X \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonu her $x \in X$ için:

$$(i) \quad f(x) := f_x[X_x]$$

olarak tanımlansın. $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. X iyi sıralanmış olduğundan $x < y \vee y < x$. Genellikten bir şey kaybetmeden $y < x$ olsun. Bu durumda $X_y \subset X_x$ olur. (*) ile $X_y = (X_x)_y$ olduğundan (2)'den dolayı $f_x|X_y$ fonksiyonu $\mathcal{X}_y$ için bir sıralı saymadır. Sıralı saymaların tekliğinden dolayı ise $f_y = f_x|X_y$ olur ve yine (2)'den

$$(ii) \quad f_x(y) = f_y[X_y]$$

elde ederiz. Böylece her $x \in X$ için

$$f(x) = f_x[X_x] = \{f_x(y) \mid y < x\} \stackrel{(ii)}{=} \{f_y[X_y] \mid y < x\} \stackrel{(i)}{=} \{f(y) \mid y < x\}$$

elde ederiz ki bu bize f fonksiyonunun bir sıralı sayma olduğun söyler ($\{f_x\}_{x \in X}$ fonksiyon ailesinin uyumlu³⁰ ve $f = \bigcup_{x \in X} f_x$ olduğuna dikkat ediniz).

4. $\mathcal{X} = (X, <)$ bir iyi sıralama olsun ve $\mathcal{X}$ 'in sıralı sayılamayacağını varsayalım. (3)'ten dolayı $A := \{x \in X \mid \mathcal{X}_x \text{ sıralı sayılamaz}\} \neq \emptyset$. A kümesinin en küçük ögesi vardır ve bunu a ile gösterirsek bir yandan $\mathcal{X}_a$ sıralı sayılamazken diğer yandan her $y \in X_a$ için $X_y = (X_a)_y$ sıralı sayılabilir olacaktır. Bu ise (3)'ten dolayı $\mathcal{X}_a$ 'nın sıralı sayılabilir olduğunu söyler ve bir çelişkiye ulaşırız! ■

Bu teoremler her iyi sıralanmış $\mathcal{X} = (X, <)$ kümesinin *bir tek* $f : X \rightarrow \mathbb{U}$ sıralı sayma fonksiyonu ile *bir tek* $f[X]$ sıra sayısına sahip olduğunu öğrenmiş bulunuyoruz.

Tanım 2.8.9 *İyi sıralanmış $\mathcal{X} = (X, <)$ için tek olarak belirli sıra sayısını $srs\mathcal{X}$ ile göstereceğiz ve kısaca $\mathcal{X}$ 'in **sıra sayısı** diyeceğiz.*

$f : X \rightarrow \mathbb{U}$ sıralı sayma fonksiyonu ve $f_x = f|X_x$ ise $f(x) = f_x[X_x] = srs\mathcal{X}_x$ olduğunu gördük. Dolayısıyla *bir $srs\mathcal{X}$ sıra sayısının öğeleri de sıra sayılarıdır ve $srs\mathcal{X} = \{srs\mathcal{X}_x \mid x \in X\}$.*

Örnek 2.8.10 $\mathbb{N}$ Neumann doğal sayılar kümesi $<$ ile iyi sıralanmıştır ve her $n \in \mathbb{N}$ için $n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$ olduğundan $I : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ özdeşlik dönüşümü $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <)$ için bir sıralı sayma fonksiyondur. Bunun sonucu olarak $\mathbb{N}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ birer *sıra sayılarıdır*. Sıra sayısı olarak $\mathbb{N}$ yerine ω yazmak bir gelenektir. □

Bir sonraki teoremden $srs\mathcal{X}$ sıra sayısının başka özellikleriyle tanışacağız.

Teorem 2.8.11 *$\mathcal{X} = (X, <)$ iyi sıralanmış ve $f : X \rightarrow \mathbb{U}$ onun sıralı sayma fonksiyonu olsun.*

³⁰Her $x \in X$ için $\text{tan}f_x \cap \text{tan}g_x$ kümesinde f_x ve g_x fonksiyonları çakışır.

1. Her $x \in X$ için $f(x) \notin f(x)$ ³¹.
2. Her $x, y \in X$ için $x < y \iff f(x) \subset f(y) \iff f(x) \in f(y)$.
3. $f : (X, <) \xrightarrow{\sim} (srs\mathcal{X}, \subset)$ ve $f : (X, <) \xrightarrow{\sim} (srs\mathcal{X}, \in)$ eşyapı dönüşümleridirler.
4. $P \in \mathbb{U}$ kümesinin bir sıra sayısı olması için gerek ve yeter koşul $(P, \subset)$ (veya $(P, \in)$)'nin iyi sıralanmış ve her $p \in P$ için $p = P_p^\subset$ (veya $p = P_p^\in$), daha açıkça yazılımla

$$p = \{q \in P \mid q \subset p\} \quad (\text{veya } p = \{q \in P \mid q \in p\})$$

olmasıdır.

Kanıt. 1. $A := \{x \in X \mid f(x) \in f(x)\} \neq \emptyset$ varsayalım ve $a := \min A$ olsun.

$$f(a) = \{f(y) \mid y < a\} \text{ ve } f(a) \in f(a)$$

olduğundan bir $y < a$ ile $f(y) = f(a)$ olur. Buradan ise $y < a$ ve $f(y) \in f(y)$ elde edilir ve bu a ögesinin bu özelliği sağlayan ögelerin en küçüğü olmasıyla gelişir.

2. (i) $x < y$ olsun. $X_x \subset X_y$ olacağından $f(x) = f[X_x] \subseteq f[X_y] = f(y)$ olur. Ayrıca bir yandan $f(x) \notin f(x)$ diğer yandan $f(x) \in f(y)$ olduğundan buradan $f(x) \subset f(y)$ elde edilir.

(ii) $f(x) \subset f(y)$ olsun. $<$ bir iyi sıralama olduğundan $x < y \vee x = y \vee y < x$. Varsayımdan dolayı $x = y$ olamaz. $y < x$ olsaydı (i) ile $f(y) \subset f(x)$ olurdu ki bu da varsayımla çelişir. Zorunlu olarak $x < y$ olur. (i) ve (ii)'nin sonucunda $x < y \iff f(x) \subset f(y)$ kanıtlanmış olur. Bunun bir sonucu olarak f fonksiyonu birebirdir.

(i)* $x < y$ ise $f(x) \in f(y)$ olduğu aşıkardır.

(ii)* $f(x) \in f(y)$ olsun. $f(y) = \{f(z) \mid z < y\}$ olduğundan bir $z < y$ ile $f(x) = f(z)$ olur. Ancak f birebir olduğundan $x = z$ ve $x < y$ elde edilir.

(i)* ve (ii)* birlikte $x < y \iff f(x) \in f(y)$ önermesini verir.

3. $f : X \rightleftharpoons srs\mathcal{X}$ tameşleme olduğundan doğrudan (2)'den çıkar.

4. (a) $P \in \mathbb{U}$ bir sıra sayısı olsun. Sıralı sayma fonksiyonu $f : X \rightarrow \mathbb{U}$ olan iyi sıralanmış bir $\mathcal{X} = (X, <)$ için $P = f[X] = srs\mathcal{X}$ olacaktır. (3)'ten dolayı $f : (X, <) \xrightarrow{\sim} (P, \subset)$ ve $f : (X, <) \xrightarrow{\sim} (P, \in)$ eşyapı dönüşümleridirler. Eş yapı dönüşümlerinin başlangıçları başlangıçlara resmettiği, daha açıkçası

³¹ $\mathbb{U}$ evreninde $x \in x$ koşulunu sağlayan kümeler olabileceğinden bu sav hiç de “zaten doğru” bir şey değildir.

$f[X_x] = P_{f(x)}^C$ ve $f[X_x] = P_{f(x)}^\infty$ olduğu kolayca görülür (ödev). $p \in P$ verilsin. Bir $x \in X$ ile

$$p = f(x) = f[X_x] = P_{f(x)}^C = P_p^C \text{ ve} \\ p = f(x) = f[X_x] = P_{f(x)}^\infty = P_p^\infty$$

olacaktır.

(b) $P \in \mathbb{U}$, $(P, \subset)$ iyi sıralanmış ve her $p \in P$ için $p = P_p^C$ olsun. $I_P : P \rightarrow \mathbb{U}$ özdeşlik fonksiyonu her $p \in P$ için

$$p = P_p^C = \{q \in P \mid q \subset p\} = \{I_P(q) \mid q \subset p\}$$

olduğundan $(P, \subset)$ iyi sıralamasının sıralı sayma fonksiyonudur. Bu nedenle $P = I_P[P]$ bir sıra sayısıdır. Benzeri $P \in \mathbb{U}$, $(P, \in)$ iyi sıralanmış ve her $p \in P$ için $p = P_p^\infty$ olduğunda kanıtlanır. ■

Teorem 2.8.12 *Bir P kümesinin bir sıra sayısı olması için gerek ve yeter koşul $(P, \in)$ 'nin iyi sıralı ve P kümesinin geçişli olmasıdır. Bunun bir sonucu olarak her α sıra sayısı için $\alpha' := \alpha \cup \{\alpha\}$ da bir sıra sayısıdır.*

Kanıt. 1. P bir sıra sayısı ise $(P, \in)$ iyi sıralıdır ve her $p \in P$ için $p = P_p^\infty$ 'dur ((2.8.11)(4)). Şimdi $q \in p$ ise $q \in p = \{x \in P \mid x \in p\}$ olduğundan $q \in P$ olur. Dolayısıyla P geçişlidir.

2. Şimdi $(P, \in)$ iyi sıralı ve P geçişli olsun. Her $p \in P$ için

$$p = \{x \mid x \in p\} = \{x \in P \mid x \in p\} = P_p^\infty$$

olduğundan sav, (2.8.11)(4)'ten çıkar. Burada ikinci eşitlikte P 'nin geçişliliği kullanılmıştır.

α bir sıra sayısı ise $(\alpha', \in)$ 'nin iyi sıralı ve α' 'nin geçişli olduğu $(n+1)$ 'in geçişliliği gibi) kolayca görülür. ■

Not 2.8.13 Sıra sayılarının bu belirlemesi genel olarak sıra sayılarının tanımı olarak alınmaktadır. Ancak böyle bir tanım elbette tümüyle boşlukta kalır. Şimdi biz bu tanımın esas mantığını öğrenmiş bulunuyoruz. Aksiyomatik Kümeler Kuramında biz de öyle yapmakta artık bir sakınca görmeyeceğiz.

Her α sıra sayısı için α' de bir sıra sayısı ve $\alpha < \alpha'$ olduğundan *sıra sayılarının en büyüğü yoktur!* □

Tanım 2.8.14 $\alpha' = \alpha \cup \{\alpha\}$ sıra sayısına α sıra sayısının **dolaysız ardılı**, α sıra sayısına ise α' sıra sayısının **dolaysız öncülü** denir. α' yerine çoğu zaman $\alpha + 1$ de yazılır. İki yazılımı da kullanacağız. Bir β sıra sayısının dolaysız öncülü varsa bunu $\beta - 1$ ile göstereceğiz.

Not 2.8.15 α' sıra sayısı α sıra sayısından kesin büyük olan sıra sayılarının en küçüğüdür, dd. $\alpha' = \min\{\beta \in Srs \mid \alpha < \beta\}$. Eğer $\beta \in Srs$ için $\alpha < \beta$ ise $\alpha \in \beta$ ve $\alpha \subset \beta$ olduğundan $\alpha' = \alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$ olur ki bu $\alpha' \leq \beta$ demektir. Bu, savımızı kanıtlar. $\square$

$\alpha \in \alpha'$ olduğundan $\alpha < \alpha'$, buna karşın eğer α sonsuz ise $\aleph\alpha = \aleph\alpha'$. Farklı sıra sayılarının çokluk sayıları eşit olabilir.

Uzlaşma: Srs ile $\mathbb{U}$ evrenindeki sıra sayılarının sınıfını gösterelim. Bundan sonra Srs sınıfının öğelerini geleneğe uyarak $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ gibi Yunan harfleriyle göstereceğiz. $\varphi(\alpha)$ sıra sayılarına ilişkin bir önerme ise aşağıdaki kısaltmaları kullanacağız:

$$\begin{aligned}\exists\alpha \varphi(\alpha) &: \Longleftrightarrow \exists\alpha \in Srs \varphi(\alpha). \\ \forall\alpha \varphi(\alpha) &: \Longleftrightarrow \forall\alpha \in Srs \varphi(\alpha). \\ \{\alpha \mid \varphi(\alpha)\} &: \Longleftrightarrow \{\alpha \in Srs \mid \varphi(\alpha)\}.\end{aligned}$$

Örneğin her A kümesi için $A = \{x \mid x \in A\}$ ve sıra sayılarının öğelerinin de sıra sayısı olduğunu düşünürsek

$$\forall\alpha \alpha = \{x \mid x \in \alpha\} = \{\beta \mid \beta \in \alpha\} (= \{\beta \in Srs \mid \beta \in \alpha\}).$$

Teorem 2.8.16 1. Srs geçişlidir ve

$$\forall\alpha \alpha = \{\beta \mid \beta \subset \alpha\} (= \{\beta \in Srs \mid \beta \subset \alpha\}).$$

2. $\forall\alpha, \beta (\alpha \subset \beta \Longleftrightarrow \alpha \in \beta)$. Dolayısıyla $\forall\alpha (\alpha \notin \alpha)$

3. $\subset$, dolayısıyla $\in$ bağıntıları Srs sınıfında bir doğrusal sıralamadır.

4. Srs sınıfı $\subset$ ve $\in$ bağıntılarıyla iyi sıralanmıştır.

Kanıt. 1. Sıra sayılarının öğeleri de sıra sayıları olduğundan Srs geçişlidir. α bir sıra sayısı olsun. $\alpha = \{\beta \mid \beta \in \alpha\}$ olduğundan $\beta \in Srs$ ve $\beta \subset \alpha$ ise $\beta \in \alpha$ olduğunu kanıtlamak yeterlidir. Biz bir önceki teoremden $(\alpha, \subset)$ ve $(\beta, \subset)$ 'nin iyi sıralamalar ve $\eta \in \alpha, \xi \in \beta$ ise $\eta = \alpha_\eta^\subset, \xi = \beta_\xi^\subset$ olduğunu biliyoruz. Önce β 'nin α 'da bir başlangıç olduğunu göstereceğiz. $\eta \in \alpha, \xi \in \beta$ ve $\eta \subset \xi$ olsun. $\eta \in \beta$ olduğunu göstermeliyiz. $\xi \in \beta \subset \alpha$ olduğundan $\xi \in \alpha$ olur. Böylece $\xi = \beta_\xi^\subset$ ve $\xi = \alpha_\xi^\subset$ olur. Bu ise $\beta_\xi^\subset = \alpha_\xi^\subset$ demektir. Diğer yandan $\eta, \xi \in \alpha$ ve $\eta \subset \xi$, teorem(2.8.11)(2) ile $\eta \in \xi$ bağıntısını verir. Dolayısıyla β, α 'da bir öz başlangıçtır. $\alpha \setminus \beta \neq \emptyset$ kümesinin en küçük öğesine γ dersek $\gamma = \alpha_\gamma^\subset = \beta$ ve böylece $\beta \in \alpha$ olur.

2. $\alpha, \beta \in Srs$ olsunlar. (i) $\beta \in \alpha$ ise (2.8.11)(2)'den $\beta \subset \alpha$. (ii) $\beta \subset \alpha$ ise az önce $\beta \in \alpha$ kanıtlandı.

3. $\alpha, \beta \in Srs$ iki *farklı* sıra sayısı olsunlar. $\gamma := \alpha \cap \beta$ kümesi, $\subset$ ile iyi sıralanmış α kümesinin altkümesi olarak $\subset$ ile iyi sıralanmıştır. $\xi \in \gamma$ keyfi verilsin. (2.8.11)(4)'ten $\alpha_\xi^C = \xi = \beta_\xi^C$ olduğundan $\gamma_\xi^C = \alpha_\xi^C \cap \beta_\xi^C = \xi$ olur. (2.8.11)(4)'ten γ bir sıra sayısıdır.

Önce $\gamma \subset \alpha$ ve $\gamma \subset \beta$ olamayacağını görelim. Böyle olsaydı (2) ile $\gamma \in \alpha$ ve $\gamma \in \beta$, dolayısıyla $\gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma$ olurdu ki bize $\gamma \in \gamma$ çelişkisini verir. Diğer yandan $\gamma \subseteq \alpha$ ve $\gamma \subseteq \beta$ olduğunu biliyoruz. Şimdi $\gamma = \alpha$ varsayalım. $\alpha \neq \beta$ seçtiğimizden $\alpha = \gamma \subset \beta$ olur. Benzer biçimde $\gamma = \beta$ ise $\beta \subset \alpha$ elde edilir.

4. $\subset$ bağıntısı zaten yansımasız ve geçişlidir. (3)'ten dolayı ise $(Srs, \subset)$ doğrusal sıralanmıştır. Şimdi bunun bir iyi sıralama olduğunu görelim. Her şeyden önce her α sıra sayısının $\subset$ bağıntısına göre Srs sınıfındaki uzantısı yine α olduğundan bir kümedir. $\emptyset \neq B \subset Srs$ altkümesi verilsin. B kümesinin bir en küçük ögesi olduğunu kanıtlamalıyız. Bir $\beta \in B$ seçelim. Şans eseri bu B 'nin en küçük ögesi ise işimiz biter, değilse

$$C := \{\alpha \in B \mid \alpha \subset \beta\} \stackrel{2.}{=} \{\alpha \in B \mid \alpha \in \beta\} \neq \emptyset.$$

$(\beta, \subset)$ iyi sıralanmış olduğundan $C \subseteq \beta$ kümesinin en küçük ögesi vardır. $\gamma := \min C$ olsun. Açıkça $\gamma \in \beta$, dolayısıyla $\gamma \subset \beta$. Herhangi bir $\alpha \in B$ için ya $\beta \subseteq \alpha$, dolayısıyla $\gamma \subset \alpha$, ya da $\alpha \subset \beta$, dolayısıyla γ 'nın tanımından $\gamma \subset \alpha$ olur. Böylece $\gamma = \min B$ ve $(Srs, \subset)$ iyi sıralanmıştır. $\alpha \subset \beta \iff \alpha \in \beta$ olduğundan elbette $(Srs, \in)$ de iyi sıralanmıştır. ■

Not 2.8.17 3 ve 5 Neumann doğal sayıları sıra sayılarıdır ve geçişlidirler, ancak örneğin $A = \{3, 5\}$ kümesi geçişli değil, dolayısıyla bir sıra sayısı değildir ($2 \in 3 \in A$ fakat $2 \notin A$!). Diğer yandan bir sıra sayısının tüm ögeleri de bir sıra sayısıdır ve sıra sayıları geçişli kümelerdir. Şimdi bu gerekli koşulların yeterli olduğunu kanıtlayacağız. □

Önerme 2.8.18 *Bir A kümesinin bir sıra sayısı olması için gerek ve yeter koşul A kümesinin geçişli ve $A \subset Srs$ olmasıdır.*

Kanıt. Savın bir yarısını biliyoruz (2.8.12). Geriye $A \subset Srs$ altkümesi geçişli ise bir sıra sayısı olduğunu göstermek kalıyor. Her şeyden önce (2.8.16) (4)'ten dolayı $(A, \in)$ iyi sıralanmıştır. Diğer yandan A geçişli olduğundan her $\alpha \in A$ için

$$\alpha = \{\beta \mid \beta \in \alpha\} \stackrel{A \text{ geç.}}{=} \{\beta \in A \mid \beta \in \alpha\} = A_\alpha^\infty.$$

(2.8.11)(4)'ten $A \in Srs$ olur. ■

Teorem 2.8.19 $\mathcal{A} = (A, <_A)$ ve $\mathcal{B} = (B, <_B)$ iyi sıralanmış kümeler ve $\alpha = srs\mathcal{A}$, $\beta = srs\mathcal{B}$ olsunlar.

1. $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \iff \alpha = \beta$.
2. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 'nin bir öz başlangıcıyla eşyapılıdır $\iff \alpha < \beta$.
3. $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ 'nın bir öz başlangıcıyla eşyapılıdır $\iff \beta < \alpha$.

Not 2.8.20 Herhangi iki α, β sıra sayısı için $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$ ve $\alpha > \beta$ 'den biri ve ancak biri doğru olduğundan herhangi iki $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ iyi sıralanmış kümesi için bu üç durumdan biri ve ancak biri doğrudur. Bu teoremin bir diğer sonucu ise *hiçbir iyi sıralanmış kümenin herhangi bir öz başlangıcıyla eşyapılı olamayacağıdır*. Gerçekten de $\mathcal{A}$ iyi sıralanmış ve $\mathcal{B}$ ise onun bir öz başlangıcı ise $srs\mathcal{B}$ sıra sayısı $\alpha := srs\mathcal{A}$ sıra sayısının bir öz başlangıcı olur. $\beta := \min(srs\mathcal{A} \setminus srs\mathcal{B})$ olmak üzere $\beta = srs\mathcal{B}$ olduğu kolayca görülür. $\beta \in \alpha$, dolayısıyla $\beta < \alpha$ olduğundan (1)'den dolayı $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ olamaz! $\square$

Kanıt. 1.a. $\alpha = \beta$ olsun. $\mathcal{A} \cong (\alpha, \in) = (\beta, \in) \cong \mathcal{B}$ olduğundan $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ olur.

1.b. $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ olsun. $\varphi : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ bir eşyapı dönüşümü ve $g : \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathbb{U}$ ise $\mathcal{B}$ 'nin sıralı sayan fonksiyonu olsun. Biz $f := g \circ \varphi$ fonksiyonunun $\mathcal{A}$ 'nın sıralı sayan fonksiyonu olduğunu savunuyoruz. Gerçekten de her $x \in A$ için $\varphi[A_x] = B_{\varphi(x)}$ olacağından

$$f[A_x] = g[\varphi[A_x]] = g[B_{\varphi(x)}] = g(\varphi(x)) = f(x)$$

olur ki bu bize f 'nin $\mathcal{A}$ 'nın sıralı sayan fonksiyonu olduğunu söyler. Böylece

$$\alpha = srs\mathcal{A} = f[A] = g[\varphi[A]] = g[B] = \beta$$

olur.

2.a. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ 'nin bir öz başlangıcıyla eşyapılı olsun. g , $\mathcal{B}$ 'nin sıralı sayan fonksiyonu olsun ve $y \in B$ ile $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}_y$ olsun. (1)'den dolayı

$$\alpha = srs\mathcal{A} = srs\mathcal{B}_y = g(y) \in srs\mathcal{B} = \beta.$$

Buradan $\alpha \in \beta$ dolayısıyla $\alpha < \beta$ olur.

2.b. $\alpha < \beta$ olsun. (2.8.16)(2)'den $\alpha \subset \beta$, $\alpha \in \beta$ ve (2.8.16)(4)'ten ise $\alpha = \beta_\alpha$ 'dir. Böylece α sıra sayısı β sıra sayısının bir öz başlangıcıdır. Diğer yandan $\mathcal{A} \cong \alpha = \beta_\alpha$ ve $\mathcal{B} \cong \beta$ olduğundan $\alpha = \beta_\alpha$ sıra sayısı $\mathcal{B}$ 'nin bir öz başlangıcıyla eşyapılıdır.

3. α ve β sıra sayılarının rollerini değiştiriniz. ■

Not 2.8.21 Bize herhangi iki A, B kümesi verildiğinde $\aleph A \leq \aleph B$ veya $\aleph B \leq \aleph A$, dd. $A \preceq B \vee B \preceq A$ olup olmadığını henüz bilmiyoruz. İlerde

Seçme Aksiyomu yardımıyla her kümenin iyi sıralanabileceğini kanıtlayacağız. O zaman işimiz çok kolay. $<_A$ ve $<_B$ ile A ve B kümeleri iyi sıralanırsa teoremimiz $A \preceq B$ ve $B \preceq A$ 'dan birinin ve ancak birinin doğru olduğunu söyler. $\square$

Önerme 2.8.22 $\mathcal{A} = (A, <_A)$ ve $\mathcal{B} = (B, <_B)$ iyi sıralanmış kümeler ve $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ ise $\mathcal{A}$ 'dan $\mathcal{B}$ 'ye bir tek φ eşyapı dönüşümü vardır.

Kanıt. $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ ve $\varphi : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ bir eşyapı dönüşümü dönüşümü olsun. (2.8.19)(1)'in kanıtından, f ve g sırasıyla $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ 'nin sıralı sayma fonksiyonları iseler $srs\mathcal{A} = srs\mathcal{B}$ olduğundan zorunlu olarak $\varphi = g^{-1} \circ f$ olur. f ve g tek olarak belirli olduklarından φ de tek olarak belirlidir. ■

$\mathcal{A} = (A, <)$ iyi sıralanmış ve $\alpha = srs\mathcal{A}$ ise $(\alpha, \in)$ iyi sıralıdır ve α geçişlidir. $\mathcal{A}$ 'nın f sıralı sayma fonksiyonu $\mathcal{A}$ 'dan $(\alpha, \in)$ 'a yegâne eşyapı dönüşümüdür. $\beta \neq \alpha$ bir başka sıra sayısı ise (2.8.19)(1)'den dolayı $\mathcal{A}$, $(\beta, \in)$ ile eşyapılı olamaz. Teorem (2.8.12) da gözönüne alınırsa aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 2.8.23 (Neumann Çökmesi) Her iyi sıralanmış $\mathcal{A} = (A, <)$ kümesine karşılık tek olarak belirli $\in$ ile iyi sıralanmış geçişli bir α kümesi $\mathcal{A} \cong (\alpha, \in)$ olacak biçimde vardır.

Biz artık α kümesinin $\mathcal{A}$ 'nın sıra sayısı olduğunu ve $\mathcal{A}$ 'dan $(\alpha, \in)$ 'ya bir tek $f : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} (\alpha, \in)$ eşyapı dönüşümü olduğunu ve bu f eşyapı dönüşümünün tam da $\mathcal{A}$ 'nın sıralı sayma fonksiyonu olduğunu biliyoruz. Literatürde bu teorem Mostovski Çökmesi olarak bilinir, ancak ondan yıllarca önce Neumann tarafından kanıtlanmıştır.

Problem 2.8.1 $(X, <)$ doğrusal sıralanmışsa her $y, x \in X$ için $y \in X_x$ ise $X_y = (X_x)_y$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.8.2 $\mathcal{A} = (A, R)$ ve $\mathcal{B} = (B, S)$ doğrusal sıralanmış kümeleri arasında bir $\psi : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$ eşyapı dönüşümü verildiğinde her $x \in A$ için $\psi[A_x^R] = B_{\psi(x)}^S$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.8.3 X iyi sıralanmışsa her $B \subset X$ öz başlangıcın bir $x \in X$ ögesinin uzantısı olduğunu kanıtlayınız. Ancak bu savın doğrusal sıralanmış kümeler için doğru olmayabileceğini örnekleyiniz.

Problem 2.8.4 İyi sıralanmış iki küme arasında en fazla bir tek eşyapı dönüşümü olabileceğini öğrendik. Buna karşın $(\mathbb{Z}, <)$ 'den kendisine sonsuz farklı eş yapı dönüşümü olduğunu gösteriniz.

Problem 2.8.5 İyi sıralanmış bir kümenin herhangi bir ögesinin uzantısıyla eşyapılı olamayacağını öğrendik. Ama bir ögesinin sonuyla eşyapılı olabileceğini örnekleyiniz.

Problem 2.8.6 İyi sıralanmış bir kümenin iki farklı uzantısının eşyapılı olamayacağını gösteriniz.

Problem 2.8.7 Doğrusal sıralanmış bir $(X, <)$ kümesi için aşağıdaki önermelerin denk olduğunu kanıtlayınız.

(a) $(X, <)$ iyi sıralanmıştır.

(b) i) $\exists \min X$, ii) $A \subset X$ altkümесinden büyük olan öğeler varsa, A 'nın öğelerinden hemen sonra gelen bir a' öğesi vardır; dd. herhangi bir x öğesi A kümesinden sonra geliyorsa $x < a'$ olamaz!

Not: (b) önermesi aslında Cantor'un iyi sıralama tanımıdır ve onun sıralı sayma işlemi ile ilişkisini daha iyi vurgular. Saymaya en küçük öğeyle başlarız ve bir yere kadar saydığımızda hala sayılacak öğeler varsa gerekli tek şey saydıklarımızdan hemen sonra geleni bilebilmektir. Buna izin veren sıralamalar iyi sıralamalardır.

Problem 2.8.8 Doğrusal sıralanmış bir $(X, <)$ sınıfının iyi sıralanmış olması için gerek ve yeter koşul X 'te kesin azalan bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin olmamasıdır, dd. $\dots < x_2 < x_1 < x_0$ gibi bir dizinin olmamasıdır. Kanıtlayınız.

$(X, <)$ kısmi sıralanmış bir küme ve $\leq$ ona ilişkin yansılmalı kısmi sıralama olsun. X 'deki herhangi bir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine bir m her $n \geq m$ için $x_n = x_m$ olacak biçimde bulunabiliyorsa **durağan** diyelim. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq x_{n+1}$ ise **artan**, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n < x_{n+1}$ ise **kesin artan** diyelim. **Azalan** ve **kesin azalan** diziler benzer biçimde tanımlanırlar. X kümesinin boştan farklı her altkümесinin bir büyük öğesi varsa $(X, <)$ veya $(X, \leq)$ **Noethersel sıralanmıştır** denir. X kümesinin boştan farklı her altkümесinin bir küçük öğesi varsa $(X, <)$ veya $(X, \leq)$ **Artinsel sıralanmıştır** denir. Burada birbirinin ikilisi olan kavramlarla tanıştık. Bunlardan biri hakkındaki her önermenin bir ikilisi vardır ve bunların kanıtları da birbirlerinin ikilisidirler. $(X, <)$ Artinsel sıralanmış kümesinin iyi sıralanmış olması için gerek ve yeter koşul doğrusal sıralanmış olmasıdır.

Problem 2.8.9 $(X, <)$ kısmi sıralanmış kümesinde aşağıdaki önermeler denktirler:

1. $(X, <)$ 'de her artan dizi durağandır.
2. X 'de kesin artan dizi olamaz.

Problem 2.8.10 $(X, <)$ kısmi sıralanmış kümesinde aşağıdaki önermeler denktirler:

1. $(X, <)$ 'de her azalan dizi durağandır.
2. X 'de kesin azalan dizi olamaz.

Problem 2.8.11 $\mathcal{X} = (X, <)$ için aşağıdaki önermeler denktir:

1. $\mathcal{X}$ Noethersel sıralanmıştır.
2. $\mathcal{X}$ 'teki her artan dizi durağandır.

(2) $\Rightarrow$ (1) yönü için ipucu: Çelişki yöntemi: $\emptyset \neq A \subseteq X$ kümesinin büyük ögesi olmadığı varsayılır. Her $x \in A$ için bu ögenin A kümesindeki $A^x = \{a \in A \mid x < a\}$ sonrası boş değildir. Herhangi bir $a_0 \in A$ ile başlayıp tekrarlı tanımlamayla A kümesinde $a_{n+1} \in A^{a_n}$ olacak biçimde kesin artan bir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi kolayca bulunur.

Problem 2.8.12 $\mathcal{X} = (X, <)$ için aşağıdaki önermeler denktir:

1. $\mathcal{X}$ Artinsel sıralanmıştır.
2. $\mathcal{X}$ 'teki her azalan dizi durağandır.

Problem 2.8.13 Noether Tümevarımı: $(X, <)$ Noethersel sıralanmış olsun ve her $x \in X$ için $\psi(x)$ önermesi verilsin. Her x için $(\forall y > x \psi(y)) \Rightarrow \psi(x)$ ise, $\forall x \psi(x)$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.8.14 Artin Tümevarımı: $(X, <)$ Artinsel sıralanmış olsun ve her $x \in X$ için $\psi(x)$ önermesi verilsin. Her x için $(\forall y < x \psi(y)) \Rightarrow \psi(x)$ ise $\forall x \psi(x)$ olduğunu kanıtlayınız. İyi sıralanmış kümelerdeki sonluötesi tümevarım bunun bir sonucudur.

Problem 2.8.15 İyi sıralı bir kümenin bir uzantısının bir altkümesiyle de eşyapılı olamayacağını gösteriniz (İpucu: Eşyapılı varsayıp içiçe kesin daralan bir uzantılar dizisi bulunuz. Bu kesin azalan bir dizinin varlığı demektir ve olamaz!).

2.9 SIRALANMIŞ KÜMELERDE İŞLEMLER

Bu bölümde sıralanmış kümelerin toplamlarını ve çarpımlarını tanımlayacağız. Bu tanımlar elbette sıralanmış sınıflar için de verilebilir. Ancak iki iyi sıralanmış

kümenin toplam ve çarpımları her zaman iyi sıralanmışken bu iyi sıralanmış sınıflar için genelde doğru değildir. Ne olduklarını ayrıca belirtmediğimiz sürece nesnelerimizin kümeler olduğunu yeniden anımsatalım.

Sıra sayılarının toplam ve çarpımları sonluötesi tekrarlı tanımdan yola çıkılarak tanımlanabilir. Ancak hem gerçek gelişimi yansıtmak hem de daha fazla sezgisel destek sağlamak açısından bu işlemleri burada böyle tanımlamayacağız. Her şeyden önce $\mathcal{A} = (A, <_A)$ herhangi bir sıralanmış küme ve i herhangi bir öge olsun. $A' := A \times \{i\}$ kümesinde $<_{A'}$ sıralaması her $x, y \in A$ için

$$(x, i) <_{A'} (y, i) : \Longleftrightarrow x <_A y$$

olarak açıklansın. $\mathcal{A}' = (A', <_{A'})$ sıralanmış kümesi $\mathcal{A}$ ile eşyapılıdır: $\mathcal{A}' \cong \mathcal{A}$. Bu nedenle eşyapılara göre değişmez olan kavramlar açıklandığında $\mathcal{A}$ yerine herhangi bir $\mathcal{A}'$ kullanılabilir. Benzer bir tanımlamayı $A'' := \{i\} \times A$ kümesinden yola çıkarak $\mathcal{A}'' \cong \mathcal{A}$ koşulunu sağlayan bir $\mathcal{A}'' = (A'', <_{A''})$ sıralanmış kümesi elde edebilirsiniz.

Tanım 2.9.1 $\mathcal{A} = (A, <)$ doğrusal sıralanmış bir sınıf ve $x, y \in A$ olmak üzere $x < y$ ise ancak $x < z < y$ koşulunu sağlayan bir $z \in A$ ögesi yoksa x ögesi y ögesinin **dolaysız öncülü** ve y ögesi ise x ögesinin **dolaysız ardıdır** denir ve $y = x'$ yazılır. $a \in A$ ögesi A sınıfının en küçük ögesi değilse ve dolaysız öncülü yoksa, a bir **limit ögedir** denir. Srs sınıfındaki limit ögelerin sınıfını $\text{Lim} := \{\alpha \mid \alpha \text{ bir limit öge}\}$ ve $\mathcal{A}$ 'nın limit ögelerinin sınıfını ise $\text{Lim}_{\mathcal{A}}$ ile göstereceğiz.

Not 2.9.2 Daha önce α sıra sayısı için $\alpha' = \alpha \cup \{\alpha\}$ olarak açıkladığımız dolaysız ardıl kavramı bu tanımla örtüşür. $\mathcal{A} = (A, <)$ bir doğrusal sıralama olduğundan bir ögenin dolaysız öncülü ve dolaysız ardıları varlarsa tek olarak belirlidirler. $\mathcal{A} = (A, <)$ iyi sıralanmış ve $x \in A$ ögesi A kümesinin en büyük ögesi değilse x' dolaysız ardılı vardır ve $x' = \min A^x = \min\{y \in A \mid x < y\}$. Bazı yazarlar, eğer varsa, dolaysız öncülü olmayacağı için en küçük ögeyi de limit öge olarak tanımlarlar. Biz öyle yapmayacağız. Doğrusal sıralanmış bir kümenin ögelerini bir doğru üzerinde sıraladığımızda herhangi bir ögenin bir limit öge olduğunu vurgulamak istersek onun önüne bir “,” yerine bir “;” yazacağız. Örneğin a, b, c doğal sayılardan farklı üç öge olmak üzere $A := \mathbb{N} \cup \{a, b, c\}$ olsun ve ögeleri $0, 1, 2, \dots; a, b, c$ olarak sıralansın. Böyle bir yazılımdan hemen anlayacağımız

$$0 < 1 < 2 < \dots; a < b < c$$

ve a ögesinin dolaysız öncülü olmadığı, dd. bir limit öge olduğudur. $n > 0$ doğal sayısı verilsin. $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ ardıl sıra sayısı için $\bigcup n = n-1 =$

$\max n$ ve ω limit sıra sayısı içinse $\bigcup \omega = \omega = \sup \omega$ olduğu apaçıktır. Bunlar tüm sıra sayılar için doğrudur. Her α sıra sayısı için:

$$\begin{aligned} \alpha \text{ bir ardıldır} &\iff \exists \max \alpha \wedge \max \alpha = \bigcup \alpha \\ \alpha \text{ bir limit ögedir} &\iff \neg \exists \max \alpha \\ &\iff \exists \sup \alpha \wedge \alpha = \sup \alpha = \sup^+ \alpha \iff \alpha = \bigcup \alpha \end{aligned}$$

olduğunu görmek gerçekten çok kolaydır.

Eşyapı dönüşümleri en büyük, en küçük ve limit öge kavramlarına sadıktırlar, dd. bu tip ögeleri bu tip ögelere resmederler. Bu nedenle *bu tip ögelerde farklılıkları olan iki sıralanmış kümenin eşyapılı olması söz konusu olamaz!* Bu basit ipucu iyi iş görür. $\square$

2.9.1 Sıralanmış Kümelerin Çarpımları

Sözlüklerde kelimelerin nasıl sıralandıklarını biliyoruz. Elimizde $a, b, c, d, \dots$ gibi sıralanmış bir abecemiz var. İki sözcük verildiğinde önce birinci harflere bakarız; birinci harfi önce gelen sözcük önce yazılır. Birinci harfler aynı ise ikinci harflere bakarız ve ikinci harfi önce olan varsa o önce yazılır. İkinci harfler de eşitse üçüncü harfe bakılır vb. ... $\mathcal{A} = (A, <_A)$ ve $\mathcal{B} = (B, <_B)$ iki sıralanmış küme olsun. $C := A \times B$ kümesini **ters sözlüksel** diye adlandırılan bir $<_C$ sıralamasıyla sıralayacağız. $<_C$ sıralaması her $(a, b), (a', b') \in C$ için

$$(a, b) <_C (a', b') :\iff \begin{cases} b < b' \\ b = b' \text{ ve } a < a' \end{cases}$$

olarak açıklansın. $\mathcal{C} := (C, <_C)$ olmak üzere $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \mathcal{C}$ olarak tanımlanır.

$$\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2 \text{ ve } \mathcal{B}_1 \cong \mathcal{B}_2 \text{ ise } \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_1 \cong \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{B}_2$$

olduğu kolayca görülür. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ doğrusal sıralanmışlarsa, özellikle iyi sıralanmışlarsa $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ çarpımını bir doğru üzerinde görselleştirebiliriz. A ve B kümelerinin ögeleri soldan sağa küçükten büyüğe $\mathcal{A} : a_0, a_1, a_2, \dots$ ve $\mathcal{B} : b_0, b_1, b_2, \dots$ olarak sıralanmış iseler $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ çarpımı:

$$(a_0, b_0), (a_1, b_0), (a_2, b_0), \dots, (a_0, b_1), (a_1, b_1), (a_2, b_1), \dots, (a_0, b_2), (a_1, b_2), \dots$$

veya

$$\begin{array}{ccccccc} & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_0, b_2) & (a_1, b_2) & (a_2, b_2) & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ (a_0, b_1) & (a_1, b_1) & (a_2, b_1) & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ (a_0, b_0) & (a_1, b_0) & (a_2, b_0) & \cdot & \cdot & \cdot & & & \end{array}$$

olarak görselleştirebilir. Tek satırlık gösterimde herhangi bir öge kendinin solundaki her öğeden kesin büyük, sağındaki her öğedense kesin küçüktür. Tablo gösteriminde ise herhangi bir öge bulunduğu satırın altındaki satırlardaki öğelerden kesin büyük, üst satırlardaki öğelerden ise kesin küçüktür; aynı satırdaki farklı iki öğeden ise soldaki öbüründen kesin küçüktür.

Aslında Cantor'un kullandığı resim doğru yorumlanmak koşuluyla çok daha yalındır. Her şeyden önce Cantor'un sadece doğrusal sıralamaları incelediğini belirtelim. B doğrusal sıralanmış kümesinin öğelerini bir doğru üzerine soldan sağa büyüyecek biçimde yerleştiriniz. Sonra B kümesinin her bir ögesinin yerine, yine soldan sağa büyüyerek sıralanmış A doğrusal sıralanmış kümesinin öğelerini yazınız. A kümesinin *farklı yerlerdeki öğelerine farklı* gözüyle bakmak koşuluyla elde ettiğimiz resim $A \times B$ 'deki $<_C$ sıralamasıdır. Cantor anlamında sıralama tiplerine geçtiğimizde olay daha da netleşir. Örneğin $A = \mathbb{N}$ ve $B = 2 = \{0, 1\}$ doğal sıralamalarıyla verilsinler.

$$\mathcal{A} : 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{ve} \quad 2 : 0, 1$$

ve bunların sıralama tipleri sırasıyla

$$\overline{\mathcal{A}} : 1, 1, 1, 1, \dots \quad \text{ve} \quad \overline{2} : 1, 1$$

dir³². Böylece

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : 0, 1, 2, 3, \dots; 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\mathcal{B} \otimes \mathcal{A} : 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

olur. Sıralama tiplerine geçtiğimizde ise

$$\overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}} : 1, 1, 1, 1, \dots; 1, 1, 1, 1, \dots$$

$$\overline{\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}} : 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots$$

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ bir limit öğeye sahipken $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ 'nın bir limit öğesi yoktur; dolayısıyla bu ikisi eşyapılı olamaz ve sıralama tipleri birbirinden farklıdır: $\overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}} \neq \overline{\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}}$. Diğer yandan $\overline{\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}} = \overline{\mathcal{A}}$ olduğu apaçıktır (Burada aslında $\omega + \omega = \omega 2 \neq 2\omega = \omega$ olduğunu göstermiş olduk, bkz. Örnekler 2.9.5 (8) ve (9)).

$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ iyi sıralanmışlarsa $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ de iyi sıralanmıştır. $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 'nin doğrusal sıralanmış olduğu kolayca görülür. Biz şimdi boştan farklı her $P \subseteq A \times B$ altkümesinin $<_C$ sıralamasına göre bir en küçük ögesinin olduğunu göstereceğiz. P kümesinin B üzerine ikinci izdüşümü olan P'' kümesi, B iyi sıralanmış kümesinin boştan farklı bir altkümesi olduğundan $<_B$ ye göre

³²Buradaki 1'leri *ayırtd edilebilir* olarak düşüneceğimizi asla unutmayalım.

bir en küçük p'' ögesine sahiptir. $P' := \{a \in A \mid (a, p'') \in P\}$ kümesi boştan farklıdır ve A iyi sıralanmış kümesinde $<_A$ ya göre bir p' en küçük ögesine sahiptir. $p = (p', p'') \in P$ ve bu öge P kümesinin $<_C$ sıralamasına göre en küçük ögesidir. Dolayısıyla $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ iyi sıralanmıştır.

$$\alpha \cdot \beta := srs(\alpha \otimes \beta) \quad (2.9)$$

sıra sayısına α ve β sıra sayılarının **(sıralı) çarpımı** denir.

$$\alpha = srs(\mathcal{A}) \wedge \beta = srs(\mathcal{B}) \implies \alpha \cdot \beta = srs(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$$

olduğu aşıkardır. $\alpha \cdot \beta$ yerine çoğu zaman kısaca $\alpha\beta$ yazacağız.

Bu tanımdan $\beta = 0$ ise $B = \emptyset$, dolayısıyla $A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A$ olur. Bu bize her α sıra sayısı için $\alpha 0 = 0\alpha = 0$ bağıntısını verir. $(1, \in)$ yerine kısaca 1 yazarsak $\mathcal{A} \otimes 1 \cong 1 \otimes \mathcal{A} \cong \mathcal{A}$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla her α sıra sayısı için $\alpha 1 = 1\alpha = \alpha$.

A ve B her ikisi de n ögeli *sonlu* kümeler ve R ve S bunlar üzerinde herhangi iki iyi sıralama ise tümevarımla $(A, R) \cong (B, S)$ olduğu kolayca görülür. $\alpha\beta$ 'nin tanımından

$$\natural(\alpha\beta) = \natural(\alpha \times \beta) = \natural\alpha * \natural\beta$$

olur. Her k doğal sayısı için $\natural k = k$ olduğundan her $m, n \in \mathbb{N}$ için $m * n = \natural m * \natural n = \natural(mn) = mn$ elde edilir. Dolayısıyla doğal sayılar için üç çarpım örtüşür:

$$\text{Her } m, n \in \mathbb{N} \text{ için } m \cdot^{\mathcal{N}} n = m * n = mn.$$

Daha açık bir söylemle Neumann doğal sayıları için onların sıra sayısı çarpımları, çokluk sayısı olarak çarpımları ve Peano çarpımları örtüşürler. Bu nedenle doğal sayılar söz konusu olduğunda herhangi bir işlemi kullanmakta sakınca yoktur.

2.9.2 Sıra Sayıların Toplamları

Şimdi $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ toplamını tanımlayalım. Bunu iki aşamada yapacağız. Önce $A \cap B = \emptyset$ varsayalım. $D = A \sqcup B$ olsun ve $<_D$ sıralaması A kümesinde $<_A$, B kümesinde ise $<_B$ olsun ve her $a \in A$ ve her $b \in B$ içinse $a <_D b$ olarak açıklansın. Daha açık yazılımla $x, y \in D$ olmak üzere

$$x <_D y := \begin{cases} x <_A y, & x, y \in A \\ x <_B y, & x, y \in B \\ x \in A \text{ ve } y \in B \end{cases}$$

Bu durumda $\mathcal{D} := (D, <_D)$ olmak üzere $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} := \mathcal{D}$ olarak tanımlanır. A kümesi $\mathcal{D}$ 'de bir **başlangıçtır**, dd. $x \in A \implies D_x \subseteq A$. Eğer $B \neq \emptyset$ ve

B doğrusal sıralanmış kümesinin bir b en küçük ögesi varsa $\mathcal{A} = \mathcal{D}_b$ 'dir. Şimdi $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. $A' := A \times \{0\}$ ve $B' := B \times \{1\}$ olarak $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}'$ ve $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}'$ koşullarını sağlayan az yukarıda betimlediğimiz $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$ sıralanmış kümelerine geçelim. Şimdi $A' \cap B' = \emptyset$ olduğundan $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} := \mathcal{A}' \oplus \mathcal{B}'$ olarak tanımlanır. Yine

$$\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2 \text{ ve } \mathcal{B}_1 \cong \mathcal{B}_2 \text{ ise } \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{B}_1 \cong \mathcal{A}_2 \oplus \mathcal{B}_2$$

olduğu kolayca görülür. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ iyi sıralanmışlarsa $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ de iyi sıralanmıştır. Özellikle α ve β sıra sayıları için $\alpha \oplus \beta$ iyi sıralanmıştır ve

$$\alpha + \beta := srs(\alpha \oplus \beta) \quad (2.10)$$

sıra sayısına bu sıra sayılarının **(sıralı) toplamı** denir. $\beta \neq 0$ ise α sıra sayısı $\alpha \oplus \beta$ sıra sayısında bir uzantı olacağından $\alpha < \alpha + \beta$ olur. Bunu tekrar vurgulayarak yazalım:

$$\forall \alpha, \beta (\beta \neq 0 \implies \alpha < \alpha + \beta). \quad (2.11)$$

Ayrıca

$$\alpha = srs(\mathcal{A}) \text{ ve } \beta = srs(\mathcal{B}) \text{ ise } \alpha + \beta = srs(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})$$

olduğu aşıkardır.

$\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ iyi sıralanmışlarsa $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ bir doğru üzerinde önce $\mathcal{A}$ 'nın öğeleri kendi sıralarında onların sağında ise $\mathcal{B}$ 'nin öğelerini kendi sıralarında yazarak görselleştirilebilir:

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} : a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots$$

$\alpha + \beta$ 'nin tanımından

$$\natural(\alpha + \beta) = \natural(\alpha \times \{0\}) \sqcup \natural(\beta \times \{1\}) = \natural\alpha \dot{+} \natural\beta$$

elde edilir. Buradan her $m, n \in \mathbb{N}$ doğal sayıları için $m + n = \natural(m + n) = \natural m \dot{+} \natural n = m \dot{+} n$ elde edilir. Çarpma işleminde olduğu gibi

$$\text{Her } m, n \in \mathbb{N} \text{ için } m +^{\mathcal{N}} n = m \dot{+} n = m + n$$

olduğu kolayca görülür. Daha açık bir söylemle Neumann doğal sayıları için onların sıra sayısı toplamaları, çokluk sayısı olarak toplamaları ve Peano toplamaları örtüşürler.

Uzlaşma: Doğal sayılarımız için Peano, çokluk ve sıra sayıları için toplama ve çarpma temel işlemlerinin örtüştüğünü gördük. Aynı şeyin üs

kavramı için de geçerli olduğunu tümevarımla göstermek kolaydır. Bu nedenle $\mathbb{N}$ 'de *Peano aritmetiği*, *çokluk (kardinal) aritmetiği* ve *sırasal aritmetik örtüşürler*. Fark sonluötesinde başlar. m, n doğal sayıları için bu işlemleri bundan sonra yalın olarak $m+n$, mn ve m^n ile göstermenin hiçbir sakıncası yoktur. Bazen böyle yapacağız.

Not 2.9.3 $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ ve $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 'nin tanımlarında A ve B öz sınıflar olabilirler. Ancak A bir öz sınıf ve $B \neq \emptyset$ ise $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ iyi sıralı iken $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ ve $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ iyi sıralı değildirler. Nedeni ise herhangi bir $y \in B$ ögesinin bunlardaki uzantılarının küme değil öz sınıf olmasıdır. $\square$

$\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i$ 'nin Tanımı: $\mathcal{I} = (I, <)$ doğrusal sıralanmış bir küme olsun ve her $i \in I$ için $\mathcal{A}_i = (A_i, <_i)$ doğrusal sıralanmış kümeleri verilsin. Şimdi $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i$ sıralanmış toplamını tanımlayacağız. Cantor'un anlatımıyla I doğrusal sıralanmış kümesinin öğelerini bir doğru üzerine yerleştirelim; sonra her $i \in I$ ögesinin yerine A_i doğrusal sıralanmış kümesinin öğelerini kendi sıralarında yerleştirelim. Böylece elde ettiğimiz doğrusal sıralanmış küme $\mathcal{A}_i$ 'lerin **sıralı toplamı** olarak açıklanır. Ancak $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesi ayrık değilse bazı öğeler birden fazla yerde karşımıza çıkar. Bu durumda bunlara farklı gözüyle bakacağız. Aşağıda vereceğimiz tanım bu resme sağlam bir şekil vermekten ibarettir.

a) $\{A_i\}_{i \in I}$ bir *ayrık* aile olsun. $A := \bigsqcup_{i \in I} A_i$ olmak üzere bu kümede $<_A$ sıralaması $x, y \in A$ için

$$x <_A y := \begin{cases} \exists i, j \in I (i < j \wedge x \in A_i \wedge y \in A_j) \\ \exists i \in I (x, y \in A_i \wedge x <_i y) \end{cases}$$

olarak açıklansın. Bu durumda $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i := (A, <_A)$ olarak tanımlanır.

b) $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesi ayrık olmasın. Bu aileden *ayrık* $\{A_i \times \{i\}\}_{i \in I} = \{A'_i\}_{i \in I}$ ailesine ve sonra da bu altbölümün başında yaptığımız gibi $\mathcal{A}_i$ sıralanmış kümelerinden kendileriyle eşyapılı $\mathcal{A}'_i = (A'_i, <'_i)$ sıralanmış kümelerine geçelim. Şimdi $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i := \bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}'_i$ olarak tanımlanır.

Aslında hiçbir durum irdelemesine gitmeden, verilen aile ayrık olsun olmasın doğrudan $A' := \bigsqcup_{i \in I} A_i \times \{i\}$ ve her $(x, i), (y, j) \in A'$ için

$$(x, i) <_{A'} (y, j) := \begin{cases} i < j \\ i = j \text{ ve } x <_i y \end{cases}$$

olmak üzere $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i = (A', <_{A'})$ olarak tanımlanabilir. Bu tanımı seçersek ailenin ayrık olması durumunda yukarıda (a) şıkında tanımlanan sıralanmış kümenin yeni tanımla tanımladığımızla eşyapılı olduğu kanıtlanır. Bizi de salt bu ilgilendirmektedir.

Bu tanımlarla $\mathcal{A} = (A, <_A)$ ve $\mathcal{B} = (B, <_B)$ iki doğrusal sıralanmış küme olmak üzere

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \bigoplus_{b \in B} \mathcal{A} = \bigoplus_{b \in B} (A \times \{b\}, <_b)$$

olduğu apaçıktır. Burada $(a, b) <_b (a', b) : \Longleftrightarrow a <_A a'$.

$\mathcal{I}$ ve her bir $\mathcal{A}_i$ iyi sıralanmışsa $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i$ de iyi sıralanmıştır. Bu nedenle aşağıdaki tanım anlamlıdır.

Tanım 2.9.4 $\mathcal{I} = (I, <)$ iyi sıralanmış bir küme ve her $i \in I$ için α_i bir sıra sayısı ise

$$\sum_{i \in I} \alpha_i := srs \left(\bigoplus_{i \in I} \alpha_i \right).$$

Eğer her $i \in I$ için $\alpha_i = srs \mathcal{A}_i$ ise elbette

$$\sum_{i \in I} \alpha_i = srs \left(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i \right)$$

olduğu aşıkardır. Yine tanım öncesi verdiğimiz bağıntıdan doğrudan her α, β sıra sayıları için

$$\alpha\beta = \sum_{\gamma \in \beta} \alpha.$$

$\bigotimes_{i \in I}^s \mathcal{A}_i$ 'nin Tanımı: $\mathcal{I} = (I, <)$ iyi sıralanmış bir küme olsun ve her $i \in I$ için $\mathcal{A}_i = (A_i, <_i)$ iyi sıralanmış kümeleri verilsin. I kümesinin boştan farklı her altkümesinin bir en büyük ögesi olması gerekmediğinden $P := \prod_{i \in I} A_i$ çarpım uzayında ters sözlüksel sıralama söz konusu olamaz! Sözlüksel sıralama tanımlanabilir. $x = (x_i), y = (y_i) \in P$ ve $x \neq y$ olsun. $j = \min\{i \in I \mid x_i \neq y_i\}$ olmak üzere:

$$x <_s y : \Longleftrightarrow x_j <_j y_j$$

olarak açıklansın.

$$\bigotimes_{i \in I}^s \mathcal{A}_i := (P, <_s)$$

olarak tanımlanır. $\bigotimes_{i \in I}^s \mathcal{A}_i$ doğrusal sıralanmıştır ancak iyi sıralanmış olması gerekmez. Örneğin $I = \mathbb{N}$ doğal sıralamasıyla alınsın ve her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \{0, 1\}$ ve $0 < 1$ olsun. $a_n \in P$ ögeleri $0 \leq i \leq n$ için $a_n(i) = 0$ ve her $i > n$ içinse $a_n(i) = 1$ olarak açıklansın. Besbelli ki

$$\cdots <_s a_2 <_s a_1 <_s a_0$$

ve $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin çarpım uzayında bir minimumu yoktur. Bu nedenle sıra sayıları için $\prod_{i \in I} \alpha_i$ çarpımının tanımını tekrarlı tanımlamayı öğreninceye kadar erteleyeceğiz. Orada şimdiki tanımla örtüşecek biçimde $\sum_{i \in I} \alpha_i$ toplamını da tekrarlı tanımlamayla vereceğiz.

Şimdi biraz örnek verelim. $\mathbb{N}$ Neumann doğal sayıları olmak üzere $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <)$ iyi sıralanmış kümesi için

$$\omega := srs(\mathcal{N})$$

olarak açıklanır. Eşyapı nedeniyle sezgisel doğal sayılarda bildiklerimizi olduğu gibi buraya belirtmeden aktarıp kullanacağız.

Örnek 2.9.5 Örneklerimizde bir α sıra sayısını $\alpha : a_0, a_1, a_2, \dots$ olarak yazdığımızda kastedilen şudur: α , öğeleri soldan sağa büyüyerek iyi sıralanmış $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ kümesinin sıra sayısıdır. Bu sıralamanın $\in$ bağıntısı olması gerekmez!

1. Bir küme çok farklı biçimde iyi sıralanabilir. Aşağıda doğal sayıların birbiriyle eş yapılı olmayan bazı iyi sıralamalarını vereceğiz:
 - (a) $0, 1, 2, 3, \dots$. En küçük öğe 0, en büyük öğe ve limit öğe yok.
 - (b) $n, n+1, n+2, \dots; 0, 1, \dots, n-1$. En küçük öğe n , en büyük öğe $n-1$, limit öğe bir tane, o da 0.
 - (c) $0, 2, 4, \dots; 1, 3, 5, \dots$. En küçük öğe 0, en büyük öğe yok, tek limit öğe 1.
 - (d) $0, 1, 3, 5, \dots; 2^1 1, 2^1 3, 2^1 5, \dots; 2^2 1, 2^2 3, 2^2 5, \dots$. En küçük öğe 0, en büyük öğe yok, sonsuz tane limit öğe var, bunlar $2^1, 2^2, 2^3, \dots$.

2. Her $k \in \mathbb{N}$ için daha önce $t_k(n) := k+n$ ile tanımlanan t_k dönüşümleri $\mathcal{N}$ 'den $\mathcal{N}_k = (\mathbb{N}_k, <)$ 'ya bir eşyapı dönüşümüdür. Bu nedenle

$$srs(\mathcal{N}_k) = srs(\mathcal{N}) = \omega. \quad (2.12)$$

3. $n + \omega = \omega : \underbrace{0, 1, \dots, n-1}_n, \underbrace{n, n+1, \dots}_{\cong \omega}$ olduğundan her n doğal sayısı için

$$n + \omega \stackrel{(2.12)}{=} srs(n) + srs(\mathcal{N}_n) \stackrel{def}{=} srs(n \oplus \mathcal{N}_n) = srs(\mathcal{N}) = \omega \text{ olur.}$$
 Böylece

$$\forall n \in \mathbb{N} (n + \omega = \omega). \quad (2.13)$$

Bu örnek bize sıra sayılarının toplamında sağdan kısaltma yapamayacağımızı öğretir: $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ dan genelde $\alpha = \beta$ yazamayız! 3'te

yazdığımız ilk satır bir matematiksel gerçeğin fotoğrafıdır. Bundan sonra bazı fotoğraflar vereceğiz ve gerekli matematiksel gerekçeleri okuyucu kolayca yazabilir.

4. Her α sıra sayısı için $0 = \emptyset$ olduğundan $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$.
5. $0 \neq n \in \mathbb{N}$ ise $\omega < \omega + n$. Görselleştirirsek,

$$\omega < \omega + n = \overbrace{n, n+1, \dots}^{\cong \omega} \oplus \overbrace{0, 1, \dots, n-1}^n$$

Dolayısıyla $n + \omega \neq \omega + n$. Demek ki $+$ işlemi değişmeli değildir.

6. $1\alpha = \alpha : (0, a_0), (0, a_1), (0, a_2), \dots \cong a_0, a_1, a_2, \dots$
7. $\alpha 1 = \alpha : (a_0, 0), (a_1, 0), (a_2, 0), \dots \cong a_0, a_1, a_2, \dots$
8. $2\omega = \omega : (0, 0), (1, 0), \dots (0, n), (1, n), \dots \cong 0, 1, \dots, n, \dots$ Benzer biçimde her $n \in \mathbb{N}$ için $n\omega = \omega$.

9. $\omega 2 = \omega + \omega : \overbrace{(0, 0), (1, 0), (2, 0), \dots}^{\cong \omega} \oplus \overbrace{(0, 1), (1, 1), (2, 1), \dots}^{\cong \omega}$ Benzer biçimde her $n \in \mathbb{N}$ için $\omega n = \underbrace{\omega + \dots + \omega}_{n \text{ kez}}$. $n > 1$ için $n\omega \neq \omega n$ olur

ve çarpma işlemi de değişmeli değildir. Ayrıca $(1 + 1)\omega = 2\omega = \omega \neq \omega 2 = \omega + \omega = (1\omega) + (1\omega)$. Sağdan dağıtma özelliği yoktur. Buna karşın tanımlardan doğrudan $\mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \oplus (\mathcal{A} \otimes \mathcal{C})$ olduğu görülür. Soldan dağıtma özelliği vardır, dd. her α, β, γ sıra sayıları için $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

10. $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$,
 $\overbrace{a_0, a_1, a_2, \dots}^{\alpha} \oplus \overbrace{b_0, b_1, b_2, \dots, c}^{\beta \oplus 1} \cong \overbrace{a_0, a_1, a_2, \dots, b_0, b_1, b_2, \dots}^{\alpha \oplus \beta} \oplus \overbrace{c}^1$
 Burada c ögesi kendisinden önce gelen tüm öğelerden farklı herhangi bir öğedir.
11. $\alpha(\beta + 1) = (\alpha\beta) + \alpha$. Bu aşağıda vereceğimiz daha genel bağıntının özel halidir.

$\mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \oplus (\mathcal{A} \otimes \mathcal{C})$ eşitliğinin fotoğrafı aşağıdaki gibidir:

$$\underbrace{\overbrace{(a_0, b_0), (a_1, b_0), \dots, (a_0, b_1), (a_1, b_1), \dots}_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}} \oplus \overbrace{(a_0, c_0), (a_1, c_0), \dots, (a_0, c_1), \dots}_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{C}}}_{\mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} \oplus \mathcal{C})}$$

Bu kadar örnek yeterlidir. Şimdi dikkatimizi ilk örnekteki duruma yoğunlaştıracakız ve ardından çokluk sayılarının tanımına geçeceğiz. Doğal sayıları birbiriyle eşyapılı olmayacak biçimde sonsuz farklı biçimde iyi sıralayabileceğimizi öğrendik. Bunlara karşılık gelen sıra sayıları birbirinden farklı olacaklar, ancak küme olarak bu farklı sıra sayıları aynı güçte olacaklardır! Tekrarlı teoremden $\omega^1 = \omega$, $\omega^{n+1} = \omega^n \omega$ koşullarını sağlayan tek olarak belirli ve her $n \in \mathbb{N}^*$ için açıklanmış sıra sayılarının varlığını biliyoruz. Şimdi sıra sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayalım. İşte bir başlangıç:

$$\begin{aligned} &0, 1, 2, \dots; \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots; \omega^2, \omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \dots; \omega^3, \dots; \\ &\omega^4, \dots; \omega^2, \omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \dots; \omega^2 + \omega, \dots; \omega^2 + \omega^2, \dots; \omega^2 + \omega^3, \dots; \\ &\omega^2 2, \dots; \omega^3, \dots, \omega^4, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots, \varepsilon_0, \varepsilon_0 + 1, \dots \end{aligned}$$

Burada sayılar büyüdükçe adımları zorunlu olarak büyüttük. Ayrıca

$$\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\dots}}}$$

Bu dizide yazılı olan her sıra sayısı tamı tamına kendinden önce gelen öğelerin kümesidir. ω ve ondan sonra gelen bu dizideki yazılı tüm sıra sayılarının gücü ω 'nın gücüne eşittir, dd. $\aleph_0$ 'dır. Elbette işimiz henüz ε_0 ile bitmedi! ε_0 sıra sayısına gelinceye kadar oynadığımız oyunu bu sıra sayısından başlamak üzere yeniden oynayabiliriz vb. ...

Her α sıra sayısı için

$$\begin{aligned} F_\alpha : Srs &\longrightarrow Srs, \quad F_\alpha(\xi) := \alpha + \xi \text{ ve} \\ G_\alpha : Srs &\longrightarrow Srs, \quad G_\alpha(\xi) := \alpha \xi \end{aligned}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Sıra sayıları arasında açıkladığımız toplam ve çarpım tanımlarının doğrudan sonucu olarak F_α ve $\alpha > 0$ için G_α fonksiyonları

$$\begin{aligned} \forall \xi, \eta \in Srs \quad (\xi < \eta &\implies F_\alpha(\xi) < F_\alpha(\eta)) \text{ ve} \\ \forall \xi, \eta \in Srs \quad (\xi < \eta &\implies G_\alpha(\xi) < G_\alpha(\eta)) \quad (\alpha > 0) \end{aligned}$$

özelliklerine sahiptirler. Bunun bir sonucu olarak her α, γ, λ sıra sayıları için

$$\alpha + \gamma < \alpha + \lambda \iff \gamma < \lambda \text{ ve } \alpha > 0 \text{ için } \alpha\gamma < \alpha\lambda \iff \gamma < \lambda \quad (2.14)$$

- **(A) Çıkarma :** α ve β sıra sayıları ve $\beta \geq \alpha$ ise tek olarak belirli bir ξ sıra sayısı $\beta = \alpha + \xi$ olacak biçimde vardır.

Gerçekten de teklik yukarıdaki eşitsizliklerden çıkar. Varlıksa $\beta \cong \alpha \oplus (\beta \setminus \alpha)$ bağıntısının sonucudur, $\xi = srs(\beta \setminus \alpha)$ alınız. Tek olarak belirli bu ξ sıra sayısını $-\alpha + \beta$ ile göstereceğiz³³. Böylece $\alpha + (-\alpha + \beta) = \beta$.

Toplama işlemi değişmeli olmadığından

$$\beta = \alpha + \xi \quad \text{ve} \quad \beta = \xi + \alpha$$

denklemleri iki *farklı* denklemdir! $\beta \geq \alpha$ olmak üzere $\alpha + \xi = \beta$ denklemi daima bir çözüme sahipken aynı şey $\xi + \alpha = \beta$ denklemi için geçerli değildir. Örneğin α bir ardılsa her ξ için $\xi + \alpha$ da bir ardıl olacağından β bir limit öge ise $\xi + \alpha = \beta$ denkleminin çözümü olamaz! Diğer yandan $\xi + \alpha = \beta$ denkleminin bir çözümü varsa i) α sonlu ise bu çözüm tektir, ii) α sonsuzsa bu denklemin sonsuz tane çözümü vardır.

Gerçekten de α sonsuz olsun, dd. $\alpha \geq \omega$. Az önce kanıtladığımıza göre $\omega + \xi = \alpha$ olacak biçimde bir ξ vardır. Her n doğal sayısı için

$$n + \alpha = n + (\omega + \xi) = (n + \omega) + \xi = \omega + \xi = \alpha,$$

olduğundan $\xi + \alpha = \beta$ ise

$$(\xi + n) + \alpha = \xi + (n + \alpha) = \xi + \alpha = \beta$$

olur, dd. ξ bir çözümse $\xi + n$ de bir çözümdür!

Şimdi α sonlu olsun. $\gamma + 1 = \lambda + 1 \implies \gamma = \lambda$ bağıntısından yola çıkarak $\xi + \alpha = \xi^* + \alpha \implies \xi = \xi^*$ olduğu kolayca görülür (ödev).

$\xi + \alpha = \beta$ denkleminin çözümü varsa bu çözümlerin en küçüğü $\beta - \alpha$ olarak gösterilir. Özellikle $\xi + 1 = \beta$ denkleminin çözümü varsa tek olarak belirlidir ve bu çözüm $\beta - 1$, $\xi + 1 = \beta - 1$ denkleminin çözümü varsa tek olarak belirli bu çözüm $\beta - 2, \dots$ olarak gösterilir.

- **(B) Kalanlı Bölme :** $\alpha > 0$ ve ζ sıra sayıları verildiğinde tek olarak belirli β, ξ sıra sayıları

$$\zeta = \alpha\beta + \xi, \quad \xi < \alpha$$

olacak biçimde vardır.

Önce böyle bir gösterimin varlığını görelim. $\alpha = 1$ ise $\zeta = 1 \cdot \zeta + 0$ işimizi görür. $1 < \alpha$ ise, çarpmanın tanımından doğrudan görüleceği gibi,

³³Burada Hausdorff'a uyarak bu çözümü $\beta - \alpha$ olarak değil $-\alpha + \beta$ olarak gösterdiğimizize dikkat ediniz. Gösterimin mantığı çözüm denkleminde yerine konduğunda α ve $-\alpha$ 'nın yanyana düşüp birbirini yok etmesini düşündürmektedir.

$\alpha\zeta$ sıralanmış kümesi ζ 'nin en az bir örneğini içerir. Dolayısıyla $\zeta \leq \alpha\zeta$ olur. Bu ise ζ sıra sayısının $\alpha\zeta$ 'nin bir uzantısı olduğunu söyler. $\alpha\zeta$ 'deki her uzantı ise,

$$\alpha\zeta = srs(\overbrace{\alpha \oplus \alpha \oplus \cdots}^{\zeta \text{ kez}})$$

olduğundan, $\alpha\beta + \xi$, $\xi < \alpha$ tipindedir. Dolayısıyla β , ξ sıra sayıları $\zeta = \alpha\beta + \xi$, $\xi < \alpha$ olacak biçimde vardır.

Şimdi böyle bir gösterimin tekliğini kanıtlayalım. $\zeta = \alpha\beta + \xi$, $\xi < \alpha$ ve $\zeta = \alpha\beta^* + \xi^*$, $\xi^* < \alpha$ olsun. $\beta < \beta^*$ varsayalım.

$$\zeta = \alpha\beta + \xi < \alpha\beta + \alpha = \alpha(\beta + 1) \leq \alpha\beta^* \leq \alpha\beta^* + \xi^* = \zeta$$

ile bir çelişkiye ulaşırız. Benzer biçimde $\beta^* < \beta$ olamayacağı görülür. $\beta = \beta^*$ olmalıdır. $\alpha\beta + \xi = \alpha\beta + \xi^*$ ve (A) ile $\xi = \xi^*$ elde edilir.

Problem 2.9.1 Her α sıra sayısı için aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız:

α bir ardıldır $\iff \exists \max \alpha \wedge \max \alpha = \alpha - 1 = \bigcup \alpha$,

α bir limit ögedir $\iff \neg \exists \max \alpha$

$\iff \exists \sup \alpha \wedge \alpha = \sup \alpha = \sup^+ \alpha \iff \alpha = \bigcup \alpha$.

Problem 2.9.2 $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ doğrusal sıralanmışlarsa $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 'nin de doğrusal sıralanmış olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.9.3 $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ doğrusal sıralanmış sınıflarsa $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 'nin de doğrusal sıralanmış sınıf olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.9.4 $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ iyi sıralanmış n ögeli kümelerse $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ olduğunu tümevarımla kanıtlayınız.

Problem 2.9.5 $\mathcal{A}$ doğrusal sıralanmış bir sınıf ise her $x \in A$ için $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_x \oplus \{x\} \oplus \mathcal{A}^x$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.9.6 $\mathcal{A}$ doğrusal sıralanmış bir sınıf ve $B \subseteq A$ bir başlangıç ise $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \oplus (\mathcal{A} \setminus \mathcal{B})$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.9.7 Tümevarımla her $m, n \in \omega$ için $m + n = m +^N n$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.9.8 $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}'$ ve $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}'$ ise $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \cong \mathcal{A}' \otimes \mathcal{B}'$ ve $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \cong \mathcal{A}' \oplus \mathcal{B}'$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.9.9 $<$ ile doğal sayıların doğal sıralamasını göstereyim. $\mathcal{D} := (\mathbb{N}, <)$ iyi sıralanmıştır ancak $\mathcal{D}^{-1} := (\mathbb{N}, <^{-1})$ ve $\mathcal{A} := \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^{-1}$ 'nin iyi sıralı olmadıklarını, $\mathcal{D}$ 'nin $\mathcal{A}$ 'da bir öz başlangıç olmasına karşın bir uzantı olmadığını gösteriniz.

Problem 2.9.10 $\mathcal{I}$ ve her bir $\mathcal{A}_i$ iyi sıralanmışsa $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i$ de iyi sıralanmış olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.9.11 $\forall \xi, \eta \in Srs (\xi < \eta \implies \alpha + \xi < \alpha + \eta)$ ve $\alpha > 0$ ise $\forall \xi, \eta \in Srs (\xi < \eta \implies \alpha\xi < \alpha\eta)$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.9.12 $I_r := (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ olsun ve her $a \in \mathbb{Q}$ sayısını kısaltılmış biçimleriyle $a = \frac{p}{q}$ olarak yazalım. $<$ rasyonel sayılar arasındaki doğal sıralamayı göstermek üzere $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \in I_r$ için bir $<$ sıralamasını

$$\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} : \iff \begin{cases} p_1 + q_1 < p_2 + q_2 \\ p_1 + q_1 = p_2 + q_2 \text{ ve } \frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} \end{cases}$$

ile tanımlayalım. $(I_r, <)$ 'nin iyi sıralanmış olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.9.13 A bir sonsuz küme olsun. A bir kez iyi sıralanabilirse sonsuz farklı biçimde iyi sıralanabileceğini gösteriniz.

2.10 İYİ SIRALANMIŞ SINIFLAR

Bir X sınıfında yansız, geçişli ve bağlantılı bir $R \subseteq X \times X$ ikili bağıntısı verilsin. Bu durumda $\mathcal{X} = (X, R)$ doğrusal sıralanmıştır. Elbette burada R de bir sınıf olabilir. $Y \subseteq X$ alt sınıfı verildiğinde $\mathcal{Y} = (Y, R|Y)$ de doğrusal sıralanmış bir sınıftır. Ancak biz $\mathcal{Y} = (Y, R|Y)$ yerine yalın olarak $\mathcal{Y} = (Y, R)$ yazmayı yeğleyeceğiz, özellikle $\mathcal{X}_x := (X_x^R, R)$. X sınıfının doğrusal sıralanmış Y alt sınıfından söz ettiğimizde kastedilen her zaman $\mathcal{Y} = (Y, R|Y)$ sıralanmış sınıfı olacaktır! Herhangi bir $x \in X$ ögesi için X_x^R ve Y_x^R sınıflarının yerine çoğu zaman kısaca X_x, Y_x yazacağız.

X ve R sınıflar olmak üzere $\mathcal{X} = (X, R)$ ikilisine, aşağıdaki koşullar sağlandığında bir iyi sıralanmış sınıftır demiştik:

1. $\mathcal{X} = (X, R)$ doğrusal sıralanmıştır,
2. X sınıfının boştan farklı her *altkümesinin* R bağıntısına göre bir en küçük ögesi vardır.
3. Her $x \in X$ için X_x^R uzantısı bir *kümedir*.

Not 2.10.1 Bu tanımda en beklenmedik koşul 3. koşuldur. Bu bizim için önemlidir. 2. koşulda en küçük öğelerin yalnızca boştan farklı *altkümeler* için istenmiş olması bir kısıtlama değildir, az ileride boştan farklı her alt sınıfın en küçük ögesi olduğunu öğreneceğiz. Biz $(Srs, \in)$ 'nin iyi sıralanmış ve geçişli olduğunu öğrendik. Eğer Srs bir küme olsaydı (2.8.12)'dan dolayı bir sıra sayısı olurdu; buradan elde edeceğimiz $Srs \in Srs$ ise (2.8.16)(2)

ile çelişir. Dolayısıyla Srs bir *öz sınıftır*. $\mathcal{SR}\mathcal{S} := (Srs, \in)$ olsun. Bir anlamda bu iyi sıralanmış tek öz sınıftır: Her iyi sıralanmış öz sınıf $(Srs, \in)$ ile eşyapılıdır, dd. iyi sıralanmış öz sınıflar kuramı kesin bellidir. Bunu da bu bölümde kanıtlayacağız. $\square$

Önerme 2.10.2 *İyi sıralanmış bir $\mathcal{X} = (X, <)$ sınıfının boştan farklı her alt sınıfının bir en küçük ögesi vardır.*

Kanıt. $\emptyset \neq Y \subseteq X$ verilsin. Bir $y \in Y$ ögesini keyfi seçelim. $y = \min Y$, dd. y ögesi Y sınıfının en küçük ögesi ise işimiz biter, değilse $\emptyset \neq Y_y \subseteq X_y$ olur. Tanım gereği X_y bir kümedir, dolayısıyla Y_y bir kümedir³⁴ ve tanım gereği bir y^* en küçük ögesi vardır. $y^* = \min Y$ olduğu kolayca görülür. ■

$\mathcal{X} = (X, <_X)$ ve $\mathcal{Y} = (Y, <_Y)$ iki doğrusal sıralanmış sınıf olmak üzere $F : X \rightarrow Y$ fonksiyonuna aşağıdaki koşulu sağlıyorsa **yapısaldır** veya F bir **yapı dönüşümüdür** denir:

$$\forall x, x' \in X (x <_X x' \implies F(x) <_Y F(x'))$$

ve bu durumda kısaca $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ yapısaldır diyeceğiz. Bunlara **kesin artan** da denir. F fonksiyonunun bir *eşyapı dönüşümü* olması tam da F fonksiyonunun bir tameşleme, ayrıca F ve F^{-1} fonksiyonlarının yapısallığı demektir. Böyle bir durumda, daha önce de olduğu gibi

$$F : \mathcal{X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Y} \text{ ve } \mathcal{X} \cong \mathcal{Y}$$

gösterimlerini kullanacağız.

Teorem 2.10.3 $\mathcal{X} = (X, <)$ iyi sıralanmış bir sınıf olsun.

1. $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ yapısalsa her $x \in X$ için $x \leq F(x)$.
2. Bir tek $f : \mathcal{X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}$ eşyapı dönüşü vardır, o da $f = I_X$ özdeşliğidir.
3. $\mathcal{X}$ iyi sıralanmış bir $\mathcal{Y}$ sınıfı ile eşyapılı ise bir tek $F : \mathcal{X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Y}$ eşyapı dönüşümü vardır.
4. $\mathcal{X}$ kendisinin bir $\mathcal{X}_x$ uzantısıyla eşyapılı olamaz.

Kanıt. 1. Savımızın yanlış olduğunu varsayalım. O zaman $A := \{x \in X \mid F(x) < x\} \neq \emptyset$ olur. $a := \min A$ olsun ((2.10.2)). $a \in A$ olduğundan $F(a) < a$ ve bu nedenle a ve A kümesinin tanımlarından ötürü $F(a) \notin A$

³⁴Aksiyomatik Kümeler Kuramı'na geçtiğimizde kümelerin alt sınıflarının da bir küme olduğunu garanti eden aksiyomlarımız olacaktır. Ancak biz şu an CKK'da çalışıyoruz ve burada Y_y nesnesi X_y kümesinin alt kümesidir.

olur. Diğer yandan F yapısal olduğundan $F(a) < a$ bağıntısından $F(F(a)) < F(a)$ elde edilir ki bu bize $F(a) \in A$ bağıntısını verir ve bir çelişkiye ulaşırız.

2. $F : \mathcal{X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}$ eşyapı dönüşümü olsun. $x \in X$ keyfi verilsin. F yapısal olduğundan (1) ile $x \leq F(x)$. Bu ve F^{-1} yapısal olduğuna yine (1) ile $F(x) \leq F^{-1}(F(x)) = x$ elde edilir ve bu iki eşitsizlikten $F(x) = x$ elde edilir.

3. $F, G : \mathcal{X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Y}$ eşyapı dönüşümleri olsunlar. $G^{-1} \circ F : \mathcal{X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}$ bir eşyapı dönüşümüdür ve dolayısıyla (2)'den $G^{-1} \circ F = I_X$ olur. Bu ise $F = G$ demektir.

4. Bir $a \in X$ ile $F : \mathcal{X} \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}_a$ olsun. $F(a) \in X_a$ olacağından $F(a) < a$ olur. Diğer yandan $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ yapısal olduğundan (1) ile $a \leq F(a)$ olmalıdır ki bu bir önceki eşitsizlikle çelişir ve işimiz biter. ■

Teorem 2.10.4 *Her iyi sıralanmış öz sınıf $Srs = (Srs, \in)$ ile eşyapılıdır, dd. iyi sıralanmış öz sınıflar kuramı kesin bellidir.*

Kanıt. Yazımı yalınlaştırmak için $Y := Srs$ ve $\mathcal{Y} = (Y, \in) = (Srs, \in)$ yazalım. $\mathcal{X} = (X, <)$ bir iyi sıralanmış öz sınıf olsun. Her $x \in X$ için $\mathcal{X}_x$ iyi sıralanmış bir küme olduğundan, tek olarak belirli bir α sıra sayısı $\mathcal{X}_x \cong (\alpha, \in)$ olacak biçimde vardır. Dolayısıyla $F(x) := \alpha$ ile bir $F : X \rightarrow Y$ fonksiyonu tanımlanır ve bu fonksiyon birebirdir. Gerçekten de $F(x) = F(y)$ ve $x \neq y$ olduğunu varsayalım ve gbk. $x < y$ olsun. Bu durumda $\mathcal{X}_y \cong \mathcal{X}_x \cong (\mathcal{X}_y)_x$ ve bu (2.10.3)(4) ile çelişir! F birebir olduğundan $F : X \rightleftharpoons resF$ bir tameşlemedir.

$x \in X$ keyfi verilsin ve $\alpha := F(x)$ olsun. Tanım gereği bir $f_x : \mathcal{X}_x \xrightarrow{\sim} \alpha = \mathcal{Y}_\alpha$ eşyapı dönüşümü vardır. $z \in X_x$ keyfi verilsin. $z < x$ olduğundan $\beta := f_x(z) \in \alpha$ ve $f_x|_{(X_x)_z} : (\mathcal{X}_x)_z \xrightarrow{\sim} (\mathcal{Y}_\alpha)_\beta$ olur. Ancak $(\mathcal{X}_x)_z = \mathcal{X}_z$ ve $(\mathcal{Y}_\alpha)_\beta = \mathcal{Y}_\beta = \beta$ olduğunu gözetirsek $\mathcal{X}_z \cong \mathcal{Y}_\beta$ olur ve biz $\beta = F(z)$ elde ederiz. Sıra sayıları için $\beta \in \alpha$ tam da $\beta < \alpha$ demek olduğundan $F(z) < F(x)$ olur ve F yapısaldır. Yine bu irdeleme $\alpha, \beta \in resF$ ve $\beta < \alpha$ ise $F^{-1}(\alpha) < F^{-1}(\beta)$ olduğunu da gösterir.

Şimdi $\alpha \in resF, \beta \in Y$ ve $\beta < \alpha$ olsun. $\beta \in \alpha$ olacağından $\alpha = F(x)$ ve $f_x : \mathcal{X}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{Y}_\alpha$ ise bir $z < x$ ile $\beta := f_x(z)$ olur ve yukarıda $F(z) = \beta$ olduğunu öğrendik. Böylece $\beta \in resF$, dolayısıyla $resF$ sınıfı $Y = Srs$ sınıfında bir başlangıçtır. Srs 'nin öz başlangıçları uzantı ve dolayısıyla küme olduğundan bir öz sınıfla eşgüçlü olan $resF$ sınıfı Srs sınıfının öz başlangıcı olamaz ve $resF = Srs$ olmak zorundadır. Böylece $F : \mathcal{X} \xrightarrow{\sim} Srs$. ■

Teorem 2.10.5 (Neumann Çökmesi) *Her iyi sıralanmış $\mathcal{X} = (X, <)$ sınıfı tek olarak belirli iyi sıralanmış geçişli bir $\mathcal{Y} = (Y, \in)$ sınıfı ile eşyapılıdır.*

Kanıt. $\mathcal{X} = (X, <)$ iyi sıralanmış bir sınıf olsun. X bir küme olduğunda sav (2.8.23)'te kanıtlandı. Şimdi X bir öz sınıf olsun. Teorem (2.10.4)'ten dolayı $\mathcal{X} \cong (Srs, \in)$. Şimdi $\mathcal{X} \cong \mathcal{Y} = (Y, \in)$ ve Y geçişli ise $Y = Srs$ olduğunu kanıtlayalım. $F : (Y, \in) \xrightarrow{\sim} (Srs, \in)$ fonksiyonu (2.10.4)'ün kanıtındaki fonksiyon olsun. Her $y \in Y$ için $Y_y^\in$ kümesi de geçişli ve $(Y_y^\in, \in)$ iyi sıralı olduğundan (2.8.12)'den dolayı $(Y_y^\in, \in)$ bir sıra sayıdır. $Y_y^\in$ küme olduğundan y ögesinin Y öz sınıfında bir y' dolaysız ardılı vardır. $(Y_{y'}^\in, \in)$ de bir sıra sayı olduğundan $y \in Y_{y'}^\in$ de bir sıra sayıdır ve (2.8.11)(4)'ten dolayı $y = Y_y^\in$ 'dur. Bu nedenle $F(y) = y$ olmak zorundadır ve $(Y, \in) = (Srs, \in)$ olur. ■

Teorem 2.10.6 $\mathcal{X} = (X, <)$ ve $\mathcal{Y} = (Y, <)$ iki iyi sıralanmış sınıf iseler şu üç durumdan biri ve ancak biri geçerlidir:

1. $\mathcal{X} \cong \mathcal{Y}$.
2. $\exists y \in Y$ $\mathcal{X} \cong \mathcal{Y}_y$.
3. $\exists x \in X$ $\mathcal{X}_x \cong \mathcal{Y}$.

Kanıt. (2.10.3)(4)'ten dolayı bu şıklar birbirini dışlarlar. Geriye bunlardan en az birinin doğru olduğunu kanıtlamak kalıyor.

X ve Y küme iseler (2.8.19)'da kanıtlandı. Her ikisi de öz sınıfsalar $\mathcal{X} \cong SRS \cong \mathcal{Y}$. Bunlardan biri, örneğin X küme ve diğeri, örneğimizde Y bir öz sınıfsa $\mathcal{X}$ bir α sıra sayısı eşyapılıdır. Ancak α sıra sayısı SRS sıralanmış sınıfındaki kendi uzantısına eşittir, dd. $\alpha = (SRS)_\alpha$ ve bir $y \in Y$ ile $\mathcal{X} \cong \alpha = (SRS)_\alpha \cong \mathcal{Y}_y$.

[İkinci Kanıt: $F := \{(x, y) \in X \times Y \mid \mathcal{X}_x \cong \mathcal{Y}_y\}$ olsun. (2.10.3)(4)'ten dolayı her $x \in \tan F$ için $(x, y) \in F$ koşulunu sağlayan bir tek y vardır, böylece $F : \tan F \rightarrow Y$. Yine aynı nedenden dolayı her $y \in \text{res} F$ için $(x, y) \in F$ koşulunu sağlayan bir tek x ögesi vardır. Bu nedenle F birebirdir, dolayısıyla $F : \tan F \xrightarrow{\sim} \text{res} F$ bir tameslemedir. Şimdi $\tan F$ sınıfının X 'de bir başlangıç olduğunu göstereceğiz. $x \in \tan F$ keyfi verilsin ve $y := F(x)$ olsun. Tanım gereği bir $f_x : \mathcal{X}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{Y}_y$ eşyapı dönüşümü vardır. $z \in X_x$ keyfi verilsin. $z < x$ olduğundan $w := f_x(z) < y$ ve $f_x|_{(X_x)_z} : (\mathcal{X}_x)_z \xrightarrow{\sim} (\mathcal{Y}_y)_w$ olur. Ancak $(\mathcal{X}_x)_z = \mathcal{X}_z$ ve $(\mathcal{Y}_y)_w = \mathcal{Y}_w$ olduğunu gözetirsek $\mathcal{X}_z \cong \mathcal{Y}_w$ olur ve biz $z \in \tan F$ ve $w = F(z)$ elde ederiz. Böylece bir yandan $\tan F$ sınıfının bir başlangıç olduğunu, diğer yandan F fonksiyonunun yapısal olduğunu da kanıtlamış olduk. Tüm irdelemelerimizde $\mathcal{X}$ ve $\mathcal{Y}$ 'nin rolleri simetrik olduğundan $\text{res} F = \tan F^{-1}$ sınıfı Y sınıfında bir başlangıçtır ve F^{-1} fonksiyonu da yapısalıdır. Sonuçta $F : (\tan F, <) \xrightarrow{\sim} (\text{res} F, <)$ eşyapı dönüşümüdür.

Geriye $\tan F$ ve $\text{res} F$ sınıflarının ikisinin birden öz başlangıçlar, dd. uzantılar olamayacağını kanıtlamak kalıyor. Bir an için $\tan F = X_x$ ve $\text{res} F = Y_y$ olduğunu varsayalım. Uzantı tanımından $x \notin \tan F$ ve $y \notin \text{res} F$. Diğer yandan az önce $F : \mathcal{X}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{Y}_y$ olduğunu kanıtladık. Tanım gereği $(x, y) \in F$ ve bir çelişkiye ulaştık!]. ■

2.11 SIRALAMA TOPOLOJİSİ VE NORMAL FONKSİYONLAR

Her ne kadar okuyucunun temel topolojik kavramları bildiğini düşünüyorsak ve burada bizi ilgilendiren kavramlar topolojiye girmeden verilebilir olsalar da burada önce bizi ilgilendiren temel topolojik kavramları vereceğiz. Böylece burada açıklayacağımız kavramlar topoloji bilgisi olan okuyucular için daha iyi izlenebilir olacaklardır.

X herhangi bir küme olsun. X kümesinde bir **topoloji** tanım gereğince aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ kümesidir:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
2. $U, V \in \mathcal{T} \implies U \cap V \in \mathcal{T}$.
3. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T} \implies \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$, X üzerinde bir topoloji olmak üzere $(X, \mathcal{T})$ ikilisine bir **topolojik uzay**, $\mathcal{T}$ 'nin öğelerine bu uzayın **açık kümeleri**, bunların X 'teki tümleyenlerine ise bu uzayın **kapalı kümeleri** denir. Topoloji aksiyomlarında tümleyenlere geçilerek kapalı kümelerle ilişkin aksiyomlar elde edilir: i) $\emptyset$ ve X kapalı kümelerdir, ii) A ve B kapalı kümelerse $A \cup B$ de kapalı kümedir, iii) $\mathcal{K}$ kapalı kümelerin bir ailesi ise $\bigcap \mathcal{K}$ de kapalıdır; burada $\bigcap \emptyset = X$ alınacaktır. Bir $A \subseteq X$ altkümesi verildiğinde bunun tüm açık altkümelelerinin birleşimi A° ile gösterilir ve A 'nın **içi** olarak adlandırılır. A kümesini içeren kapalı kümelerin arakesiti ise $\overline{A}$ ile gösterilir ve A 'nın **kapamışı** olarak adlandırılır. $\subseteq$ bağıntısına göre A° , A 'nın altkümesi olan en büyük açık küme, $\overline{A}$ ise A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümedir. $\mathcal{T}_A := A \cap \mathcal{T}$ ise A kümesinde bir topolojidir ve buna $\mathcal{T}$ 'nin A kümesindeki **izi** veya A kümesinin **görelî topolojisi** denir. Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayının herhangi bir A kümesini, başka bir açıklama yapılmadığı sürece daima $\mathcal{T}_A$ ile ele alacağız.

$(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayı ve bir $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ ailesi verilsin. Her $U \in \mathcal{T}$ açık kümesi bir $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ 'nin birleşimi, dd. $U = \bigcup \mathcal{C}$ olarak elde edilebiliyorsa $\mathcal{B}$ ailesi $\mathcal{T}$ topolojisinin bir **bazıdır** denir. Bir $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ ailesine ait kümelerin sonlu arakesitlerinin ailesi $\mathcal{T}$ için bir baz ise $\mathcal{S}$ ailesi $\mathcal{T}$ topolojisi için bir **altbazdır** denir. Bir $x \in X$ noktası ve bir $K \subseteq X$ altkümesi verilsin. $x \in U \subseteq K$ olacak biçimde bir $U \in \mathcal{T}$ bulunuyorsa K kümesine x noktasının $\mathcal{T}$ topo-

lojisine göre bir **komsuluğudur** denir. x noktasının $\mathcal{T}$ topolojisine göre komşuluklarının kümesini $\mathcal{K}_x^{\mathcal{T}}$ veya söz konusu $\mathcal{T}$ belli olduğunda kısaca $\mathcal{K}_x$ ile gösterelim. Bir $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{K}_x$ ailesine her $K \in \mathcal{K}_x$ için $B \subseteq K$ olacak biçimde bir $B \in \mathcal{B}_x$ bulunabiliyorsa x noktası için bir **komsuluk bazıdır** denir. Bir topolojik uzayın farklı iki noktası nasıl verilirse verilsin bunların ayrık komşulukları bulunabiliyorsa uzayımız bir **T₂** veya bir **Hausdorff uzayıdır** denir.

$(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayı ve $x \in X$ noktası verilsin. $\{x\}$ bir açık kümeysen ve ancak bu durumda x noktası topolojik uzayımızın bir **ayrık noktasıdır** diyeceğiz. Uzayımızın ayrık olmayan noktalarına **limit** veya **yığılma noktaları** denir. Bir $A \subseteq X$ altkümesinin ayrık veya yığılma noktaları tanım gereğince $(A, \mathcal{T}_A)$ uzayının ayrık ve yığılma noktalarıdır. Böylece

x , A kümesinin ayrık noktasıdır $\iff \exists K \in \mathcal{K}_x \ A \cap K = \{x\}$.

x , A kümesinin yığılma noktasıdır. $\iff \forall K \in \mathcal{K}_x \ (A \setminus \{x\}) \cap K \neq \emptyset$.

x noktasının A kümesinin yığılma noktası olması için gerek ve yeter koşulun $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$ olduğunu okuyucu kolayca gösterebilir. A kümesinin yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir ve A kümesinin (birinci) **türevi** olarak adlandırılır. $A \subseteq B$ ise $A' \subseteq B'$ olduğu aşıkardır. $\overline{A} = A \cup A'$ olduğu kolayca görülebilecek bir topolojik gerçektir.

$(X, \mathcal{T}), (X^*, \mathcal{T}^*)$ iki topolojik uzay, $x \in X$ ve $f : X \rightarrow X^*$ bir fonksiyon olsun.

1. f fonksiyonu $((\mathcal{T} - \mathcal{T}^*)\text{-})$ **süreklidir** : $\iff \forall U \in \mathcal{T}^* \ f^{-1}[U] \in \mathcal{T}$.
2. f fonksiyonu x noktasında $((\mathcal{T} - \mathcal{T}^*)\text{-})$ **süreklidir** : $\iff \forall K^* \in \mathcal{K}_{f(x)}^{\mathcal{T}^*} \ \exists K \in \mathcal{K}_x^{\mathcal{T}} \ f[K] \subseteq K^*$.

Bir noktadaki süreklilik tanımında K^* kümelerini $f(x)$ noktasının bir komşuluk bazından seçmek yeterlidir. f fonksiyonun sürekli olması için gerek ve yeter koşul her $x \in X$ noktasında sürekli olmasıdır. Ayrıca *her* f fonksiyonu *her ayrık* noktada süreklidir.

Sıralama Topolojisi. Herhangi bir $(X, <)$ doğrusal sıralanmış kümesi verilsin. X üzerinde $\{X_x\}_{x \in X} \cup \{X^x\}_{x \in X}$ sisteminin bir altbaz olarak tanımlandığı $\mathcal{T}_s$ topolojisine $(X, <)$ doğrusal sıralanmış kümesinin **sıralama topolojisi** denir. X_x ve X^x yerine sırasıyla $(\leftarrow, x)$ ve $(x, \rightarrow)$ yazalım. Ayrıca $a, b \in X$ ve $a < b$ ise

$$\begin{aligned} (a, b) &:= X^a \cap X_b = \{x \in X \mid a < x < b\}, \\ [a, b) &:= \{x \in X \mid a \leq x < b\}, \\ (a, b] &:= \{x \in X \mid a < x \leq b\}, \\ [a, b] &:= \{x \in X \mid a \leq x \leq b\}, \end{aligned}$$

olsun. Buradaki (a, b) aralığının (a, b) sıralı ikisiyle karıştırılmayacağını umuyoruz. Özel olarak $X = \mathbb{R}$ ve $<$ onun doğal sıralaması ise sıralama topolojisi doğal topolojiyle örtüşür.

Uzlaşma: Bundan sonra Ω ile ya bir sıra sayısı ya da Srs kastedilsin. Her sıra sayısı iyi sıralanmış olduğundan bir sıralama topolojisine sahiptir. Her sıra sayısını, başka türlü belirtilmedikçe $\in$ bağıntısından kaynaklanan sıralama topolojisiyle ele alacağız. Gerçi Srs bir küme olmadığından ondan topolojik uzay olarak söz edemeyeceğiz. Yine de onun üzerinde bir sıralama topolojisi verildiğini düşünmenin bir sakıncası yoktur. Çünkü bir $\alpha \in Srs$ olmak üzere $f : \alpha \rightarrow Srs$ tipinde fonksiyonlarla ilgileceğiz. Bu durumda $res f \subseteq \beta$ olacak biçimde bir β sıra sayısı bulunabilir. Bu durumda f fonksiyonun sürekliliğinden anlamak istediğimiz tam da $f : \alpha \rightarrow \beta$ fonksiyonunun sürekliliğinden başkası değildir.

Bizi daha çok sıra sayılarının sıralama topolojisi ilgilendirecektir. Burada ise durum çok basittir. $\beta \in \Omega$ bir ardıl nokta ise $\{\beta\} = (\leftarrow, \beta+1) \cap (\beta-1, \rightarrow)$ olduğundan β noktası Ω 'da bir ayırık noktadır. $\{0\} = (\leftarrow, 1)$ olduğundan 0 noktası da bir ayırık noktadır. Süreklilik bağlamında sadece *limit noktalara bakmak yeterli* olacaktır. Şimdi $\lambda \in \Omega$ bir limit nokta olsun. $\lambda + 1 \in \Omega$ ise her $\alpha < \lambda$ için $(\alpha, \lambda] = (\alpha, \lambda + 1)$ eğer $\Omega = \lambda + 1$ ise Ω 'da $(\alpha, \rightarrow) = (\alpha, \lambda]$ olduğundan $\mathcal{B}_\lambda = \{(\alpha, \lambda] \mid \alpha < \lambda\}$ ailesi λ için bir komşuluk bazıdır. Srs 'de açıklanan sıralama topolojisi ışığında bir $A \subseteq \Omega$ alt sınıfı ve bir $\lambda \neq 0$ sıra sayısı için aşağıdakiler apaçıktır:

- λ, A 'nın bir *yığılma (limit) noktasıdır* $\iff \forall \xi < \lambda \exists \mu \in A \xi < \mu < \lambda$.
- λ, Srs 'nin bir *yığılma noktasıdır* $\iff \lambda$ bir limit sıra sayısıdır.
- A, Ω 'da *kapalıdır* $\iff \lambda \in \Omega, A$ 'nın yığılma noktası ise $\lambda \in A$.

Topolojik bilgisi olan okuyucular için bu üç önerme sıralama topolojisinin basit sonuçlarıdır. Hiç topoloji bilmeyen bir okuyucu ise yukarıda topolojik uzaylar için söylenen her şeyi unutabilir ve bu üç önermeyi sol yandaki kavramların tanımı olarak alabilir. Eğer bu yolu izliyorsanız yine kolayca kapalı kümeler aksiyomlarının sağlandığını gösterebilirsiniz. A'_Ω ile A kümesinin Ω sıfındaki yığılma noktalarının sınıfını gösterirsek A'_Ω ve $\bar{A} := A \cup A'_\Omega$ kümeleri Ω 'da kapalıdır.

Örneğin $\Omega = \omega_2$ topolojik uzayının ω noktası dışındaki tüm noktaları ayırıktır. Ayrıca ω kümesinin ω_2 'de bir yığılma noktası vardır ve bu ω 'dır. $\omega \notin \omega$ olduğundan ω kümesi ω_2 uzayında kapalı değildir.

$A \subseteq Srs$ sıra sayılarının *en büyük ögesi olmayan* bir altkümesi ise $\lambda := \sup A$ sıra sayısı A kümesinin bir yığılma (=limit) noktasıdır ve bazen $\lambda =: \lim A$ ile de gösterilir.

Tanım 2.11.1 λ bir sıra sayısı ve A bir sınıf olmak üzere bir $f : \lambda \longrightarrow A$ dönüşümüne A 'da bir λ -**dizisi** denir. f dizisi genelde $(f(\xi))_{\xi < \lambda}$ veya $a_\xi := f(\xi)$ olmak üzere daha yalın olarak $(a_\xi)_{\xi < \lambda}$ ile gösterilir. $\lambda < \omega$ ise f dizisi **sonludur**, $\lambda \geq \omega$ ise f dizisi **sonluötesidir** denir.

Geleneksel matematikdeki dizilerimiz ω -dizileridir ve biz onları $(a_n)_{n < \omega}$ yerine $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olarak göstermeye alışmışızdır.

Tanım 2.11.2 λ bir limit sıra sayısı ve $(f(\xi))_{\xi < \lambda} = (\alpha_\xi)_{\xi < \lambda}$ ise sıra sayılarının bir λ -dizisi olsun. Aşağıdaki koşul sağlandığında α sıra sayısına bu **dizinin** bir **limitidir** denir ve $\alpha = \lim_{\xi < \lambda} f(\xi)$ veya $\alpha = \lim_{\xi < \lambda} \alpha_\xi$ ile gösterilir:

$$\forall \beta < \alpha \exists \sigma < \lambda \forall \xi (\sigma < \xi < \lambda \implies \beta < \alpha_\xi \leq \alpha).$$

Bu durumda genelde α yerine α_λ yazmayı yeğleyeceğiz.

$\alpha \in \Omega$ ve her $\alpha_\xi \in \Omega$ olmak üzere

$$\alpha = \lim_{\xi < \lambda} f(\xi) \iff \forall K \in \mathcal{K}_\alpha \exists \sigma < \lambda (f[(\sigma, \lambda)] \subseteq K)$$

olur ki bu tam da $(\alpha_\xi)_{\xi < \lambda}$ dizisinin Ω topolojik uzayında α noktasına yakınsak olması demektir. Özel olarak $f = I_\lambda$ özdeşlik dönüşümünü seçersek $(\xi)_{\xi < \lambda}$ dizisi yakınsaktır ve $\lambda = \lim_{\xi < \lambda} \xi$.

Tanım 2.11.3 $\lambda, \gamma \in Lim$, ve $(\alpha_\xi)_{\xi < \lambda}$ bir λ -dizisi olsun. $g : \gamma \longrightarrow \lambda$ kesin artan ve $\lim_{\sigma < \gamma} g(\sigma) = \lambda$ ise $(\alpha_{g(\sigma)})_{\sigma < \gamma}$ dizisine $(\alpha_\xi)_{\xi < \lambda}$ dizisinin bir **altdizisi** denir. Bu altdiziyi $\xi_\sigma = g(\sigma)$ olmak üzere genelde $(\alpha_{\xi_\sigma})_{\sigma < \gamma}$ ile göstereceğiz.

Her şeyden önce Ω iyi sıralı olduğundan sıralama topolojisi Hausdorff'tur. Bu nedenle bir dizinin bir α limiti varsa bu limit tek olarak belirlidir. λ bir limit sıra sayısı olmak üzere $f : \lambda \longrightarrow Srs$ dizimiz kesin artansa (dd. f yapılsalsa) $f[\lambda] = \{f(\xi) \mid \xi < \lambda\}$ kümesinin büyük ögesi yoktur, $(f(\xi))_{\xi < \lambda}$ dizisi yakınsaktır ve

$$\lim_{\xi < \lambda} f(\xi) = \sup f[\lambda] = \sup \{f(\xi) \mid \xi < \lambda\} = \bigcup_{\xi < \lambda} f(\xi).$$

Önerme 2.11.4 α bir sıra sayısı ve $f : \alpha \longrightarrow Srs$ verilsin. f fonksiyonun sürekli olması tam da her $\lambda \in \alpha$ limit sıra sayısı için

$$f(\lambda) = \lim_{\xi < \lambda} f(\xi) = \sup f[\lambda]$$

olmasıdır; $\lambda = \lim_{\xi < \lambda} \xi$ olduğunu göz önünde tutarsak bu

$$f(\lim_{\xi < \lambda} \xi) = \lim_{\xi < \lambda} f(\xi)$$

demektir.

Kanıt. Doğrudan tanımlardan çıkar. ■

Önerme 2.11.5 $\lambda, \gamma \in Lim$, $\lambda \in \Omega$, ve $f : \Omega \rightarrow Srs$ olsun.

1. $\alpha = \lim_{\xi < \lambda} \alpha_\xi$ ise her $(\alpha_{\xi_\sigma})_{\sigma < \gamma}$ altdizisi için $\alpha = \lim_{\sigma < \gamma} \alpha_{\xi_\sigma}$.
2. f fonksiyonu λ 'da sürekli ise $f(\lambda) = f(\lim_{\xi < \lambda} \xi) = \lim_{\sigma < \gamma} f(\xi_\sigma)$.

Kanıt. Doğrudan tanımlardan çıkarlar (ödev). ■

A sıra sayılarının en büyük ögesi olmayan bir kümesi ise $\lambda := srs(A, <)$ bir limit sıra sayısıdır. Bu durumda biz bir $f : \lambda \rightleftarrows A$ tameşlemesiyle $\alpha_\xi := f(\xi)$ olmak üzere A kümesinin öğelerini $\alpha_\xi < \alpha_\eta \iff \xi < \eta$ olacak biçimde sıralayabiliriz. Bu durumda $\sup A = \lim A$ yerine $\lim_{\xi < \lambda} \alpha_\xi$ de yazacağız. Bu tanımlarla örneğin her $m \in \mathbb{N}$ 'için $\lim_{n < \omega} 2^m n = \omega$ olur.

Tanım 2.11.6 $\Omega = Srs$ veya $\Omega = \alpha \in Srs$ bir sıra sayısı olmak üzere bir $F : (\Omega, \in) \rightarrow (Srs, \in)$ dönüşümü verilsin. F fonksiyonu yapısal, dd. kesin artan ve sürekli ise ve ancak bu durumda **normaldir** denir.

Açık bir biçimde yazarsak:

$$F \text{ normaldir} \iff \begin{cases} i) \lambda \in \Omega \cap Lim \text{ ise } F(\lambda) = \sup\{F(\xi) \mid \xi < \lambda\} \\ ii) \forall \alpha, \beta \in \Omega (\alpha < \beta \implies F(\alpha) < F(\beta)) \end{cases}.$$

Not 2.11.7 Kümeler kuramı kitaplarının bir kısmı topolojiye hiç girmez. Bu durumda yukarıda sağ taraftaki ilk koşul F fonksiyonunun sürekliliğinin *tanımı* olarak alınır. F tanımıdaki gibi bir fonksiyon ve $\lambda \in \Omega$ bir limit öge olsun. α, β sıra sayıları $\lambda \in \alpha$ ve $F[\alpha] \subseteq \beta$ olacak biçimde seçilsinler (bu her zaman olasıdır). α ve β sıra sayıları $\in$ sıralamasından kaynaklanan sıralama topolojileriyle alınsınlar. F fonksiyonun λ 'da sürekli olması $F|_\alpha : \alpha \rightarrow \beta$ 'nın sıralama topolojilerine göre λ 'da sürekli olmasıyla eş anlamlıdır. Ardıl öğeler ise sıralama topolojisinde ayrık olduklarından yukarıdaki koşul sürekliliğin tanımı olarak seçilse de F fonksiyonun sürekli olması $F|_\alpha : \alpha \rightarrow \beta$ 'nın sıralama topolojilerine göre sürekli olmasıyla eş anlamlıdır. □

Bir sonraki bölümden örneğin (2.12.2) teoremini ödünç alarak aşağıdaki teoremi kanıtlayacağız.

Önerme 2.11.8 $F : Srs \rightarrow Srs$ sürekli fonksiyonun normal olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha \in Srs$ için $F(\alpha) < F(\alpha + 1)$ olmasıdır.

Kanıt. Bir yön aşık. Şimdi ölçüt sağlansın. β keyfi verilsin ve $X^\beta = \{\gamma \mid \beta < \gamma\}$ iyi sıralanmış sınıfında

$$\forall \gamma \in X^\beta F(\beta) < F(\gamma)$$

olduğunu γ üzerinden sonluötesi tümevarımla kanıtlayacağız. $\min X^\beta = \beta + 1$ için sav ölçüt gereği doğrudur. Şimdi sav γ için doğru ise bir yandan $F(\beta) < F(\gamma)$, diğer yandan ölçüt gereği $F(\gamma) < F(\gamma + 1)$ olacağından $F(\beta) < F(\gamma + 1)$ elde edilir ve sav $\gamma + 1$ için de doğru olur. Şimdi $\gamma \in X^\beta$ bir limit öge ve her $\beta < \xi < \gamma$ için $F(\beta) < F(\xi)$ olsun. Bu durumda

$$F(\beta) < \sup\{F(\xi) \mid \beta < \xi < \gamma\} \leq \sup\{F(\xi) \mid \xi < \gamma\} = F(\gamma)$$

olur (son eşitlik F sürekli olduğundan doğrudur). ■

Teorem 2.11.9 Sabit Nokta Teoremi: $F : Srs \longrightarrow Srs$ normalse istenildiği kadar büyük sabit noktaları vardır, dd.

$$\forall \alpha \exists \beta (\beta \geq \alpha \wedge F(\beta) = \beta).$$

Kanıt. Her şeyden önce (2.10.3)1.'den $\forall \alpha F(\alpha) \geq \alpha$. Şimdi α keyfi verilsin. Bir $(\alpha_n)_{n < \omega}$ dizisi tekrarlı tanımlamayla $\alpha_0 = \alpha$ ve $\alpha_{n+1} = F(\alpha_n)$ olacak biçimde tanımlansın. $\alpha = \alpha_0 = \alpha_1$ ise $F(\alpha) = \alpha$ olacağından işimiz biter. Eğer $\alpha_0 < \alpha_1$ ise $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$ olur. $\alpha_\omega := \sup\{\alpha_n \mid n \in \omega\} = \lim_{n < \omega} \alpha_n$ olsun. $\alpha_\omega \geq \alpha$ apaçıktır. F sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} F(\alpha_\omega) &= F(\lim_{n < \omega} \alpha_n) = \lim_{n < \omega} F(\alpha_n) = \\ \lim_{n < \omega} \alpha_{n+1} &= \sup\{\alpha_{n+1} \mid n \in \omega\} = \alpha_\omega \end{aligned}$$

olur $((\alpha_{n+1})_{n < \omega}$ dizisi $(\alpha_n)_{n < \omega}$ dizisinin bir altdizisidir!). ■

Not 2.11.10 Başka türlü dile getirildiğinde sabit nokta teoremi inanılması zor bir şeyi ifade eder. Srs hem zaman eksenini hem de koordinat eksenini olarak düşünüldüğünde, normal $F : Srs \rightarrow Srs$ dönüşümlerine $F(0)$ başlangıç noktasından ileriye doğru koşan yarışçılar gözü ile bakabiliriz. Kuşkusuz bu koşucuların en yavaş koşanı I özdeşlik koşucusu olacaktır. Bu yorumla sabit nokta teoremi şöyle de ifade edilebilir: F yarışa nereden başlamış ve ne kadar hızlı koşuyor olursa olsun en yavaş koşucumuz olan I koşucusu, α zamanını nasıl verirseniz veriniz, bir $\beta \geq \alpha$ anında F 'yi yakalar, dd. $F(\beta) = \beta = I(\beta)$! □

$F_\mu : Srs \longrightarrow Srs$ ($\xi \rightsquigarrow \mu + \xi$) ve $G_\mu : Srs \longrightarrow Srs$ ($\xi \rightsquigarrow \mu\xi$) fonksiyonlarının normal fonksiyonlar olduğunu kanıtlayacağız.

Teorem 2.11.11 λ bir limit sıra sayısı, $(\alpha_\xi)_{\xi < \lambda}$ kesin artan bir λ -dizisi olmak üzere her μ sıra sayısı için

1. $\lim_{\xi < \lambda} (\mu + \alpha_\xi) = \mu + \lim_{\xi < \lambda} \alpha_\xi$, *dd.* $\lim_{\xi < \lambda} F_\mu(\alpha_\xi) = F_\mu(\lim_{\xi < \lambda} \alpha_\xi)$,
2. $\lim_{\xi < \lambda} \mu \alpha_\xi = \mu \cdot \lim_{\xi < \lambda} \alpha_\xi$, *dd.* $\lim_{\xi < \lambda} G_\mu(\alpha_\xi) = G_\mu(\lim_{\xi < \lambda} \alpha_\xi)$.

Özel olarak $\alpha_\xi = \xi$ alındığında her λ limit ögesi için

$$\begin{aligned} \mu + \lambda &= \mu + \bigcup_{\xi < \lambda} \xi = \lim_{\xi < \lambda} (\mu + \xi) = \sup_{\xi < \lambda} (\mu + \xi) = \bigcup_{\xi < \lambda} (\mu + \xi) \text{ ve} \\ \mu \lambda &= \mu \cdot \bigcup_{\xi < \lambda} \xi = \lim_{\xi < \lambda} (\mu \xi) = \sup_{\xi < \lambda} \mu \xi = \bigcup_{\xi < \lambda} \mu \xi \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç: F_μ ve $\mu > 0$ ise G_μ fonksiyonları normal fonksiyonlardır.

Kanıt. $(\alpha_\xi)_{\xi < \lambda}$ dizisi kesin artan olduğundan tek olarak belirli bir limiti vardır ve bunu α_λ ile gösterelim. α_λ sıra sayısı $\{\alpha_\xi \mid \xi < \lambda\}$ kümesinin öz üst sınırlarının en küçüğü olduğundan her $\xi < \lambda$ için $\alpha_\xi < \alpha_\lambda$.

1. Bu (2.14) ile birlikte her $\xi < \lambda$ için $\mu + \alpha_\xi < \mu + \alpha_\lambda$ bağıntısını verir. Demek ki $\mu + \alpha_\lambda$ sıra sayısı $A = \{\mu + \alpha_\xi \mid \xi < \lambda\}$ kümesinin bir öz üst sınırıdır. Şimdi ise bu sayının bu kümenin öz üst sınırlarının en küçüğü olduğunu görelim. Şimdi γ sıra sayısı her $\zeta \in A$ için $\zeta < \gamma$ koşulunu sağlasın. Özellikle $\gamma > \mu$ olacağından bir α sıra sayısı ile $\gamma = \mu + \alpha$ olur. Böylece her $\xi < \lambda$ için $\mu + \alpha > \mu + \alpha_\xi$, buradan da $\xi < \lambda$ için $\alpha > \alpha_\xi$ elde edilir. Bu ise bize $\alpha \geq \alpha_\lambda$, ardından da $\gamma = \mu + \alpha \geq \mu + \alpha_\lambda$ eşitsizliğini verir. Böylece $\alpha_\lambda = \sup A = \lim A$ olur.

2. $\mu = 0$ için sav aşık. $\mu > 0$ olsun. $B = \{\mu \alpha_\xi \mid \xi < \lambda\}$ olmak üzere her $\beta \in B$ için $\beta < \mu \alpha_\lambda$ olduğu (2.14) ile kolayca görülür. Şimdi her $\beta \in B$ için $\beta < \zeta$ olsun. Kalanlı bölme ile α, σ sıra sayıları $\zeta = \mu \alpha + \sigma$, $\sigma < \mu$ olacak biçimde bulunurlar. Şimdi

$$\mu \alpha_\xi < \zeta = \mu \alpha + \sigma < \mu \alpha + \mu = \mu(\alpha + 1)$$

eşitsizliğinden, yine (2.14) ile her $\xi < \lambda$ için $\alpha_\xi < \alpha + 1$, dolayısıyla $\alpha_\lambda \leq \alpha + 1$ elde edilir. Ancak α_λ bir limit öge olduğundan eşitlik söz konusu olamaz; böylece $\alpha_\lambda < \alpha + 1$, buradan da $\alpha_\lambda \leq \alpha$ elde edilir. Buradan (2.14) ile $\mu \alpha_\xi < \mu \alpha_\lambda \leq \mu \alpha \leq \zeta$ elde edilir. Bu ise bize $\mu \alpha_\lambda = \lim B = \lim_{\xi < \lambda} \mu \alpha_\xi$ eşitliklerini verir. ■

F_a ve G_a fonksiyonlarının temel özellikleri şunlardır:

$$\begin{aligned} F_\alpha(0) &= \alpha, & G_a(0) &= 0 \\ F_\alpha(\beta + 1) &= F_\alpha(\beta) + 1, & G_a(\beta + 1) &= G_a(\beta) + \alpha, \\ F_\alpha(\lambda) &= \bigcup_{\beta < \lambda} F_\alpha(\beta), \quad \lambda \in \text{Lim}, & G_a(\lambda) &= \bigcup_{\beta < \lambda} G_a(\beta), \quad \lambda \in \text{Lim} \end{aligned}$$

Bu özellikleri bir kez de $F_a(\beta)$ ve $G_a(\beta)$ yerine $\alpha + \beta$ ve $\alpha\beta$ yazarak sıralayalım:

$$\begin{aligned}\alpha + 0 &= \alpha, & \alpha 0 &= 0 \\ \alpha + (\beta + 1) &= (\alpha + \beta) + 1, & \alpha(\beta + 1) &= \alpha\beta + \alpha, \\ \alpha + \lambda &= \bigcup_{\beta < \lambda} (\alpha + \beta), \lambda \in Lim, & \alpha\lambda &= \bigcup_{\beta < \lambda} \alpha\beta, \lambda \in Lim\end{aligned}$$

Not 2.11.12 İzlediğimiz yol dolayısıyla kanıtladığımız bu sonuçlar genelde, bir sonraki bölümde öğreneceğimiz tekrarlı teorem bazında sıra sayılarının toplam ve çarpımının tanımı olarak alınır. Biz toplam ve çarpımın sezgisel kaynağından yola çıktık. Ancak Aksiyomatik Kümeler Kuramında bu özelliklere sahip olan fonksiyonlardan yola çıkmamızda bir sakınca yoktur. Çünkü bir sonraki bölümde bu özelliğe sahip fonksiyonların varlığını ve tekliğini kanıtlayacağız. $\square$

Problem 2.11.1 Her α sıra sayısının sıralama topolojisiyle bir Hausdorff uzayı olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.11.2 α topolojik uzayında her $\beta \in \alpha$ için $\{(\sigma, \beta] \mid \sigma < \beta\}$ ailesinin β noktasının bir komşuluk bazı olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.11.3 Herhangi bir X topolojik uzayında bir $A \subseteq X$ kümesi için $\overline{A} = A \cup A'$ olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.11.4 Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız:

1. λ , A 'nın bir yığılma (limit) noktasıdır $\iff \forall \xi < \lambda \exists \mu \in A \xi < \mu < \lambda$.
2. λ , Srs 'nin bir yığılma noktasıdır $\iff \lambda$ bir limit sıra sayısıdır.
3. A , Ω 'da kapalıdır $\iff \lambda \in \Omega$, A 'nın yığılma noktası ise $\lambda \in A$.

Problem 2.11.5 (2.11.4)'ün kanıtını veriniz.

Problem 2.11.6 (2.11.5)'in kanıtını veriniz.

2.12 SONLU ÖTESİ TÜMEVARIM VE TEKRARLI TEOREM

Bu bölümde tüm matematik için son derece önemli sonluötesi tümevarım ilkesini ve onunla ilişkili olarak tekrarlı teoremi, tekrarlı tanımlama ve tekrarlı seçmeyi

öğreneceğiz. Burada verdiğimiz kanıtlar olduğu gibi aksiyomatik kurama aktarılabilceği için onları daha baştan sınıflar için formüle edeceğiz. Bu bölümde kanıtladığımız tüm teoremlerde $\mathbb{U}$ yerine herhangi bir başka sınıf alınabileceğini bölüm (II.3)'teki irdelemelerle görebilirsiniz.

Her n sezgisel doğal sayısı için $\psi(n)$ önermesinin kanıtlamak istediğimizde, savunduğumuz şey $A := \{n \in \mathbb{N} \mid \psi(n)\}$ olmak üzere $A = \mathbb{N}$ olduğudur. Peano aksiyomlarından tümevarım ilkesi yardımıyla şu iki işlemi yapmak yeterlidir:

- **TVI:** $0 \in A$, d.d $\psi(0)$ önermesinin doğru olduğu gösterilir.
- **TVII:** Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $n \in A \implies n + 1 = n' \in A$ olduğu gösterilir, dd. $\psi(n)$ doğru varsayıldığında n' dolaysız ardılı için $\psi(n')$ 'in doğru olduğu kanıtlanır.

Bu iki adımı $(\mathbb{N}, <)$ iyi sıralanmış kümesinin sıralama özellikleri türünden dile getirirsek şu şekli alırlar:

- **TVI:** $\mathbb{N}$ kümesinin en küçük ögesi A kümesindedir.
- **TVII:** Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ ögesi A kümesindeyse n' dolaysız ardılı da A 'dadır.

Şimdi $\mathcal{X} = (X, <)$ iyi sıralanmış sınıfının bir $A \subseteq X$ alt sınıfı verilsin ve biz $A = X$ olduğunu kanıtlamak isteyelim. Bu iki adımı buraya taşırsak aşağıdaki iki adımı elde ederiz:

- **TVI:** X sıralanmış sınıfının en küçük ögesi A 'dadır.
- **TVII:** Herhangi bir $x \in X$ ögesi A 'da ise ve X iyi sıralanmış sınıfının en büyük ögesi değilse³⁵ x' dolaysız ardılı da A 'dadır.

Ancak bunun doğru bir genelleme olmadığını görmek son derece kolaydır. $X = \mathbb{N}$ olsun, ancak

$$0, 1, 3, 5, \dots; 2 \cdot 1, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, \dots; 2^2 \cdot 1, 2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, \dots; 2^3 \cdot 1, 2^3 \cdot 3, 2^3 \cdot 5, \dots$$

olarak iyi sıralansın. $Y_0 := \{0, 1, 3, 5, \dots\}$ ve $n \geq 1$ için $Y_n := X_{2^n}$ altkümesi 2^n limit ögesinin X kümesindeki uzantısı olsun. Her Y_n bu iki koşulu sağlar,

³⁵ $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin en büyük ögesi olmadığı için bu ek koşul orada gereksizdir ama herhangi bir iyi sıralanmış kümeye geçildiğinde en büyük ögesi olabileceğinden bu ek koşul zorunludur.

ancak bu kümeler hem kendi aralarında farklıdırlar hem de $Y_n \neq X! \mathbb{N}$ ve X iyi sıralanmış kümelerdir, fakat aralarında temel bir fark vardır. $\mathbb{N}$ 'de hiç limit öge yokken X kümesinde limit ögeleri vardır: $2, 2^2, 2^3, \dots$. X kümesinde en küçük ögeden yola çıkıp sürekli dolaysız ardıllar alırsak Y_0 kümesinin bütün ögelerine ulaşırız, ancak 2 limit ögesini asla elde edemeyiz. Öyleyse limit ögeleri de verecek bir üçüncü koşula gereksinimiz vardır ve bu aşağıdaki gibidir:

- **TVIII:** $x \in X$ bir limit öge ve ondan önce gelen tüm ögeleri A sınıfındaysa x ögesi de A sınıfındadır.

Gerçekten de bunun yeterli olduğunu göreceğiz. Ancak bu üç koşula eşdeğer ve şimdiye kadar defalarca kullandığımız bir yöntem var: “**En küçük öge çelişkisi yöntemi**”. İyi sıralanmış X sınıfının ögelerine ilişkin $\psi(x)$ önermesi verilsin ve biz bu önermenin tüm X sınıfında doğru, dd. $A := \{x \in X \mid \psi(x)\} = X$ olduğunu kanıtlamak isteyelim. $A \neq X$ olduğunu varsayarak ve buradan bir çelişkiye ulaşırsak kuşkusuz $A = X$ olacaktır. $B := X \setminus A \neq \emptyset$ olsun. X iyi sıralanmış olduğundan B sınıfının bir b en küçük ögesi vardır. Tanım gereği $X_b \subseteq A$ fakat $b \notin A$. Bunu yasaklarsak bir çelişkiye ulaşmış oluruz. İşte iyi sıralanmış sınıflar için **tümevarım koşulumuz**:

$$(TVK) \quad \forall x \in X (X_x \subseteq A \implies x \in A) \quad (2.15)$$

olmalıdır. $X = \emptyset$ için zaten ortada yapacak bir şey yoktur. $X \neq \emptyset$ ve x_0 onun en küçük ögesi ise $X_{x_0} = \emptyset \subseteq A$ olduğundan (TVK)'den $\psi(x_0)$ elde edilir. (TVK), ψ önermesinin X sınıfının en küçük ögesi için doğruluğunu içerir. Yine de bazı yazarlar vurgulamak için $\psi(x_0)$ 'ı ayrıca isterler. Artık teoreminizi yazabiliriz:

Teorem 2.12.1 $(X, <)$ iyi sıralanmış sınıfının A alt sınıfı (TVK)'yi sağlarsa, dd. $\forall x \in X (X_x \subseteq A \implies x \in A)$ ise $A = X$.

Teorem 2.12.2 $(X, <)$ iyi sıralanmış sınıfının A alt sınıfı TVI, TVII ve TVIII koşullarını sağlıyorsa $A = X$.

Kanıt. $A \neq X$ varsayalım ve $B := X \setminus A \neq \emptyset$ olsun. $\exists b := \min B$. Bu b ögesi TVI'den dolayı X sınıfının en küçük ögesi değildir; TVII'den dolayı bir ardıl değildir ve TVIII'den dolayı ise bir limit öge değildir. Bu bir çelişkidir, çünkü iyi sıralanmış bir sınıfın herhangi bir ögesi bu üç tipten birinden olmak zorundadır. ■

Şimdi bu teoremleri iyi sıralanmış $(X, <)$ sınıfının öğelerine ilişkin $\varphi(x)$ önermelerinin kanıtında kullanış biçimleriyle ve ayrıca $(Srs, <)$ için yazalım. Önce φ için tümevarım koşulunu yazalım:

$$(TVK\varphi) \quad \forall x \in X ((\forall y \in X_x \varphi(y)) \implies \varphi(x)). \quad (2.16)$$

Teorem 2.12.3 $(X, <)$ iyi sıralanmış sınıfının öğelerine ilişkin $\varphi(x)$ önermesi $(TVK\varphi)$ 'yi sağlıyorsa $\forall x \in X \varphi(x)$.

Teorem 2.12.4 $(X, <)$ iyi sıralanmış sınıfının öğelerine ilişkin $\varphi(x)$ önermesi verilsin ve aşağıdaki koşullar sağlansın:

1. $\varphi(x)$ önermesi X sınıfının en küçük öğesi için doğru olsun.
2. $\varphi(x)$ doğru ve x öğesi X sınıfının en büyük öğesi değilse $\varphi(x')$ de doğru olsun.
3. x bir limit öge ve her $y \in X_x$ için $\varphi(y)$ doğru ise $\varphi(x)$ de doğru olsun.

Bu koşullarda $\forall x \in X \varphi(x)$.

Teorem 2.12.5 $(Srs, <)$ iyi sıralanmış sınıfının öğelerine ilişkin $\varphi(\alpha)$ önermesi verilsin ve aşağıdaki koşullar sağlansın:

1. $\varphi(0)$ doğru olsun.
2. $\varphi(\alpha)$ doğru ise $\varphi(\alpha')$ de doğru olsun.
3. λ bir limit öge ve her $\alpha < \lambda$ için $\varphi(\alpha)$ doğru ise $\varphi(\lambda)$ da doğru olsun.

Bu koşullarda $\forall \alpha \varphi(\alpha)$.

Doğal sayılara ilişkin verdiğimiz tekrarlı teoremi anımsayalım: Bir $G : \tilde{\mathbb{U}} \longrightarrow \tilde{\mathbb{U}}$ fonksiyonu ve bir $a \in \tilde{\mathbb{U}}$ öğesi verildiğinde $f(0) = a$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n+1) = f(n') = G(f(n))$ olacak biçimde *tek* olarak belirli bir $f : \mathbb{N} \longrightarrow \tilde{\mathbb{U}}$ fonksiyonunun varlığını kanıtlamıştık. Şimdi $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <)$ yerine iyi sıralanmış bir $\mathcal{X} = (X, <)$ sınıfını alalım ve $x_0 := \min X$ olsun. Bu durumda, doğal sayılara ilişkin tekrarlı teoremi genelleştirmek istersek, $F(x_0) = a$ ve her $x \in X$ için

$$(TF)^* \quad F(x') = G(F(x)) \quad (\text{Tekrarlama Formülü})$$

olacak biçimde *tek* olarak belirli bir $F : X \longrightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonunun varlığını kanıtlamayı deneyeceğiz. $\mathcal{X}$ iyi sıralanmış sınıfının limit öğeleri varsa bunların en küçüğü de vardır. $\mathcal{X}$ 'in en küçük limit öğesi y ise $(TF)^*$ koşulu

aranan F fonksiyonunu sadece X_y uzantısında *tek* olarak belirler, ancak X^y sonrasında ise $F(y)$ için herhangi bir koşul verilmediğinden teklik tümüyle kaybolur! Tüm öğeler için koşullar getirmeliyiz. Örneğin y limit noktasında $F(y)$ için bir koşul getirmek gerektiğinde en mantıklısı F fonksiyonu hakkında y 'den *önce* kazanılan tüm bilgileri kullanmaktır; tüm bu bilgiler ise $F|X_y$ kümesinde toplanmıştır. Bu genel durumda tekrarlama formülü için doğal aday

$$(TF) \quad \forall x \in X \ F(x) = G(F|X_x)$$

olmaktadır. Bunun gerçekten iş gördüğünü kanıtlayacağız. *Herhangi bir $G : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonu verildiğinde (TF) 'yi sağlayan tek olarak belirli bir $F : X \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonunun varlığını kanıtlayacağız (Tekrarlı Teorem). Daha genel bir teoremi kanıtlamadan önce basit bir bilgiyi paylaşacağız: Doğrusal sıralanmış bir sınıfın herhangi iki başlangıcı verildiğinde biri diğerinin altkümesidir.* Gerçekten de doğrusal sıralanmış X sınıfında B_1, B_2 başlangıçları veilsinler ve örneğin $\neg(B_2 \subseteq B_1)$ olsun. En az bir $z \in B_2 \setminus B_1$ ögesi vardır. $z < x$ koşulunu sağlayan hiçbir öğe B_1 'de olamaz, aksi halde $z \in B_1$ olurdu! Öyleyse $B_1 \subseteq X_z \subseteq B_2$.

Teorem 2.12.6 Genel Tekrarlı Teorem $\mathcal{X} = (X, <)$ iyi sıralanmış bir sınıf ve $G : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ herhangi bir fonksiyon olsun. Tek olarak belirli bir $F : X \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonu

$$(GTF) \quad \forall x \in X \ F(x) = G(x, F|X_x) \quad (\text{Genel Tekrarlama Formülü})$$

olacak biçimde vardır. Bu F fonksiyonuna **G fonksiyonunun tekrarlama** diyerek ve $F = \mathbf{Tkr}G$ yazacağız.

Kanıt. 1. *Varlık:* $X = \emptyset$ ise savımız doğrudur. Şimdi $X \neq \emptyset$ olsun. $\mathcal{B} := \{B \mid B \text{ bir küme ve } X \text{'te bir başlangıç}\}$ ve H ile tanım kümeleri $\mathcal{B}$ 'de olup (GTF) 'yi sağlayan fonksiyonların sınıfını gösterelim, dd.

$$H := \{f \mid \exists B \in \mathcal{B} (f : B \rightarrow \mathbb{U} \wedge \forall x \in B \ f(x) = G(x, f|B_x))\}$$

olsun. B bir başlangıç olduğundan $x \in B$ için $B_x = X_x$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $f \in H$, $\tan f = B$ ise her $x \in B$ için $f(x) = G(x, f|X_x)$. Önce

$$(*) \quad f_1, f_2 \in H \implies f_1 \subseteq f_2 \vee f_2 \subseteq f_1$$

olduğunu, dd. bu fonksiyonlardan birinin diğerinin bir genişlemesi olduğunu kanıtlayacağız.

$B_k := \tan f_k$, $k = 1, 2$ olsun. Bu iki başlangıçtan biri diğerinin altkümesi olmak zorundadır. Genellikten bir şey kaybetmeden $B_1 \subseteq B_2$ varsayalım. Bu durumda $f_1 = f_2|B_1$ olduğunu savunuyoruz. Aksini varsayalım ve

$$D := \{x \in B_1 \mid f_1(x) \neq f_2(x)\} \neq \emptyset$$

olsun. $d := \min D$ ise bir yandan $f_1(d) \neq f_2(d)$ iken diğer yandan $d \in B_1 \subseteq B_2$ ve $f_1|_{X_d} = f_2|_{X_d}$ olduğundan (GTF) ile

$$f_1(d) = G(d, f_1|_{X_d}) = G(d, f_2|_{X_d}) = f_2(d)$$

elde ederiz. Bir çelişkiye ulaştık.

(*)'dan dolayı $F := \bigcup_{f \in H} f$ bir fonksiyondur ve $\tan F = \bigcup_{f \in H} \tan f$ bir başlangıçtır. Şimdi $\tan F = X$ olduğunu savunuyoruz. $\tan F \subset X$ öz başlangıç olsaydı bir $x \in X$ ögesinin uzantısı, dolayısıyla $\tan F = X_x$ bir küme olacağından F bir küme ve $F \in H$ olurdu. Bu durumda bir yandan $x \notin \tan F$ iken diğer yandan

$$g := F \cup \{(x, G(x, F|_{X_x}))\} \in H$$

olacağından $x \in \tan F$ olurdu ki bu bir çelişkidir! Böylece $\tan F = X$ ve $F : X \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonu (GTF)'yi sağlar.

2. *Teklik*: Şimdi (GTF)'yi sağlayan iki $F_1, F_2 : X \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonu verilsin. $F_1 \neq F_2$ varsayalım.

$$A := \{x \in X \mid F_1(x) \neq F_2(x)\} \neq \emptyset$$

olur. $a := \min A$ olsun. Bir yandan $a \in A$ olduğu için $F_1(a) \neq F_2(a)$, diğer yandan (GTK) ile

$$F_1(a) = G(a, F_1|_{X_a}) = G(a, F_2|_{X_a}) = F_2(a)$$

bir çelişki oluşturlar! ■

Not 2.12.7 F ve G fonksiyonları genel tekrarlı teoremimizdeki gibi ve $x_0 = \min X$ ise $F(x_0) = G(x_0, \emptyset)$ olur. □

Teorem 2.12.8 Tekrarlı Teorem : $\mathcal{X} = (X, <)$ iyi sıralanmış bir sınıf ve $H : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ herhangi bir fonksiyonsa

$$(TF) \quad \forall x \in X \quad F(x) = H(F|_{X_x}) \quad (\text{Tekrarlama Formülü}),$$

olacak biçimde tek olarak belirli bir $F : X \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonu vardır. Bu F fonksiyonuna H **fonksiyonunun tekrarlama**sı denir ve bu durumda $F := Tkr H$ yazacağız.

Kanıt. 1. *Varlık*: $P_2 : \mathbb{U} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonu her $(x, y) \in \mathbb{U} \times \mathbb{U}$ için $P_2(x, y) = y$ ile tanımlanan ikinci izdüşüm fonksiyonu olmak üzere $G := H \circ P_2$ olsun. (2.12.6)'dan $F := Tkr G$ fonksiyonunu elde edelim. (GTF)'den dolayı her $x \in X$ için

$$F(x) = G(x, F|_{X_x}) = H(P_2(x, F|_{X_x})) = H(F|_{X_x})$$

elde edilir. Bu F fonksiyonu (TF)'yi sağlar.

2. *Teklik:* F_1, F_2 (TF)'yi sağlayan iki fonksiyon olsunlar ve $F_1 \neq F_2$, dd.

$$A := \{x \in X \mid F_1(x) \neq F_2(x)\} \neq \emptyset$$

varsayalım. $a := \min A$ için bir yandan $F_1(a) \neq F_2(a)$, diğer yandansa $F_1|_{X_a} = F_2|_{X_a}$ olduğundan (TF) ile

$$F_1(a) = H(F_1|_{X_a}) = H(F_2|_{X_a}) = F_2(a)$$

olur ve bir gelişki elde ederiz. ■

Tekrarlı teoremlerimizin bir de iyi sıralanmış kümelerin üç tip (en küçük, dolaysız ardıl ve limit) öğelerine göre şıklara ayrılmış ve oldukça kullanışlı bir biçimi vardır.

Teorem 2.12.9 Şıklı Tekrarlı Teorem : $(X, <)$ iyi sıralanmış bir sınıf; $H, K : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ iki fonksiyon olsun ve bir $a \in \mathbb{U}$ ögesi verilsin. Her $x \in X$ için

1. $F(x_0) = a, \quad x_0 = \min X,$
2. $F(x') = H(F(x)), \quad x \text{ en büyük öge değil},$
3. $F(x) = K(F|_{X_x}), \quad x \text{ bir limit öge},$

olacak biçimde tek olarak belirli bir $F : X \longrightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonu vardır.

Kanıt. 1. *Varlık:* $\mathcal{F}$ ile $\tan f$ tanım sınıfları X de bir başlangıç ve bir küme olan f fonksiyonların sınıfını gösterelim. Bir $G : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonunu her $f \in \mathbb{U}$ için

$$G(f) = \begin{cases} \emptyset, & f \in \mathbb{U} \setminus \mathcal{F} \\ a & f \in \mathcal{F} \wedge f = \emptyset \\ H(f(y)), & f \in \mathcal{F} \wedge y \in X \wedge \tan f = X_y \cup \{y\} \\ K(f), & f \in \mathcal{F} \wedge \tan f \neq \emptyset \wedge \nexists \max \tan f \end{cases}$$

olacak biçimde tanımlansın. $F = \text{Tr}G$ olsun (bkz. (2.12.8)). Bu fonksiyonun istenen koşulları sağladığını görelim. $x_0 := \min X$ ise $F|_{X_{x_0}} = F|_{\emptyset} = \emptyset$ olduğundan $F(x_0) = G(\emptyset) = a$ olur. Şimdi $x \in X$ ögesi y ögesinin dolaysız ardılı ise, dd. $x = y'$ ise $X_x = X_y \cup \{y\}$ olduğundan tanımlardan

$$F(y') = F(x) = G(F|_{X_x}) = H(F(y)).$$

Şimdi x bir limit ögeyse X_x kümesinin bir maksimal ögesi olmadığından $F(x) = G(F|_{X_x}) = K(F|_{X_x})$ elde edilir.

2. *Teklilik*: F' teoremin koşullarını sağlayan bir başka fonksiyon ve $\varphi(x)$ ise $F(x) = F'(x)$ olsun. $\forall x \varphi(x)$ önermesini (2.11.4) ile kanıtlayalım. i) $F(x_0) = a = F'(x_0)$, ii) $y \in X$ en büyük öge değil ve $F(y) = F'(y)$ ise

$$F(y') = H(F(y)) = H(F'(y)) = F'(y').$$

iii) $x \in X$ bir limit öge ve her $y \in X_x$ için $F(y) = F'(y)$ olsun. Bu durumda $F|X_x = F'|_x$ olacağından

$$F(x) = G(F|X_x) = K(F|X_x) = K(F'|X_x) = F'(x)$$

olur ve işimiz biter. ■

Bu teoremimizdeki F fonksiyonunu **Tkr(a, H, K)** ile gösterelim. $F = TkrG$ ve $F = Tkr(a, H, K)$ fonksiyonları **sonluötesi tekrarlama**yla veya **sonluötesi tümevarım**la tanımlanmışlardır denir. Buradaki G, H, K fonksiyonlarına ise **tanımlayan kurallar** gözü ile bakılır. Son teoremimize aşağıdaki şekil de verilebilir.

Teorem 2.12.10 $(X, <)$ iyi sıralanmış bir sınıf; $H, K : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ iki fonksiyon olsun ve bir $a \in \mathbb{U}$ ögesi verilsin. Her $x \in X$ için

1. $F(x_0) = a, \quad x_0 = \min X$
2. $F(x') = H(F(x)), \quad x \text{ en büyük öge değil}$
3. $F(x) = K(F|X_x), \quad x \text{ bir limit öge}$

olacak biçimde tek olarak belirli bir $F : X \longrightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonu vardır.

Kamıt. $R : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonu $x \in \mathbb{U}$ bir fonksiyonsa $R(x) = resx$ olarak, fonksiyon değilse $R(x) = x$ olarak açıklansın. $K^* := K \circ R$ ve $F = Tkr(a, H, K^*)$ olsun. (2.12.9)'dan dolayı teoremin ilk iki koşulu sağlanır. $x \in X$ bir limit öge ise (2.12.9)'dan dolayı

$$F(x) = K^*(F|X_x) = K(R(F|X_x)) = K(F|X_x)$$

olur. Tekliği kanıtlamayı ödev olarak bırakıyoruz. ■

Not 2.12.11 Bu teoremde olduğu gibi tüm diğer tekrarlı teoremlerde $F|X_x$ yerine $F[X_x]$ alınabileceği benzer biçimde kolayca görülür. □

Bu teoremleri özellikle $(Srs, <)$ sınıfları için veya $(\alpha, \in)$ sıra sayıları için ifade etmesini okuyucuya öneririz. Biz son teoremi $(Srs, <)$ için yazacak ve hemen uygulamalarını vereceğiz. $0 = \min Srs$ ve her $\alpha \in Srs$ için $(Srs)_\alpha = \alpha$ olduğundan (2.12.10), $(Srs, <)$ için aşağıdaki şekli alır:

Teorem 2.12.12 $H, K : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ iki fonksiyon olsun ve bir $a \in \mathbb{U}$ ögesi verilsin. Her $\alpha \in Srs$ için

- i) $F(0) = a$
- ii) $F(\alpha') = H(F(\alpha))$
- iii) $F(\alpha) = K(F[\alpha])$, α bir limit öge

olacak biçimde tek olarak belirli bir $F : Srs \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonu vardır. Eğer ayrıca $a \in Srs$ ise $F : Srs \rightarrow Srs$ 'dir.

Tanım 2.12.13 Son teoremimizde özel olarak $K = \bigcup$ ise $F = Tkr(a, H, \bigcup)$ fonksiyonuna H fonksiyonunun a başlangıçlı **tekrarı** veya **iterasyonu** denir ve her $\xi \in Srs$ için $H^\xi(a) := F(\xi)$ da yazılır. Bu durumda $H^\xi(a)$ 'ya a 'nın H altında ξ . **tekrarı** diyelim.

Bu tanım geleneksel matematikte sıkça karşılaştığımız bir durumun genellemesidir. A bir küme, $a \in A$ ve $f : A \rightarrow A$ bir fonksiyonsa, tekrarlı teoremle her n doğal sayısı için f^n fonksiyonlarının $f^0 = I_A$ ve $f^{n+1} = f \circ f^n$ olacak biçimde var olduğunu biliyoruz. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n := f^n(a)$ olarak tanımlarsak $a_0 = a$ ve $a_{n+1} = f^{n+1}(a) = f(f^n(a)) = f(a_n)$ olur. Böylece aynı zamanda a ögesinin f fonksiyonu altındaki A kümesindeki

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

izi oluşturulur. Geleneksel matematikte tüm doğal sayılarımızı böylece kullanmış oluruz. Ancak Cantor Kümeler Kuramında her sıra sayısı bir anlamda doğal sayıdır. Burada yaptığımız yine aynı işlemdir: Bu kez $a \in \mathbb{U}$ ögesinin H fonksiyonu altında $\mathbb{U}$ evrenindeki

$$\{H^\xi(a) \mid \xi \in Srs\} = \{a, H(a), H(H(a)), \dots, H^\xi(a), \dots\}$$

izi oluşturulur.

Bizi daha çok başlangıcın bir α sıra sayısı ve $H : Srs \rightarrow Srs$ olduğu durumlar ilgilendirecektir. Bu durumda bir yandan

$$F = Tkr(a, H, \sup) : Srs \rightarrow Srs$$

olurken $\bigcup$ fonksiyonu Srs 'de $\sup$ ile örtüşür. Bu durumda $F = Tkr(a, H, \sup)$ yazacağız. Bu durumda H fonksiyonu ne olursa olsun tanım gereği $F = Tkr(a, H, \sup)$ tekrarı süreklidir. Her $\xi \in Srs$ için $\alpha_\xi := H^\xi(a)$ olarak tanımlarsak bu dizi

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots; \alpha_\omega = \sup_{n < \omega} \alpha_n, \alpha_{\omega+1}, \alpha_{\omega+2}, \dots$$

şeklindedir.

Önerme 2.12.14 $H : Srs \rightarrow Srs$ ve her ξ için $\xi < H(\xi)$ ise her α sıra sayısı için $F := Tkr(a, H, \sup)$ tekrarı normaldir.

Kanıt. Her ξ için $F(\xi) < H(F(\xi)) = F(\xi + 1)$ olduğundan (2.11.8) ile F normaldir. ■

Sabit Nokta Teoremi'ni yeni kavramlar ışığında şöyle de dile getirebiliriz.

Teorem 2.12.15 $F : Srs \rightarrow Srs$ normal bir fonksiyonsa her α için α 'nın F altındaki ω . tekrarı $F^\omega(\alpha)$ bu fonksiyonun bir sabit noktasıdır, ayrıca $\beta \geq \alpha$ koşulunu sağlayan sabit noktaların en küçüğüdür.

Kanıt. Daha önce $F^\omega(\alpha)$ 'nın sabit nokta olduğunu kanıtladık. Şimdi $\alpha \leq \beta$ ve β da bir sabit nokta olsun. Normal fonksiyonlar kesin artan olduklarından her $n < \omega$ için $F^n(\alpha) \leq F^n(\beta) = \beta$, dolayısıyla $F^\omega(\alpha) \leq F^\omega(\beta) = \beta$ olur. ■

Şimdi daha önce de söz verdiğimiz gibi tekrarlı seçme teoermini en çok kullandığımız biçimiyle kanıtlayalım.

Teorem 2.12.16 Tekrarlı Seçme Teoremi . $(X, <)$ iyi sıralanmış bir küme, $x_0 = \min X$, $A \neq \emptyset$ boştan farklı bir küme ve $a \in A$ olsun. Bir $F : X \rightarrow A$ fonksiyonu $F(x_0) = a$, $x \neq \max A$ ve $\{F(\xi) \mid \xi < x'\} \subset A$ ise $F(x') \in A \setminus \{F(\xi) \mid \xi < x'\}$ olacak biçimde vardır.

Kanıt. (2.12.8)'i uygulayacağız, ancak (2.12.11)'de belirttiğimiz gibi bu kez bu teoremden $F|X_x$ yerine $F[X_x]$ alacağız. $c \in \mathbb{U} \setminus A$ olmak üzere keyfi seçilsin. $s : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A$ bir seçen fonksiyon olsun. Genellikten bir şey kaybetmeden $s(A) = a$ alabiliriz. Bir $H : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonunu her $x \in \mathbb{U}$ için

$$H(x) := \begin{cases} s(A \setminus x) & , x \subset A \\ c & , \neg(x \subset A) \end{cases}$$

olarak açıklansın. (2.12.8)'den dolayı tek olarak belirli bir $F : X \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonu her $x \in X$ için

$$F(x) = H(F[X_x])$$

olacak biçimde vardır. Bu F işimizi görür. Gerçekten de

$$F(x_0) = H(F[X_{x_0}]) = H(\emptyset) = s(A) = a$$

ve bir x için $x \neq \max X$ ve $\{F(\xi) \mid \xi < x'\} \subset A$ ise

$$F(x') = H(F[X_{x'}]) = H(\{F(\xi) \mid \xi < x'\}) = s(A \setminus \{F(\xi) \mid \xi < x'\})$$

dd. $F(x') \in A \setminus \{F(\xi) \mid \xi < x'\}$ olur. ■

Sonuç 2.12.17 A bir sonsuz küme $a \in A$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \in A$ öğeleri $a_0 = a$ ve $a_{n+1} \in A \setminus \{a_0, \dots, a_n\}$ olacak biçimde seçilebilirler.

Kanıt. (2.12.16)'te $(X, <)$ olarak $(\mathbb{N}, <)$ alalım. F bu teoremin verdiği fonksiyon olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $n' \in \mathbb{N}$ ve $\{F(m) \mid m < n'\}$ sonlu, dolayısıyla $\mathbb{N}$ kümesinin öz altkümeleri olduğundan $F(n') \in \mathbb{N}$ olur. $a_n := F(n)$ alırsak bu a_n öğeleri işimizi görür. ■

Not 2.12.18 Sonuçtaki F fonksiyonu gerçekte $F : \mathbb{N} \rightarrow A$ olan bir fonksiyondur. Ayrıca bu F birebirdir. Tekrarlı seçme teoreminde genelde $(X, <)$ iyi sıralanmış kümesi olarak $\mathbb{N}$ veya herhangi bir α sıra sayısı alınır. Eğer $\aleph_\alpha < \aleph_A$ ise (2.12.16)'teki $F : \alpha \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonunun gerçekte $F : \alpha \rightarrow A$ olduğunu görmek çok kolaydır. Bu durumda her $\xi \in \alpha$ için $a_\xi := F(\xi) \in A$ olmak üzere

$$a_0 = a$$

$$\forall \beta \in \alpha (a_\beta \in A \setminus \{a_\xi \mid \xi < \beta\})$$

olur. Aynı şeyin α bir çokluk sayısı ve $\alpha \leq \aleph_A$ olduğunda da doğru olduğunu görmek, çokluk sayılarını öğrendikten sonra çok kolay olacaktır. (II.14)'te Seçme Aksiyomunun İyi Sıralama Teoremi'ne denk olduğunu kanıtlayacağız. O zaman işimiz çok kolaylaşır. A kümesini $<$ ile iyi sıralayalım ve $\alpha := srs(A, <)$ olsun. Bu iyi sıralamada en küçük öğe a değilse en küçük öğeyle a öğesinin yerini değiştirerek en küçük öğesi a olan yeni bir iyi sıralamaya geçebiliriz. Bu durumda $g : \alpha \rightarrow A$ fonksiyonu $(A, <)$ 'nin sayan fonksiyonunun tersi olmak üzere her $\xi \in \alpha$ için $a_\xi := g(\xi)$ ile açıklanan öğeler $a_0 = a$ ve her $\beta \in \alpha$ için $a_\beta \in A \setminus \{a_\xi \mid \xi < \beta\}$ koşulunu sağlar. □

Önemli Not: Tekrarlı teoremlerimizden herhangi birini, örneğin Teorem 2.12.8'i alalım. $\min X = x_0$ olsun. Her $x \in X$ için $a_x := F(x)$ diyelim ve $a := H(\emptyset)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir:

1. $a_{x_0} = a$.
2. Her $x \in X$ için $a_x = H(F|X_x)$.

Genel olarak sonluötesi tümevarımla tanımdan tekrarlı teoremlere girmeden söz edilir. Örneğin bize en küçük öğesi x_0 olan iyi sıralı bir $(X, <)$ kümesi verilmiştir. Biz her $x \in X$ öğesine *tek* olarak belirli bir a_x öğesi karşılık getirmek istiyoruz. Bu arada bir yandan a_{x_0} öğesinin baştan belirlediğimiz bir a öğesi olmasını isterken a_x öğesini ise $\{a_y \mid y < x\}$ kümesinin öğeleri yardımıyla baştan seçtiğimiz bir K kuralı ile belirlenmesini arzu ediyoruz. Söylenen şudur: Her $x \in X$ için a_x öğesi sonluötesi tümevarımla aşağıdaki gibi tanımlansınlar:

1. $a_{x_0} := a$.
2. Her $y < x$ için a_x tanımlanmışsa $a_x := K(\dots, a_y, \dots)$, $y < x$.

Bu yaklaşımın aslında a_x nesnelerinin varlık sorununu atladığını artık biliyoruz. Daha önce defalarca yaptığımız gibi böyle bir tanımla herhangi bir tekrarlı teoremin yukarıda bahsettiğimiz türden bir uygulamasına dönüştürmek gerekir. K kuralı için seçeceğimiz H fonksiyonunu bulmak, veya hangi

tekrarlı teoremi kullanacağımızı belirlemek bazan hiçte kolay değildir. Daha önce de belirttiğimiz gibi kümeler kuramının temel kavramlarını tanımlarken titiz davranıp tekrarlı teoremleri uygulayacak ve her defasında hangi fonksiyonları kullandığımızı belirteceğiz. Ancak bazı yerlerde biz de genel yaklaşıma uyarak, örneğin Teorem 2.12.12'nin kullanılması gereken bir durumda aşağıdaki söylemi kullanacağız: $a \in \mathbb{U}$ ve K_1, K_2 kuralları verilsin. “Her $\alpha \in Srs$ için c_α nesneleri sonluötesi tümevarımla

1. $c_0 := a$,
2. $c_{\alpha+1} := K_1(c_\alpha)$,
3. $\lambda \in Lim$ için $c_\lambda := K_2(\dots, c_\xi, \dots)$, $\xi < \lambda$,

olarak tanımlansınlar” diyeceğiz. Veya biraz daha titiz davranıp “Her $\alpha \in Srs$ için tek olarak belirli c_α nesneleri

1. $c_0 = a$,
2. $c_{\alpha+1} = K_1(c_\alpha)$,
3. $\lambda \in Lim$ için $c_\lambda = K_2(\dots, c_\xi, \dots)$, $\xi < \lambda$,

olacak biçimde vardır” diyeceğiz. Her iki söylemde de bilmemiz gereken aslında bizim verdiklerimizden veya vermediklerimizden bir tekrarlı teoremin devrede olduğudur.

2.13 SIRASAL ARİTMETİK

Daha önce sezgisel destekli açıkladığımız sıralanmış kümeler arasında açıklanan toplama ve çarpma işlemlerini bu bölümde Srs sınıfında sonluötesi tekrarlı tanımlamayla vereceğiz. Bu Aksiyomatik Kümeler Kuramında izleyeceğimiz yoldur. Ayrıca sıra sayıları arasında üs kavramının da açıklayacağız. Amaç temel kavramları vermek, daha önce de değindiğimiz benzerlikler yanında farkları da bir kez daha vurgulamaktır.

Srs 'de Toplama: $\alpha \in Srs$ keyfi verilsin. $H, K : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonları $H(x) := x' = x \cup \{x\}$ ve $K(x) := \bigcup x$ olarak seçilsin. Herhangi bir λ sıra sayısı için $\lambda = \{\beta \mid \beta < \lambda\}$ olduğunu anımsarsak (2.12.12)'den dolayı *tek* olarak belirli bir $T_\alpha = Tkr(\alpha, H, K) : Srs \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağlayacak biçimde varlığını elde ederiz:

1. $T_\alpha(0) = \alpha$.
2. $T_\alpha(\beta') = (T_\alpha(\beta))'$, dd. $T_\alpha(\beta + 1) = T_\alpha(\beta) + 1$.
3. $T_\alpha(\lambda) = \bigcup_{\beta < \lambda} T_\alpha(\beta) = \sup\{T_\alpha(\beta) \mid \beta < \lambda\}$, $\lambda \in Lim$.

$T_\alpha : Srs \rightarrow Srs$ olduğu ve bu fonksiyonun ardıl fonksiyonun α başlangıçlı tekrarı olduğu apaçıktır. Bir anlamda toplama tekrar tekrar 1 eklemektir. Diğer yandan daha önce (II.9)'da sıra sayıları arasında bir toplama

işlemi tanımlamıştık. Bu toplama yardımıyla $F_\alpha(\beta) := \alpha + \beta$ ile tanımlanan $F_\alpha : Srs \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonu da bu üç özelliği sağlar, başka sözlerle bu üç özellik T_α yerine F_α yazdığımızda da doğru kalırlar. T_α fonksiyonun tekliğinden dolayı $T_\alpha = F_\alpha$, dolayısıyla $T_\alpha(\beta) = \alpha + \beta$ olur.

Aslında (II.11)'de F_α fonksiyonun normal olduğunu göstermiştik. Ancak T_α fonksiyonunun normal olduğu doğrudan yukarıdaki tanımından da görülebilir: Üçüncü özellikten dolayı süreklidir, ikinci özellik ve (2.11.8)'den ise hemen T_α fonksiyonunun normal olduğu elde edilir.

Srs 'de Çarpma: $\alpha \in Srs$ keyfi verilsin. $H_\alpha, K : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonları her $x \in \mathbb{U}$ için $K(x) := \bigcup x, x \in Srs$ ise $H_\alpha(x) = x + \alpha, x \in \mathbb{U} \setminus Srs$ ise herhangi bir biçimde, örneğin $H_\alpha(x) = \{1\}$ olarak açıklansın. $H_\alpha[Srs] \subseteq Srs$ olduğunu belirtelim. $P_\alpha := Tkr(0, H_\alpha, K) : Srs \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonu (2.12.12)'dan kazandığımız fonksiyon olsun. Her $\beta \in Srs$ için $P_\alpha(\beta) \in Srs$ olduğu tümevarımla kolayca görülür. Bu fonksiyon aşağıdaki koşullarla tek olarak belirlidir:

1. $P_\alpha(0) = 0$.
2. $P_\alpha(\beta + 1) = H_\alpha(P_\alpha(\beta)) = P_\alpha(\beta) + \alpha$.
3. $P_\alpha(\lambda) = \bigcup_{\beta < \lambda} P_\alpha(\beta) = \sup\{P_\alpha(\beta) \mid \beta < \lambda\}, \lambda \in Lim$.

Elbette P_α fonksiyonu H_α fonksiyonunun 0 başlangıçlı tekrarından başka bir şey değildir. Bir anlamda α ile çarpma tekrar tekrar α eklemektir. Daha önce (II.9)'da sıra sayıları arasında bir çarpma açıklamıştık. Bu çarpma yardımıyla her $\beta \in Srs$ için $G_\alpha(\beta) := \alpha\beta$ ile tanımladığımız $G_\alpha : Srs \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonunun bu üç özelliği sağladığını kanıtlamıştık. (2.12.12)'den dolayı $P_\alpha = F_\alpha$ olmak zorundadır. Bu nedenle $P_\alpha(\beta)$ yerine $\alpha \cdot \beta$ veya daha yalın olarak $\alpha\beta$ yazacağız. $P_\alpha = F_\alpha$ fonksiyonunun $\alpha \neq 0$ için normal olduğunu (II.11)'de kanıtlamıştık. Bu doğrudan tanım ve (2.11.8)'den de görülebilir.

Srs 'de Üs: $\alpha \in Srs$ keyfi verilsin. $G_\alpha, K : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonları her $x \in \mathbb{U}$ için $K(x) := \bigcup x, x \in Srs$ ise $G_\alpha(x) = x\alpha, x \in \mathbb{U} \setminus Srs$ ise herhangi bir biçimde, örneğin $G_\alpha(x) = \{1\}$ olarak açıklansın. $G_\alpha[Srs] \subseteq Srs$ olduğunu belirtelim. $E_\alpha := Tkr(1, G_\alpha, K) : Srs \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonu (2.12.12)'den kazandığımız fonksiyon olsun. Her $\beta \in Srs$ için $E_\alpha(\beta) \in Srs$ olduğu kolayca görülür. Bu fonksiyon aşağıdaki koşullarla tek olarak belirlidir:

1. $E_\alpha(0) = 1$.
2. $E_\alpha(\beta + 1) = G_\alpha(E_\alpha(\beta)) = E_\alpha(\beta)\alpha$.
3. $E_\alpha(\lambda) = \bigcup_{\beta < \lambda} E_\alpha(\beta) = \sup\{E_\alpha(\beta) \mid \beta < \lambda\}, \lambda \in Lim$.

$E_\alpha(\beta)$ yerine α^β yazacağız. E_α fonksiyonu G_α fonksiyonunun 1 başlangıçlı tekrarıdır. α tabanına göre üs almak tekrar tekrar α ile çarpmak demektir. Elbette E_α fonksiyonu da $\alpha \geq 2$ için normaldir. Bu üç fonksiyonun, alışıldık gösterimleriyle, genelde karşılaştığımız tekrarlı tanımlayan özelliklerini bir arada verelim:

$\forall \alpha, \beta \in Srs$ ve $\lambda \in Lim$ için

<u>Toplama</u>	<u>Çarpma</u>	<u>Üs</u>
$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha 0 = 0$	$\alpha^0 = 1$
$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$	$\alpha(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha$	$\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \alpha$
$\alpha + \lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} (\alpha + \beta)$	$\alpha\lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} \alpha\beta$	$\alpha^\lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} \alpha^\beta$

Not 2.13.1 Sırasal aritmetik için her bir T_α , P_α , E_α fonksiyonunun yukarıda verilmiş üç özelliğini bilmek yeterlidir. Nitekim Aksiyomatik Küme-ler Kuramında böyle yapacağız. (II.9)'da toplam ve çarpım için verdiğimiz tanımları kullanarak elde ettiğimiz tüm sonuçlar o tanımlara başvurmadan bu özelliklerden kazanılacaklardır. $\square$

Sıralı sayılarda açıkladığımız bu işlemler doğal sayılardaki aritmetiğin bazı özelliklerine sahipken bazılarını kaybederler. Örneğin (II.9)'da toplama ve çarpmanın değişimli olmadığını ve daha başka sapmaları da öğrenmiştik. Orada apaçık olan ve fotoğraflarını verdiğimiz sonuçlar, o bilgiler hiç kullanılmadan doğrudan yukarıdaki tanımlardan kazanılabilirler. Birkaç örnek verelim.

Örnek 2.13.2 ω bir limit öge ve ω 'da toplama, çarpma ve dolayısıyla üs bildik işlemlerle örtüştüğünden her $m \in \omega$ için

$$m + \omega = \bigcup_{n < \omega} (m + n) = \sup\{m + n \mid n < \omega\} = \omega.$$

$m \geq 1$ için $\omega < \omega + m$ olduğundan $m + \omega \neq \omega + m$. Ayrıca buradan sağdan kısaltma yapamayacağımızı da öğreniriz: Örneğin $3 + \omega = 5 + \omega \neq 3 = 5$. $\square$

Örnek 2.13.3 Her $0 \neq m \in \omega$ için $m\omega = \sup\{mn \mid n < \omega\} = \omega$, ancak

$$\begin{aligned} \omega 1 &= \omega 0' = \omega(0 + 1) \stackrel{def}{=} \omega 0 + \omega \stackrel{def}{=} 0 + \omega = \omega \\ \omega 2 &= \omega 1' \stackrel{def}{=} \omega 1 + \omega = \omega + \omega. \end{aligned}$$

Tümevarımla her $m \geq 1$ doğal sayısı için

$$\omega m = \underbrace{\omega + \cdots + \omega}_{m \text{ kez}}$$

olduğunu kolayca gösterebilirsiniz. Her $m, n \geq 1$ doğal sayıları için $m\omega = n\omega$. Dolayısıyla çarpmada da sağdan kısaltma yapamayız. Diğer yandan $m \geq 2$ için $m\omega = \omega < \omega m$ olduğundan çarpma işlemi değişmeli değildir. $m < n$ ise $\omega m < \omega n$. $\square$

Örnek 2.13.4 Her $m > 1$ doğal sayısı için

$$m^\omega = \sup\{m^n \mid n < \omega\} = \omega, \text{ özellikle } 2^\omega = \omega.$$

Oysa ki biz çokluk sayılarına ilişkin üsler için $!2^\omega = \mathfrak{c}$ olduğunu biliyoruz. $(2 \cdot 2)^\omega = \omega < \omega\omega = 2^\omega 2^\omega$. Dolayısıyla genelde $(\alpha\beta)^\lambda = \alpha^\lambda \beta^\lambda$ doğru değildir. Çarpma işlemi değişmeli olmadığından $(\alpha\beta)^2 = (\alpha\beta)(\alpha\beta) = \alpha\beta\alpha\beta$ genelde $\alpha\alpha\beta\beta$ 'dan farklıdır. $\square$

Örnek 2.13.5

$$(\omega + 1)2 = (\omega + 1) + (\omega + 1) = \omega + (1 + \omega) + 1 = \omega + \omega + 1 = \omega 2 + 1.$$

$$\forall n \in \omega \ (\omega + 1)n = \omega n + 1 \text{ (ödev. Tümevarım!).}$$

$$(\omega + 1)\omega \stackrel{def}{=} \bigcup_{n < \omega} (\omega + 1)n = \bigcup_{n < \omega} (\omega n + 1) = \bigcup_{n < \omega} \omega n \stackrel{def}{=} \omega\omega.$$

$$(\omega + 1)^2 = (\omega + 1)(\omega + 1) \stackrel{def}{=} (\omega + 1)\omega + \omega + 1 = \omega\omega + \omega + 1.$$

$$(2(\omega + 1))^2 \stackrel{def}{=} (2\omega + 2)^2 = (\omega + 2)^2.$$

Yukarıdaki örnekler ışığında bozulan bazı kuralları karşı örnekleriyle listeleyelim:

<u>Bozulan kurallar</u>	<u>Karşı örnekler</u>
$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$	$1 + \omega \neq \omega + 1.$
$\alpha\beta = \beta\alpha.$	$2\omega \neq \omega 2.$
$(\alpha + \beta)\lambda = \alpha\lambda + \beta\lambda.$	$(1 + 1)\omega \neq 1\omega + 1\omega.$
$(\alpha\beta)^\lambda = \alpha^\lambda \beta^\lambda.$	$(2 \cdot 2)^\omega \neq 2^\omega 2^\omega.$
$\alpha + \gamma = \beta + \gamma \implies \alpha = \beta.$	$3 + \omega = 5 + \omega \nRightarrow 3 = 5.$
$\alpha\gamma = \beta\gamma \implies \alpha = \beta.$	$3\omega = 5\omega \nRightarrow 3 = 5.$

Daha önce (2.2.11)'de üst sınırlardan ve öz üst sınırlardan yola çıkarak supremum ve öz supremum tanımını vermiştik. Yine buna benzer biçimde $f : \lambda \longrightarrow Srs$ için iki *farklı* supremum söz konusudur.

$$\sup_{\xi < \lambda} f(\xi) = \sup f[\lambda] = \bigcup_{\xi < \lambda} f(\xi) \ (\leq \text{supremumu}).$$

$$\sup_{\xi < \lambda}^+ f(\xi) = \bigcup_{\xi < \lambda} (f(\xi) + 1) \ (< \text{supremumu, özsupremum}).$$

Eğer $\neg \exists \max\{f(\xi) \mid \xi < \lambda\}$, o zaman $\sup_{\xi < \lambda} f(\xi) = \sup_{\xi < \lambda}^+ f(\xi)$.

Önerme 2.13.6 λ bir limit öge ve $f : \lambda \rightarrow Srs$ yapısal, dd. kesin artan ve $\alpha := \sup_{\xi < \lambda} f(\xi)$ olsun. O zaman

$$\alpha \in Lim \wedge \alpha = \sup_{\xi < \lambda}^+ f(\xi).$$

Kanıt. Her şeyden önce $\alpha \neq 0$. Supremumun tanımından

$$\beta < \alpha \implies \exists \xi < \lambda \beta \leq f(\xi) \leq \alpha,$$

buradan da $\xi + 1 < \lambda$ ile

$$\beta \leq f(\xi) \leq f(\xi + 1) \leq \alpha \implies \beta + 1 \leq f(\xi) < \alpha.$$

Sonuçta $\beta < \alpha \implies \beta + 1 < \alpha$ elde ederiz ki bu α 'nın bir limit öge olması demektir.

Diğer yandan her $<$ üst sınırı aynı zamanda bir $\leq$ üst sınırı olduğundan elbette $\sup \leq \sup^+$. λ bir limit öge olduğundansa $\xi < \lambda$ ise $\xi + 1 < \lambda$ ve $f(\xi) < f(\xi + 1)$ olduğundan $f(\xi) + 1 \leq f(\xi + 1)$ olur ve bu bize $\sup^+ \leq \sup$ eşitsizliğini verir. ■

λ bir limit sıra sayısı ve $g : \lambda \rightarrow Srs$ kesin artan bir λ dizisi olsun. $\alpha_\xi := g(\xi)$ ve $\alpha := \lim_{\xi < \lambda} \alpha_\xi = \sup_{\xi < \lambda} g(\xi)$ olsun. Bu verilerle, topolojik açıdan apaçık ortada olan, daha önce ödev olarak bıraktığımız aşağıdaki önermeyi topolojiyle henüz tanışmamışlar için kanıtlayacağız.

Önerme 2.13.7 $F : Srs \rightarrow Srs$ bir normal fonksiyonsa

$$F(\alpha) = F(\lim_{\xi < \lambda} \alpha_\xi) = \lim_{\xi < \lambda} F(\alpha_\xi).$$

Kanıt. Bir önceki önermeden $\alpha \in Lim$. F normal olduğundan $F(\alpha) = \sup_{\beta < \alpha} F(\beta)$. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \gamma < F(\alpha) &\iff \exists \beta < \alpha \gamma < F(\beta) \\ \gamma < F(\alpha) &\iff \exists \beta < \alpha \exists \xi < \lambda \gamma < F(\beta) \wedge \beta < F(g(\xi)) \\ &\implies \exists \xi < \lambda \gamma < F(g(\xi)) \\ &\implies \gamma < \sup_{\xi < \lambda} F(g(\xi)) = \sup_{\xi < \lambda} F(\alpha_\xi) \end{aligned}$$

Böylece $F(\alpha) \leq \sup_{\xi < \lambda} F(g(\xi))$.

Diğer yandan $\xi < \alpha$ için $g(\xi) < \alpha$ ve F kesin artan olduğundan $F(g(\xi)) < F(\alpha)$. Dolayısıyla $\sup_{\xi < \lambda} F(g(\xi)) \leq F(\alpha)$. Sonuçta $F(\alpha) = \sup_{\xi < \lambda} F(g(\xi))$.

■

Teorem 2.13.8 Her $\alpha, \beta, \gamma \in Srs$ için

1. $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$, $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.
2. $\alpha 1 = 1\alpha = \alpha$, $\alpha 0 = 0\alpha = \alpha$, $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.
3. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.
4. $\alpha^\beta \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$, $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$, $0^0 = 1$, $\beta > 0$ ise $0^\beta = 0$, ve $1^\gamma = 1$.

Kanıt. Çoğu sonluötesi tümevarımla kanıtlanacak olan bu savlardan, örnek oluşturmak amacıyla sadece (a) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ ve (b) $\alpha^{\beta+\lambda} = \alpha^\beta \alpha^\lambda$ önermeleri γ üzerinden tümevarımla kanıtlanacaktır.

(a) α, β sıra sayıları sabit tutulsun ve savımızı $\varphi(\gamma)$ ile gösterelim.

i) $\gamma = 0$ için: $\alpha + (\beta + 0) = \alpha + \beta = (\alpha + \beta) + 0$ olduğundan $\varphi(0)$ doğrudur.

ii) $\varphi(\gamma)$ doğru olsun (tvk)

$$\begin{aligned} \alpha + (\beta + (\gamma + 1)) &\stackrel{def}{=} \alpha + ((\beta + \gamma) + 1) \stackrel{def}{=} (\alpha + (\beta + \gamma)) + 1 \\ &\stackrel{tvk}{=} ((\alpha + \beta) + \gamma) + 1 \stackrel{def}{=} (\alpha + \beta) + (\gamma + 1). \end{aligned}$$

iii) γ bir limit öge ve sav her $\lambda < \gamma$ için doğru olsun (tvk).

$$\begin{aligned} \alpha + (\beta + \gamma) &\stackrel{def}{=} \alpha + \bigcup_{\lambda < \gamma} (\beta + \lambda) = \bigcup_{\lambda < \gamma} \alpha + (\beta + \lambda) \\ &\stackrel{tvk}{=} \bigcup_{\lambda < \gamma} (\alpha + \beta) + \lambda \stackrel{def}{=} (\alpha + \beta) + \gamma. \end{aligned}$$

(b) Şimdi γ üzerinden sonluötesi tümevarımla $\alpha > 0$ için $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma$ olduğunu gösterelim.

i) $\gamma = 0$ için $\alpha^{\beta+0} = \alpha^\beta = \alpha^\beta 1 = \alpha^\beta \alpha^0$.

ii) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma$ olsun.

$$\alpha^{\beta+(\gamma+1)} = \alpha^{(\beta+\gamma)+1} \stackrel{def}{=} \alpha^{\beta+\gamma} \alpha \stackrel{tvk}{=} \alpha^\beta \alpha^\gamma \alpha \stackrel{def}{=} \alpha^\beta \alpha^{\gamma+1}.$$

iii) λ bir limit sıra sayısı olsun ve $tvk(\lambda)$ sağlansın, dd. $\forall \xi < \lambda (\alpha^{\beta+\xi} = \alpha^\beta \alpha^\xi)$ olsun. $\beta + \lambda$ da bir limit ögedir ve $\sigma \rightsquigarrow \alpha^\sigma$ fonksiyonun normal olduğunu da gözetirsek

$$\alpha^{\beta+\lambda} = \bigcup_{\rho < \beta+\lambda} \alpha^\rho = \bigcup_{\xi < \lambda} \alpha^{\beta+\xi} \stackrel{tvk(\lambda)}{=} \bigcup_{\xi < \lambda} \alpha^\beta \alpha^\xi = \alpha^\beta \alpha^\lambda,$$

olur. Son eşitlikte $G(\nu) = \alpha^\beta \nu$ normal fonksiyonuna ve $(\alpha^\xi)_{\xi < \lambda}$ dizisine Teorem 2.13.7 uygulanmıştır. ■

Her yapısal dönüşüm kolayca görüleceği gibi birebirdir. Gerçekten de doğrusal sıralanmış kümeler arasındaki $F : (X, <_X) \longrightarrow (Y, <_Y)$ fonksiyonu yapılsalsa, $a, b \in X$ ve $a \neq b$ ise $a < b \vee b < a$, dolayısıyla $F(a) < F(b) \vee F(b) < F(a)$ olur. Buradan da $F(a) \neq F(b)$ elde edilir. Elbette F birebir ve yapısal olduğundan $F(a) < F(b) \implies a < b$. Böylece

$$F(a) = F(b) \iff a = b \text{ ve } F(a) < F(b) \iff a < b.$$

Bu özellikleri $T_\alpha, P_\alpha(\alpha \neq 0)$ ve $E_\alpha(\alpha \geq 2)$ için alışıldık gösterimlerle yazarsak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 2.13.9 Her $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in Srs$ için

1. $\alpha + \beta = \alpha + \gamma \iff \beta = \gamma$ ve $\alpha + \beta < \alpha + \gamma \iff \beta < \gamma$.
2. $\alpha \neq 0$ için $\alpha\beta = \alpha\gamma \iff \beta = \gamma$ ve $\alpha\beta < \alpha\gamma \iff \beta < \gamma$.
3. $\alpha \geq 2$ için $\alpha^\beta = \alpha^\gamma \iff \beta = \gamma$ ve $\alpha^\beta < \alpha^\gamma \iff \beta < \gamma$.

Önerme 2.13.10 Sıra sayıları için aşağıdaki zayıf monotonluklar geçerlidir:

1. $\alpha \leq \beta \implies \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.
2. $\alpha \leq \beta \implies \alpha\gamma \leq \beta\gamma$.
3. $\alpha \leq \beta \implies \alpha^\gamma \leq \beta^\gamma$.
4. $1 < \beta \implies \alpha \leq \beta^\alpha$.

Kanıt. Ödev. ■

Not 2.13.11 Sabit nokta teoremini $T_\alpha, P_\alpha(\alpha \neq 0)$ ve $E_\alpha(\alpha > 1)$ normal fonksiyonları için yazalım: α, β sıra sayıları nasıl verilirlerse verilsinler $\xi, \eta, \lambda \geq \beta$ sıra sayıları

$$\alpha + \xi = \xi, \alpha \neq 0 \text{ ise } \alpha\eta = \eta, \text{ ve } \alpha > 1 \text{ ise } \alpha^\lambda = \lambda$$

olacak biçimde bulunabilir. Bu sonuçlar $\mathbb{N}$ 'deki aritmetiğin çok uzağındadır. Teoremimizin kanıtını izleyerek böyle bir ξ sıra sayısını toplam için bulalım:

$$\begin{aligned} \xi_0 &:= \beta, \\ \xi_1 &:= T_\alpha(\xi_0) = \alpha + \xi_0 = \alpha + \beta, \\ \xi_2 &:= T_\alpha(\xi_1) = \alpha + \alpha + \beta = \alpha^2 + \beta \\ &\vdots \\ \xi_n &= \alpha + \cdots + \alpha + \beta = \alpha n + \beta, \\ &\vdots \\ \xi &:= \lim_{n < \omega} \xi_n = \alpha\omega + \beta \end{aligned}$$

olur. Gerçekten de

$$\alpha + \xi = \alpha + \alpha\omega + \beta = \alpha(1 + \omega) + \beta = \alpha\omega + \beta = \xi.$$

Çarpma işlemi için bu işlemi uygularsak $\eta = \alpha^\omega\beta$ sayısını elde ederiz ve gerçekten de $\alpha\eta = \alpha\alpha^\omega\beta = \alpha^{1+\omega}\beta = \alpha^\omega\beta = \eta$. $\square$

$F : Srs \longrightarrow Srs$ bir normal fonksiyon olsun. α keyfi verilsin. $\beta_\sigma := F^\sigma(\alpha)$ ise F fonksiyonunun α başlangıçlı tekrarı olsun. $\alpha < F(\alpha)$ ise $(\beta_n)_{n < \omega}$ kesin artandır. $\beta := \sup_{n < \omega} \beta_n$ dersek teoremimizden dolayı $F^\omega(\alpha) = F(\beta) = \sup_{n < \omega} \beta_n = \beta$ olur. Böylece her α için $F^\omega(\alpha)$, bu fonksiyonun $\geq \alpha$ olan en küçük sabit noktasıdır.

Özel olarak

$$F : Srs \longrightarrow Srs (\xi \rightsquigarrow \omega^\xi)$$

normal fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyonun sabit noktalarına ε -sayıları denir. Bunlar $\omega^\varepsilon = \varepsilon$ denkleminin çözümleridirler. $0 < 1 = \omega^0$ olduğundan bu fonksiyonun en küçük sabit noktası elbette $\varepsilon_0 := F^\omega(0)$ olacaktır. Bu fonksiyon altında 0 ögesinin tekrarları

$$1, \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots$$

olacağından

$$\varepsilon_0 = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}$$

olacaktır ki bu sayıyı daha önce $\omega^{\omega^{\omega^{\cdot}}}$ ile göstermiştik.

Teorem 2.13.12 $\alpha, \beta \in Srs$ olsun.

1. **Çıkarma** : $\alpha \leq \beta \implies \exists! \gamma \alpha + \gamma = \beta$. $-\alpha + \beta := \gamma$ olarak tanımlanır.
2. **Kalanlı Bölme** : $\beta \neq 0$ ise tek olarak belirli $\xi, \delta \in Srs$ sıra sayıları $\alpha = \beta\xi + \delta$, $\delta < \beta$ olacak biçimde vardır.
3. **Logaritma** : $\alpha \neq 0$ ve $\beta > 1$ ise tek olarak belirlenmiş σ, τ, λ sıra sayıları $\alpha = \beta^\sigma\tau + \lambda$, $1 \leq \tau < \beta$ ve $\lambda < \beta^\sigma$ olacak biçimde vardır.

Kanıt. 1. ve 2. daha önce (II.9)'da kanıtlandı.

3. Tekliği ödev olarak bırakıyoruz. *Varlık*: (2.13.10)(4)'ten $\alpha \leq \beta^\alpha$ olur. Dolayısıyla $\delta := \min\{\gamma \mid \alpha \leq \beta^\gamma\}$ vardır. $\alpha = \beta^\delta$ ise $\sigma = \tau = 1$ ve $\lambda = 0$ seçilir. Aksi halde $\alpha < \beta^\delta$, dolayısıyla δ bir σ sıra sayısının ardılı olmak zorundadır, dd. $\delta = \sigma + 1$. Böylece $\beta^\sigma < \alpha < \beta^{\sigma+1} = \beta^\sigma\beta$. (2)'den dolayı tek olarak belirli τ, λ sıra sayıları $\alpha = \beta^\sigma\tau + \lambda$, $\lambda < \beta^\sigma$ olacak biçimde vardır. Her şeyden önce $\tau = 0$ olamaz; çünkü o zaman $\beta^\sigma < \alpha = \lambda < \beta^\sigma$

olurdu! $\tau \geq \beta$ da olamaz, bu durumda (2)'den dolayı $\tau = \beta\xi + \rho$, $\xi \neq 0$ yazılabilir ve

$$\beta^{\sigma+1} > \alpha = \beta^{\sigma+1}\xi + \beta^\sigma\rho + \lambda \geq \beta^{\sigma+1}\xi \geq \beta^{\sigma+1}$$

çelişkisine ulaşılır. Sonuçta istendiği gibi $1 \leq \tau < \beta$ olur. ■

Not 2.13.13 Bir an için sıra sayılarımızı bir doğru üzerine yerleştirelim ve $\alpha \leq \beta$ için $-\alpha + \beta$ sıra sayısını bu iki sıra sayısının birbirine uzaklığı olarak yorumlayalım. $\beta < \omega$ için bildiğimiz kavramla örtüşen bu yaklaşım $\beta \geq \omega$ için yine sezgilerin dışına düşer. Bir yandan kesin artan $(n)_{n < \omega}$ dizisinin limiti ω 'dır, dd. $\lim_{n < \omega} n = \omega$. Diğer yandan her $n \in \omega$ için $-n + \omega = \omega$! □

Teorem 2.13.14 $\alpha, \beta \in Srs$ olmak üzere:

1. α 'nın bir limit öge olması için gvyk. bir $\gamma \neq 0$ ile $\alpha = \omega\gamma$ olmasıdır.
2. $\alpha \in Lim$ ve $1 \leq n < \omega$ ise $n\alpha = \alpha$.
3. $n < \omega \leq \alpha$ ise $n + \alpha = \alpha$.
4. Lim bir öz sınıftır ve tek olarak belirli $F : (Srs, \in) \xrightarrow{\sim} (Lim, \in)$ eşyapı dönüşümü $F(\alpha) = \omega(\alpha + 1)$ dönüşümüdür.
5. Her $\alpha \geq \omega$ sıra sayısı tek olarak belirli bir λ limit sıra sayısı ve bir n doğal sayısı ile $\alpha = \lambda + n$ olarak yazılabilir.
6. $\alpha\beta$ 'nin bir ardıl olması için gvyk. α ve β 'nin ardıl olmalarıdır.

Kanıt. 1. (a) $\alpha \in Lim$ olsun. (2.13.12)'den tek olarak belirli ξ, λ sıra sayıları ile $\alpha = \omega\xi + \lambda$, $\lambda < \omega$. α bir limit öge olduğunda ise, $\alpha \neq 0$ ve α bir ardıl olamayacağından, $\xi \neq 0$ ve $\lambda = 0$ olur.

(b) $\alpha = \omega\xi$ ve $\xi \neq 0$ olsun. ξ sıra sayısının ardıl ve limit öge olma durumlarını ayrı ayrı tartışacağız. ξ bir ardıl, dd. bir σ ile $\xi = \sigma + 1$ olsun. $\alpha = \omega\sigma + \omega = \sup\{\omega\sigma + n \mid n < \omega\}$ bir ardıl olamaz bir limit öge olur. Şimdi ξ bir limit öge olsun. Bu durumda $\alpha = \sup\{\omega\gamma \mid \gamma < \xi\}$ olur. α 'nın bir ardıl, örneğin $\alpha = \rho + 1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\rho < \alpha$ olduğundan bir $\gamma < \xi$ için $\rho < \omega\gamma$, dolayısıyla $\alpha = \rho + 1 \leq \omega\gamma$ olur. ξ bir limit öge olduğundan $\gamma + 1 < \xi$, dolayısıyla $\alpha \geq \omega(\gamma + 1) = \omega\gamma + \omega > \omega\gamma \geq \alpha$ olur ki bu bir çelişkidir.

2. $\alpha \in Lim$ ve $n < \omega$ olsun. (1)'den dolayı bir $\lambda \neq 0$ ile $\alpha = \omega\lambda$, dolayısıyla $n\alpha = n(\omega\lambda) = (n\omega)\lambda = \omega\lambda = \alpha$.

3. (2) gibi kantlanır.

4. Her şeyden önce her α için (1)'den dolayı $F(\alpha) \in Lim$. Diğer yandan $F(\alpha) = P_\omega(\alpha + 1)$ ve $\alpha < \beta \implies \alpha + 1 < \beta + 1$ olduğunu düşünürsek P_ω 'nın yapısallığı F 'nin yapısallığını verir. Dolayısıyla F birebirdir. Şimdi $resF = Lim$ olduğunu görelim. $\alpha \in Lim$ keyfi verilsin. (1)'den dolayı bir γ ile $\alpha = \omega\gamma$. $\gamma \geq \omega$ ise (3)'ten dolayı $1 + \gamma = \gamma$ olduğundan $F(\gamma) = \omega(1 + \gamma) = \omega\gamma = \alpha$ olur. Böylece $F : Srs \rightleftarrows Lim$ bir tameşleme olduğundan Lim bir öz sınıftır ve $F : (Srs, \in) \xrightarrow{\sim} (Lim, \in)$.

5. Kalanlı bölme teoremine göre *tek* olarak belirli β ve η sıra sayıları $\alpha = \omega\beta + \eta$, $\eta < \omega$ olacak biçimde vardır. (1)'den dolayı $\lambda := \omega\beta$ bir limit sıra sayısı, $n := \eta$ ise bir doğal sayıdır.

6. (a) $\alpha = \sigma + 1$ ve $\beta = \rho + 1$ ardılar olsunlar. Bu durumda $\alpha\beta = \alpha\rho + \alpha = (\alpha\rho + \sigma) + 1$ bir ardıdır.

(b) $\alpha\beta = \gamma + 1$ bir ardıl olsun. $\alpha \neq 0$ ve $\beta \neq 0$ olmak zorundadır. γ sıra sayısının α ile kalanlı bölme: $\gamma = \alpha\xi + \lambda$, $\lambda < \alpha$. Böylece $\alpha\beta = \gamma + 1 = \alpha\xi + \lambda + 1$. Şimdi $\gamma + 1$ sayısını α ile kalanlı bölme: $\gamma + 1 = \alpha\tau + \mu$, $\mu < \alpha$. Bu gösterimlerde ξ, λ, τ, μ *tek* olarak belirlidirler. Diğer yandan $\gamma + 1 = \alpha\beta$ olduğundan $\tau = \beta$ ve $\mu = 0$ olur. Diğer yandan $\gamma + 1 = \alpha\xi + (\lambda + 1)$, $\lambda < \alpha$. $\gamma + 1 < \alpha$ olsaydı $\gamma + 1$ için iki farklı gösterim elde etmiş olacaktık. $\lambda < \alpha \wedge \alpha \leq \lambda + 1 \implies \alpha = \lambda + 1$ ve α bir ardıdır. Ayrıca $\alpha\beta = \alpha\xi + \lambda + 1 = \alpha\xi + \alpha = \alpha(\xi + 1)$ 'den (2.13.9) ile $\beta = \xi + 1$ olur. β da bir ardıdır. ■

Teorem 2.13.15 Cantor: $\alpha \neq 0$ ve $\beta > 1$ sıra sayıları verilsinler. Tek olarak belirli n doğal sayısı ve tek olarak belirli $\tau_1, \dots, \tau_n, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ sıra sayıları

$$\alpha = \beta^{\sigma_1}\tau_1 + \dots + \beta^{\sigma_n}\tau_n, \quad \sigma_1 > \dots > \sigma_n \text{ ve } 1 \leq \tau_k < \beta, \quad 1 \leq k \leq n$$

olacak biçimde vardır. Bu ifadeye α sıra sayısının β tabanına göre **Cantor Normal Gösterimi** (kısaca (CNG)) denir. Ayrıca $\beta = \omega$ ise tek olarak belirli $n \in \omega$ ve $\rho_1, \dots, \rho_n \in Srs$ sayıları,

$$\alpha = \omega^{\rho_1} + \dots + \omega^{\rho_n}, \quad \rho_1 \geq \dots \geq \rho_n$$

olacak biçimde vardır.

Kanıt. α üzerinden sonluötesi tümevarım uygulayacağız. $\alpha = 1$ için $\alpha = \beta^0 1$ gösteriminin istenen türden tek gösterim olduğu aşıkardır. Savımızın her $\lambda < \alpha$ için kanıtlandığını varsayalım (tvk). (2.13.12) ile tek olarak belirli $\alpha = \beta^{\sigma_1}\tau_1 + \lambda$, $1 \leq \tau_1 < \beta$, $\lambda < \beta^{\sigma_1}$ gösterimini belirleyelim. $\lambda < \beta^{\sigma_1} \leq \alpha$ olduğundan (tvk) ile *tek* olarak belirli m doğal sayısı ve *tek* olarak belirli $\tau'_1, \dots, \tau'_m, \sigma'_1, \dots, \sigma'_m$ sıra sayıları

$$\lambda = \beta^{\sigma'_1}\tau'_1 + \dots + \beta^{\sigma'_m}\tau'_m, \quad \sigma'_1 > \dots > \sigma'_m \text{ ve } 1 \leq \tau'_k < \beta, \quad 1 \leq k \leq m$$

olacak biçimde vardır. Şimdi $n = m + 1$ ve her $1 \leq k \leq m$ için $\sigma_{k+1} := \sigma'_k$ ve $\tau_{k+1} := \tau'_k$ olarak tanımlarsak $\sigma_2 < \sigma_1$ gösterildiğinde α 'nın gösterimini elde ederiz. $\sigma_2 < \sigma_1$ ise $\beta^{\sigma_2} \leq \lambda < \beta^{\sigma_1}$ eşitsizliğinden (2.13.9) ile elde edilir.

$\beta = \omega$ ise her $\tau_k < \omega$ bir doğal sayı ve $\beta^{\sigma_k} \tau_k = \beta^{\sigma_k} + \dots + \beta^{\sigma_k}$ (τ_k kez) olduğundan sav çıkar. ■

Daha önce sıra sayılarının bir $(\alpha_\xi)_{\xi < \lambda}$ dizisi verildiğinde $\sum_{\xi < \lambda} \alpha_\xi$ toplamını tanımlamış ancak $\bigotimes_{\xi < \lambda} \alpha_\xi$ 'nin iyi sıralı olması gerekmediği için $\prod_{\xi < \lambda} \alpha_\xi$ çarpımını açıklayamamıştık. Şimdi her iki kavramın tanımını vereceğiz ve toplam için yeni tanım elbette eski tanımla örtüşecektir.

Şimdi (2.4.10)'da X sınıfı olarak Srs 'yi alalım ve bize bir $h : \omega \rightarrow Srs$ dizisi verilsin. $\alpha_n := h(n)$ olmak üzere Srs 'de ikili işlem olarak sırasıyla sıra sayılarının toplam ve çarpımlarını alırsak orada yaptığımız gibi

$$\sum_{\xi < n+1} \alpha_\xi = \sum_{\xi=0}^n \alpha_\xi \quad \text{ve} \quad \prod_{\xi < n+1} \alpha_\xi = \prod_{\xi=0}^n \alpha_\xi$$

toplam ve çarpımlarının tanımlarını elde ederiz. Şimdi

$$\sum_{\xi < \omega} \alpha_\xi := \sup_{n < \omega} \left(\sum_{\xi=0}^n \alpha_\xi \right) \quad \text{ve} \quad \prod_{\xi < \omega} \alpha_\xi := \sup_{n < \omega} \left(\prod_{\xi=0}^n \alpha_\xi \right)$$

olarak açıklıyoruz.

Bize sıra sayılarının bir $(\alpha_\xi)_{\xi < \lambda}$ dizisi verildiğinde bu toplam ve çarpımların aşağıdaki koşulları sağlayacak biçimde bu diziye genişletilebileceği açıktır.

1.

$$\sum_{\xi < 0} \alpha_\xi := 0 \quad \text{ve} \quad \prod_{\xi < 0} \alpha_\xi := 1.$$

2. $\beta + 1 \leq \lambda$ için

$$\sum_{\xi < \beta+1} \alpha_\xi = \left(\sum_{\xi < \beta} \alpha_\xi \right) + \alpha_\beta \quad \text{ve} \quad \prod_{\xi < \beta+1} \alpha_\xi = \left(\prod_{\xi < \beta} \alpha_\xi \right) \alpha_\beta.$$

3. $\gamma \in Lim \wedge \gamma \leq \lambda$ için

$$\sum_{\xi < \gamma} \alpha_\xi = \sup_{\beta < \gamma} \sum_{\xi < \beta} \alpha_\xi \quad \text{ve} \quad \prod_{\xi < \gamma} \alpha_\xi = \sup_{\beta < \gamma} \prod_{\xi < \beta} \alpha_\xi.$$

Ayrıca $\beta \leq \lambda$ ise

$$\sum_{\beta \leq \xi < \lambda} \alpha_\xi := \sum_{\xi < -\beta + \lambda} \alpha_{\beta+\xi} \quad \text{ve} \quad \prod_{\beta \leq \xi < \lambda} \alpha_\xi := \prod_{\xi < -\beta + \lambda} \alpha_{\beta+\xi}$$

olarak açıklanır.

Toplamin yeni tanımı eski tanımla örtüşür; bu sonluötesi tümevarımla görülür. Bu tanımlarla

$$\begin{aligned}\sum_{\xi < \gamma + \eta} \alpha_\xi &= \sum_{\xi < \gamma} \alpha_\xi + \sum_{\lambda \leq \xi < \gamma + \eta} \alpha_\xi \\ \prod_{\xi < \lambda + \eta} \alpha_\xi &= \prod_{\xi < \lambda} \alpha_\xi \cdot \prod_{\lambda \leq \xi < \lambda + \eta} \alpha_\xi \\ \beta \cdot \sum_{\xi < \gamma} \alpha_\xi &= \sum_{\xi < \gamma} \beta \alpha_\xi \\ \beta^{\sum_{\xi < \gamma} \alpha_\xi} &= \prod_{\xi < \gamma} \beta^{\alpha_\xi}\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. Yine bu tanımlarla

$$\prod_{1 \leq n < \omega} n = \sup_{n < \omega} \prod_{k < n} k = \omega$$

olur ki bu çarpım analizden bildiğimiz $\prod_{n=1}^{+\infty} n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 \times 2 \times \cdots \times n)$ çarpımından tümüyle farklıdır!

2.14 SEÇME AKSİYOMU

Seçme Aksiyomunu daha önce defalarca dile getirdik. Birbirine denklikleri kolayca görülebilen bazı ifadelerini verelim:

1. $A \in \mathbb{U} \wedge \forall x \in A \ x \neq \emptyset \implies (\exists f : A \longrightarrow \bigcup A) \wedge (\forall x \in A \ f(x) \in x)$.
2. $I \in \mathbb{U}$, $\{A_i\}_{i \in I}$ bir küme ailesi ve her $i \in I$ için $A_i \neq \emptyset$ ise bir $f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ fonksiyonu her $i \in I$ için $f(i) \in A_i$ olacak biçimde vardır.
3. $I \in \mathbb{U}$, $\{A_i\}_{i \in I}$ bir küme ailesi ve her $i \in I$ için $A_i \neq \emptyset$ ise $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.
4. $A \neq \emptyset$ kümesinde bir R denklik bağıntısı verildiğinde bir $T \subseteq A$ altkümesi her $x \in A$ için $\sharp(T \cap [x]_R) = 1$ olacak biçimde vardır, dd T kümesi her $[x]_R$ denklik sınıfıyla *bir tek* ortak ögesi olan ve bunlardan başka da öge içermeyen bir kümedir.

Not (2.8.6)'da İyi Sıralama Teoremi'nden Seçme Aksiyomunu çıkarmış bunun tersinin de doğru olduğunun safça irdelenmesini yapmıştık. Şimdi bunu tamamlayacağız. Kanıtın ana düşüncesini bir kez daha vermenin yararlı olacağını düşünüyoruz.

Bize herhangi bir $A \neq \emptyset$ kümesi verildiğinde sıra sayılarımızla bu kümenin öğelerini *saymak* istiyoruz. *Srs* bir öz sınıf olduğundan elimizde her kümeyi sayacak kadar sıra sayısı vardır. A kümesinden herhangi bir öğe seçip ona bu kümenin *sıfıncı* öğesi deyip a_0 ile göstereceğiz. Sonra $A \setminus \{a_0\} \neq \emptyset$ ise bu kümeden herhangi bir öğe seçip buna *ikinci* öğe diyeceğiz vb. . . . Ancak A kümesi sonsuzsa bu işe ömrümüz yetmeyeceğinden bu işi bir çırpıda bizim adımıza yapması için bir $s : \mathcal{P}^*(A) \rightarrow A$ *seçen fonksiyonuna* bırakacağız. A kümesinin öğelerini tükettiğimizde sayma işleminde tamı tamına α sıra sayısının öğelerini kullandıysak elbette bir $F : \alpha \rightleftharpoons A$ tamesleşmesi elde ederiz. $\alpha_\xi := F(\xi)$, $\xi \in \alpha$ olmak üzere aynı zamanda A kümesini $\alpha_\xi < \alpha_\eta : \iff \xi < \eta$ ile de iyi sıralamış oluruz.

Ayrıca Seçme Aksiyomunun oldukça kullanışlı olan Zorn Lemması'na denk olduğunu da kanıtlayacağız.

Tanım 2.14.1 $\mathcal{X} = (X, <)$ *kısmi sıralanmış bir küme olsun. $Z \subseteq X$ alt-kümesi $<$ ile doğrusal sıralanmışsa $\mathcal{X}$ 'te bir **zincir** denir.*

Teorem 2.14.2 *Aşağıdaki önermeler denktirler:*

1. *Seçme Aksiyomu.*
2. **Zermelo'nun İyi Sıralama Teoremi:** *Her küme iyi sıralanabilir.*
3. **Zorn Lemması:** *Boştan farklı kısmi sıralanmış $\mathcal{X} = (X, <)$ kümesinde her zincirin bir üst sınırı varsa $\mathcal{X}$ 'te bir büyük öğe vardır.*

Kanıt. (1) $\implies$ (2) : $A \neq \emptyset$ kümesi verilsin ve $s : \mathcal{P}^*(A) \rightarrow A$ bir seçen fonksiyon olsun. Bir $d \in \mathbb{U}$ kümesini $d \notin A$ olacak biçimde seçelim ($A \neq \mathbb{U}$). Herhangi bir $x \in \mathbb{U}$ için

$$resx := \{z \mid \exists (y, z) \in x\}$$

olmak üzere bir $H : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonu

$$H(x) := \begin{cases} s(A \setminus resx) & , A \setminus resx \in \mathcal{P}^*(A) \\ d & , A \setminus resx = \emptyset \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Teorem 2.12.8'den dolayı tek olarak belirli bir $F = \text{Tr}H : Srs \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonu her $\alpha \in Srs$ için

$$F(\alpha) = H(F|\alpha) = \begin{cases} s(A \setminus \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}), & A \setminus \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\} \in \mathcal{P}^*(A) \\ d, & A \setminus \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\} = \emptyset \end{cases}$$

olacak biçimde vardır. Şimdi $\gamma \in Srs$ için $d \notin F[\gamma]$ ise $F|\gamma : \gamma \rightarrow A$ fonksiyonunun birebir olduğunu gösterelim: Gerçekten de $\sigma < \delta < \gamma$ ise

$$F(\delta) = s(A \setminus \{F(\beta) \mid \beta < \delta\}) \in A \setminus \{F(\beta) \mid \beta < \delta\}$$

fakat $F(\sigma) \in \{F(\beta) \mid \beta < \delta\}$ olduğundan $F(\sigma) \neq F(\delta)$ olur! F fonksiyonu birebir olarak Srs öz sınıfını A kümesine resmedemeyeceğinden $d \in resF$ olmak zorundadır. Şimdi $\alpha := \min\{\sigma \mid F(\sigma) = d\}$ olsun. Bu durumda $F[\alpha] = A$ ve $F : \alpha \rightleftharpoons A$ olduğu apaçıktır. F fonksiyonu α 'nın iyi sıralamasını A kümesine taşır.

(2) $\implies$ (3) : $\mathcal{X} = (X, \prec)$, her zincirinin bir üst sınırı olan fakat hiç büyük ögesi bulunmayan kısmi sıralanmış bir küme olsun. X kümesi $<$ ile iyi sıralansın. $\mathcal{Z} := \{Z \mid Z \subseteq X, \mathcal{X}'\text{te bir zincir}\}$ olsun. $\mathcal{X}'$ 'de büyük öge olmadığından her $Z \in \mathcal{Z}$ zincirinin $\prec$ kısmi sıralamasına göre *öz üst sınırları*, dolayısıyla bu üst sınırların $<$ bağıntısına göre bir $m(Z)$ en küçüğü vardır. Böylece bir $m : \mathcal{Z} \rightarrow X$ fonksiyonu elde ederiz. Bu fonksiyon yardımıyla tekrarlamalı biçimde bir $F : Srs \rightarrow X$ fonksiyonu tanımlayacağız. $\alpha \in Srs$ olsun ve her $\beta < \alpha$ için $F(\beta)$ tanımlanmış ve her $\gamma < \beta$ için $F(\gamma) \prec F(\beta)$ sağlanmış olsun. Bu durumda $Z_\alpha := \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ bir zincirdir ve biz $F(\alpha) := m(Z_\alpha)$ olarak tanımlıyoruz. $F(0) = m(\emptyset) = \min X$ ($<$ 'e göre). Böylece $F : (Srs, \in) \rightarrow (X, \prec)$ kesin artan ve dolayısıyla birebirdir. Bu ise Srs 'nin öz sınıf olmasıyla çelişir!

(3) $\implies$ (1) : $\emptyset \notin A \in \mathbb{U}$ olsun.

$$X := \{s \mid \exists B \subseteq A (s : B \rightarrow \bigcup B \text{ seçen fonksiyon})\}$$

olsun. $\emptyset \in X$ olduğundan $X \neq \emptyset$. $\mathcal{X} := (X, \subset)$ kısmi sıralanmıştır. $Z \subseteq X$, $\mathcal{X}'$ 'te bir zincirse $\bigcup Z$ de $\mathcal{X}'$ 'de bir zincirdir ve bu zincir Z zincirinin bir üst sınırıdır (ödev). $\mathcal{X}$ Zorn Lemması'nın koşullarını sağlar. s , $\mathcal{X}'$ 'te bir büyük öge olsun. $tans = A$ olduğunu savunuyoruz. $tans \neq A$ olduğunu varsayalım ve $x \in A \setminus tans$ olsun. $x \neq \emptyset$ olduğundan bir $y \in x$ seçelim ve $s^* = s \cup \{(x, y)\}$ olarak tanımlarsak açıkça $s \subset s^* \in X$ ve bu s 'nin büyük öge olmasıyla çelişir. ■

Tekrarlı Seçme Yöntemi: Bu kanıtta (1) $\implies$ (2) adımındaki bir yöntemi vurgulamakta yarar var. Bir $A \neq \emptyset$ kümesi ve bir $s : \mathcal{P}^*(A) \rightarrow A$ seçen fonksiyonundan yola çıkarak bir α sıra sayısı ve bir $f := F \mid \alpha : \alpha \rightleftharpoons A$ tamesleşmesi bulduk. Her $\xi \in \alpha$ için $a_\xi := F(\xi)$ dersek A **kümesinin ögelerini** $a_0, a_1, \dots, a_\xi, a_{\xi+1}, \dots$ olarak saydık ve iyi sıraladık: Çünkü $a_\xi < a_\eta \iff \xi < \eta$. Bu durumda F fonksiyonu A kümesi için bir **sayan fonksiyondur** denir. Burada $a_0 = s(A)$ ve $a_\beta \in A \setminus \{a_\gamma \mid \gamma < \beta\}$ idi. Demek ki biz özellikle her $\beta < \alpha$ için A kümesinde tekrarlı biçimde bir $(a_\xi)_{\xi < \beta}$ dizisini

$$a_0 = s(A), a_1 \in A \setminus \{a_0\}, a_2 \in A \setminus \{a_0, a_1\}, \dots, a_n \in A \setminus \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$$

ve genel olarak

$$\alpha_\lambda \in A \setminus \{a_\gamma \mid \gamma < \lambda\}$$

olacak biçimde seçebiliriz. Bu arada a_0 değerini istediğimiz gibi belirleyebiliriz. $a_0 = a \in A$ olsun istiyorsak ve şans eseri $s(A) = a$ değilse $s'(A) := a$ ve $B \in \mathcal{P}^*(A) \setminus \{A\}$ için $s'(B) := s(B)$ ile tanımlanmış s' seçen fonksiyonu ile çalışırız.

Teorem 2.14.3 Hausdorff Maksimum İlkesi : *Seçme Aksiyomu aşağıdaki önermeye denktir:*

(H) $\mathcal{X} = (X, <)$ kısmi sıralanmış bir küme ise $\mathcal{Z} := \{Z \mid Z \subseteq X; Z, \mathcal{X}'te bir zincir\}$ olmak üzere $(\mathcal{Z}, \subseteq)$ kısmi sıralanmış kümesinin bir büyük (maksimal) ögesi vardır.

Kanıt. (Seç) $\implies$ (H) : $\mathcal{X} = (X, <)$ kısmi sıralanmış kümesi verilsin. $X = \emptyset$ için sav aşıkard olduğundan $X \neq \emptyset$ varsayalım. (2.14.2)'den dolayı X kümesinin öğelerini bir α sıra sayısının öğeleriyle $(x_\xi)_{\xi < \alpha}$ olarak sayabiliriz. $\mathcal{Z}$ 'de büyük öge olan bir Z oluşturacağız. Düşüncemiz çok basittir: x_0 ögesi Z 'de olacaktır. $\beta < \alpha$ olsun ve her $\xi < \beta$ için x_ξ ögesinin Z 'de olup olmadığına karar verilmiş olsun. Eğer bunlardan Z 'ye alınan her bir x_ξ ile x_β ögesi $<$ bağıntısına göre kıyaslanabiliyorsa x_β ögesini Z kümesine alacağız aksi halde almayacağız. Biraz daha matematiksel söylemle tekrarlı tanımlamayla bir $F : \alpha \rightarrow X$ fonksiyonunu

$$F(\beta) := \begin{cases} x_\beta, & \{F(\rho) \mid \rho < \beta\} \cup \{x_\beta\} \text{ bir } < \text{ zinciridir.} \\ x_0 & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

Bu durumda $F(0) = x_0$, $Z := \{F(\beta) \mid \beta < \alpha\} \in \mathcal{Z}$ ve bu öge $(\mathcal{Z}, \subseteq)$ 'de bir büyük ögedir.

(H) $\implies$ Zorn: $\mathcal{X} = (X, <)$ kısmi sıralanmış kümesinde her zincirin bir üst sınırı bulunsun. $\mathcal{X}$ 'in zincirlerinin (H)'den dolayı $\subseteq$ bağıntısına göre bir Z büyük ögesi vardır. x ögesi bu Z zincirinin $\mathcal{X}$ 'te bir üst sınırı ise x ögesi $\mathcal{X}$ 'te bir büyük ögedir. Aksi durumda $x < y$ koşulunu sağlayan bir $y \in X$ ögesiyle $Z^* := Z \cup \{x, y\}$ de $\mathcal{X}$ 'te bir zincirdir ve $Z \subset Z^*$ ise Z zincirinin $\subseteq$ bağıntısına göre bir büyük öge olmasıyla çelişir. (2.14.2) kanıtı tamamlar.

■

Not 2.14.4 Kanıtı dikkatlice bakıldığında (Seç) $\implies$ (H) adımımda aslında (H)'den biraz fazlasını kanıtladığımız görülür:

(H)* $\mathcal{X} = (X, <)$ kısmi sıralanmış bir küme ve C bu kümede bir zincir ise C 'yi içeren bir büyük Z zinciri vardır.

Gerçekten de kanıtta X kümesinin öğelerini iyi sıralarken önce C kümesinin, ardından $X \setminus C$ kümesinin öğelerini sıralamak yeterlidir. Benzeri bir durum Zorn Lemması için de söz konusudur. $(X, <)$ Zorn Lemması'nın

koşullarını sağlıyorsa *keyfi verilen her x için $y \geq x$ olan maksimal bir y bulabiliriz*. Bunu ödev olarak bırakıyoruz. Zorn Lemması'nın kanıtlardaki tipik kullanımıyla okuyucu kuşkusuz cebir, topoloji ve fonksiyonel analiz derslerinde karşılaşmıştır. Peşinde olduğumuz bir matematik nesne vardır. Varlığı kanıtlanmak istenen bu nesnenin uygun bir kısmi sıralamada bir büyük öge olması ayarlanır. Çoğu zaman bize verilen kısmi sıralama doğrudan $\subseteq$ bağıntısıdır. $\square$

Örnek 2.14.5 $\mathcal{H} = (H, +, \cdot)$ birim ögeli bir halka olsun. Abel grubunu biliniyor varsayarak bunun ne anlam geldiğini kısaca söyleyelim. $(H, +)$ bir Abel grubudur; bu grubun etkisiz ögesini θ ile gösterelim. Her $x, y, z \in H$ için $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$. Ayrıca H kümesinde her $x \in H$ için $x \cdot e = x = e \cdot x$ koşulun sağlayan bir $e \in H$ ögesi vardır.

$I \subseteq H$ toplam işlemine göre bir alt grupsa ve ayrıca $H \cdot I \subseteq I \wedge I \cdot H \subseteq I$ ise I 'ya H 'de bir **idealdir** denir. Eğer I bir ideal ve $e \in I$ ise $I = H$ olduğu apaçıktır. I bir idealse ve I 'yı öz altküme olarak içeren yegane ideal H ise I bir **büyük (maksimal) idealdir** denir.

Büyük İdeal H en az iki ögesi olan bir halka ve $J \subset H$ bir ide

Teoremi *alse $J \subseteq I$ koşulunu sağlayan bir büyük I ideali vardır.*

Gerçekten de $\mathcal{I} := \{I \mid J \subseteq I \subset H \text{ ve } I \text{ ideal}\}$ kümesini $\subseteq$ ile kısmi sıralayalım. $(\mathcal{I}, \subseteq)$ 'nin Zorn Lemması'nın koşulunu sağladığını görelim. $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{I}$ bir zincir olsun. $K := \bigcup \mathcal{Z}$ kümesinin H 'de bir ideal olduğunu savunuyoruz. $J \subseteq K$ olduğundan $K \neq \emptyset$. K 'nin toplama göre alt grup olduğunu kanıtlamak için $\forall x, y \in K (x - y \in K)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $x, y \in K$ keyfi verilsinler. Tanım gereği $x \in I_1$ ve $y \in I_2$ olacak biçimde $I_1, I_2 \in \mathcal{Z}$ idealleri vardır. $\mathcal{Z}$ bir zincir olduğundan $I_1 \subseteq I_2$ veya $I_2 \subseteq I_1$, dolayısıyla $x - y \in I_1$ veya $x - y \in I_2$ olur. Sonuçta $x - y \in K$. $H \cdot K \subseteq K$ ve $K \cdot H \subseteq K$ apaçıktır. Dolayısıyla K bir idealdir. Her $I \in \mathcal{I}$ için $e \notin I$ olduğundan $e \notin K$ ve $K \subset H$ olur. Böylece gerçekten $K \in \mathcal{I}$ olur. $(\mathcal{I}, \subseteq)$ 'nin Zorn Lemması'nın koşulunu sağladığından bir I büyük ögesine sahiptir ve bu I işimizi görür. $\square$

Örnek 2.14.6 Benzer bir irdelemeyle her vektör uzayının bir bazı olduğunu, hatta baştan verilen doğrusal bağımsız bir altkümenin uzayın bir bazına tamamlanabileceğini kanıtlayabiliriz.

Baz V bir K vektör uzayı ve $A \subseteq V$ doğrusal bağımsız bir

Teoremi *altküme olsun. V 'nin $A \subseteq B$ olan bir B bazı vardır.*

Bu kez $\mathcal{D} := \{D \mid A \subseteq D \subseteq V \text{ ve } D \text{ doğrusal bağımsız}\}$ kümesini $\subseteq$ ile sıralayıp Zorn Lemması'nı uygulayınız (ödev). Bu teoremin İyi Sıralama Aksiyomunu kullanan bir başka kanıtını Problem 4.0.32'de verdik. $\square$

Seçme Aksiyomuna denk olduğubilinen bir çok önerme daha vardır. Biz şimdilik aşağıdak önermeyle bu konuyu noktalayacağız.

Önerme 2.14.7 *Aşağıdaki önermeler denktirler:*

1. *Seçme Aksiyomu.*
2. *Her örten $f : A \twoheadrightarrow B$ fonksiyonuna karşılık birebir bir $g : B \rightarrow A$ fonksiyonus $f \circ g = I_B$ olacak biçimde vardır.*

Kanıt. (1) $\implies$ (2): $f : A \twoheadrightarrow B$ örtense her $y \in B$ için $A_y^f \neq \emptyset$ olur. Şimdi $\mathcal{A}^f := \{A_y^f \mid y \in B\}$ olmak üzere $s : \mathcal{A}^f \rightarrow A = \bigcup \mathcal{A}^f$ bir seçen fonksiyon olsun. $h : B \rightarrow \mathcal{A}^f$ ($y \rightsquigarrow A_y^f$) olmak üzere $g := s \circ h : B \rightarrow A$ fonksiyonu işimizi görür.

(2) $\implies$ (1): $\mathcal{A}$ boş kümeyi içermeyen *ayrık* bir küme ailesi ve $A := \bigcup \mathcal{A}$ olsun. Her $a \in A$ için $a \in X_a$ koşulunu sağlayan tek olarak belirli bir $X_a \in \mathcal{A}$ vardır. $f(a) := X_a$ ile örten bir $f : A \rightarrow \mathcal{A}$ fonksiyonu tanımlanır. Hipotezden dolayı bir $g : \mathcal{A} \rightarrow A$ birebir fonksiyonu $f \circ g = I_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ olacak biçimde vardır. Her $X \in \mathcal{A}$ için $X = f(g(X))$ ve f fonksiyonunun tanımından ise $g(X) \in X$ elde edilir. g fonksiyonu $\mathcal{A}$ için bir seçen fonksiyondur.

Şimdi ise $\mathcal{A}$ boş kümeyi içermeyen herhangi bir küme ailesi olsun. Bu durumda $\mathcal{A}^* := \{X \times \{X\} \mid X \in \mathcal{A}\}$ boş kümeyi içermeyen ayrık bir ailedir. Az önce bir $g^* : \mathcal{A}^* \rightarrow \bigcup \mathcal{A}^*$ seçen fonksiyonunun varlığını kanıtladık. Her $X \in \mathcal{A}$ için $g^*(X \times \{X\}) \in X \times \{X\}$ olduğundan tek olarak belirli bir $s(X) \in X$ ile $g^*(X \times \{X\}) = (s(X), X)$ olur. Elbette $s : \mathcal{A} \rightarrow \bigcup \mathcal{A}$ bir seçen fonksiyondur. ■

2.15 ÇOKLUK SAYILARININ TANIMI

Bize herhangi bir A kümesi verilsin. Bu küme sonlu ise hiç sorun yoktur: Sonlu bir kümede her doğrusal sıralama bir iyi sıralamadır ve bu sıralama eşyapı dönüşümü dışında tek olarak belirlidir. A sonlu ve $A \sim n$ ise $<$ bu kümenin herhangi bir iyi sıralaması olduğunda $srs(A, <) = n$ olur. Bu n *tek* olarak belirlidir. A sonsuz ise Seçme Aksiyomu yardımıyla A kümesini iyi sıralayabileceğimizi biliyoruz. Ancak A kümesini bir kez iyi sıralayabilirsek, kümenin sonsuz olması durumunda, sonsuz farklı biçimde iyi sıralayabileceğimizi görmek çok kolaydır: Farklı iki öğenin yerini değiştirdiğimizde farklı bir iyi sıralama elde ederiz. Amacımız A kümesinin çokluk sayısını bu kümenin iyi sıralamalarına karşılık gelen sıra sayılarından biri

olarak açıklamaktır. Örneğin $\mathbb{N}$ kümesinin çokluk sayısını açıklamak istediğimizde çok aday vardır:

$$\omega, \omega + 1, \dots, \omega 2, \dots, \omega^2, \dots, \omega_s^\omega, \dots, \varepsilon_0, \dots$$

Böyle bir durumda en doğal iki aday, eğer varsa bunların en büyüğü veya en küçüğüdür. Ancak A sonsuz ve bir α sıra sayısı için $A \sim \alpha$ ise aynı zamanda $A \sim \alpha + 1$ olacağından söz konusu adayların en büyüğü yoktur. Ancak Srs iyi sıralanmış olduğundan $\{\alpha \mid \alpha \in Srs \text{ ve } \alpha \sim A\} \neq \emptyset$ sınıfının bir en küçüğü vardır.

Tanım 2.15.1 *Bir α sıra sayısına*

$$\forall \beta (\beta < \alpha \implies \beta \approx \alpha)$$

*ise bir **çokluk (kardinal) sayısı** denir.*

$$Cks := \{\alpha \mid \alpha \text{ çokluk sayısı}\}$$

*sınıfına **çokluk sayıları sınıfı** denir.*

Tanım 2.15.2 *Bir A kümesinin için $\aleph A := \min\{\alpha \mid A \sim \alpha\}$ olsun.*

Çokluk sayılarını genellikle $\aleph, \kappa, \nu, \mu$ ile göstereceğiz. Hemen tanımdan çıkan aşağıdaki özellikleri ödev olarak bırakıyoruz:

1. $\forall \alpha (\aleph \alpha = \min\{\beta \mid \beta \sim \alpha\} \wedge \aleph \alpha = \aleph \alpha)$.
2. $\forall \alpha \aleph \alpha \leq \alpha$.
3. $\forall \alpha, \beta (\alpha \leq \beta \implies \aleph \alpha \leq \aleph \beta)$.
4. $\kappa \in Cks \implies \forall \alpha (\alpha < \kappa \iff \aleph \alpha < \kappa)$.
5. F bir fonksiyon ve $\tan F$ bir küme ise $\aleph_{res} F \leq \aleph_{\tan} F$.

Teorem 2.15.3 1. *Her Neumann doğal sayısı n ve ω çokluk sayılarıdır.*

2. *Her sonsuz çokluk sayısı bir limit sıra sayısıdır.*

3. *Her $M \subseteq Cks$ kümesi için $\sup M = \bigcup M$ de bir çokluk sayısıdır (supremum elbette Srs 'de alınacaktır).*

Sonuç 2.15.4 *Her A kümesi için $\aleph A$ bir çokluk sayısıdır ve buna A **kümesinin çokluk sayısı** denir.*

Kanıt. 1. Her $n \in \mathbb{N}$ bir sıra sayısıdır ve (2.6.2)'den dolayı bir α sıra sayısı için $\alpha < n$ ise $\alpha \approx n$. Dolayısıyla n bir çokluk sayısıdır. ω bir sıra sayısıdır ve $\alpha < \omega$ ise α bir doğal sayıdır ve biz $\alpha \approx \omega$ olduğunu biliyoruz. Öyleyse ω bir çokluk sayısıdır.

2. α sonsuz ama bir limit öge olmasın. Bir β ile $\alpha = \beta + 1$ olur. Ancak bu durumda β da sonsuzdur ve bu nedenle $\beta \smile \beta \cup \{\beta\} = \beta + 1 = \alpha$. Diğer yandan $\beta < \alpha$. α bir çokluk sayısı değildir.

3. $M \subseteq Cks$ bir küme olsun. $\alpha := \sup M = \bigcup M$ olsun. $\alpha = \max M$ ise kanıtlanacak bir şey yoktur. Şimdi $\nexists \max M$ olsun. Her $\beta < \alpha$ için $\beta < \nu < \alpha$ olacak biçimde bir $\nu \in M$ vardır. α 'nın çokluk sayısı olmadığını varsayalım ve $\kappa := \natural\alpha$ olsun. $\kappa < \alpha$ olduğundan bir $\mu \in M$ ile $\natural\alpha = \kappa < \mu < \alpha$, buradan da $\natural\alpha < \mu \leq \natural\alpha$ olur ki bu bir çelişkidir.

4. Sonucun kanıtı: İyi Sıralama Teoremi'nden dolayı $\exists \alpha(\alpha \smile A)$. Gerisi doğrudan tanımdan çıkar. ■

Daha önce (II.7)'de çokluk sayılarının *ne olduklarını söylememiş, ancak her ne olurlarsa olsunlar*

$$\natural A = \natural B \iff A \smile B$$

olmasını istemiştik. Şimdi verdiğimiz tanım bu koşulu sağlar. $\natural A$, tam da A ile eşgüçlü olan *tek* çokluk sayısıdır. Ayrıca $<$ sıra sayıları arasındaki sıralamayı göstermek üzere

$$\natural A < \natural B \iff A \prec B$$

olduğu kolayca görülür ve bu tam da (II.7)'de verdiğimiz sıralamadır.

Gerçekten de $\natural A < \natural B$ olsun. $\natural A, \natural B$ 'de bir uzantı olacağından $\natural A$ 'dan $\natural B$ 'ye birebir bir dönüşüm vardır, ancak $\natural B$ bir çokluk sayısı olduğundan $\natural A \approx \natural B$. $A \smile \natural A$ ve $B \smile \natural B$ olduğundan bu tam da $A \prec B$ demektir. Şimdi tersine $A \prec B$ olsun. $\natural A \leq \natural B$ olduğu apaçıktır. $\natural A = \natural B$ olamaz, aksi halde $A \smile B$ olurdu ve bu varsayımınla çelişir. Dolayısıyla $\natural A < \natural B$ olmak zorundadır.

Daha önce (II.7)'de çokluk sayıları arasında toplama, çarpma ve üs işlemleri açıklamıştık. Şimdi her κ çokluk sayısının aynı zamanda bir küme ve tanımlardan doğrudan $\natural\kappa = \kappa$ olduğunu düşünürsek orada verdiğimiz bu tanımlar şu şekli alırlar: Her $\kappa, \lambda \in Cks$ için

$$\begin{aligned} \kappa \dot{+} \lambda &= \natural(\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}), \text{ ve} \\ \kappa * \lambda &= \natural(\kappa \times \lambda), \text{ } !\kappa^\lambda = \natural(\lambda^\kappa). \end{aligned}$$

Daha önce de öğrendiğimiz gibi bu işlemler nerdeyse aritmetik işlemlerinin tüm özelliklerine sahiptirler: Her $\kappa, \lambda, \zeta \in Cks$ için

$$\kappa \dot{+} \lambda = \lambda \dot{+} \kappa, \kappa * \lambda = \lambda * \kappa.$$

$$\kappa \dot{+} (\lambda \dot{+} \zeta) = (\lambda \dot{+} \kappa) \dot{+} \zeta, \kappa * (\lambda * \zeta) = (\lambda * \kappa) * \zeta.$$

$$\kappa * (\lambda \dot{+} \zeta) = \kappa * \lambda \dot{+} \kappa * \zeta.$$

$$!(\kappa * \lambda)^\zeta = !\kappa^\zeta * !\lambda^\zeta, !\kappa^\lambda * !\kappa^\zeta = !\kappa^{\lambda \dot{+} \zeta}, !(\kappa^\lambda)^\zeta = !\kappa^{\lambda * \zeta}.$$

$$\kappa_1 \leq \kappa_2, \lambda_1 \leq \lambda_2 \implies \kappa_1 \dot{+} \lambda_1 \leq \kappa_2 \dot{+} \lambda_2, \kappa_1 * \lambda_1 \leq \kappa_2 * \lambda_2, !\kappa_1^{\lambda_1} \leq !\kappa_2^{\lambda_2}.$$

Not 2.15.5

1. Tanımdan her n doğal sayısı için $\aleph n = n$ ve $\aleph \mathbb{N} = \omega$.
2. ω bir çokluk sayısı olarak kullanıldığında ise onun yerine $\aleph_0$ yazmak kümeler kuramında bir alışkanlığa dönüşmüştür. Böylece $\aleph_0 = \aleph \mathbb{N}$ sonsuz çokluk sayılarının en küçüğüdür. $\aleph \mathbb{R}$ yerine ise genellikle $\mathfrak{c}$ yazılır.
3. M çokluk sayılarının bir kümesi ise her $\kappa \in M$ için $\kappa < \aleph \mathcal{P}(\sup M) =: \kappa^*$. Dolayısıyla $\kappa^* \notin M$ ve Menger ölçütünden dolayı Cks bir *öz sınıftır*.
4. Cantor Teoremi'nden dolayı her A kümesi için $\aleph A < \aleph \mathcal{P}(A)$ olduğundan çokluk sayılarının bir en büyüğü yoktur. Dolayısıyla Cks için (2.5.18)'in koşulu sağlanır. Eğer Cks bir küme olsaydı $\kappa := \sup Cks$ da bir çokluk sayısı olurdu ve (2.5.18)'den dolayı her $\mu \in Cks$ için $\mu < \kappa$ olurdu ki bu bize $\kappa < \kappa$ çelişkisini verir. Böylece Cks sınıfının bir öz sınıf olduğunun bir başka kanıtını elde ederiz. Srs iyi sıralanmış olduğundan onun alt sınıfı olan Cks sınıfı da iyi sıralıdır. Her doğal sayı aynı zamanda bir çokluk sayısı olduğundan Cks iyi sıralanmış sınıfının başlangıcı şöyledir: $0, 1, 2, \dots; \aleph_0, \dots$.
5. Neumann doğal sayılarımız aynı zamanda sıra ve çokluk sayılarıdır. Bu üç nitelikleriyle açıklanmış toplama çarpma, üs işlemleri ve sıralamalar örtüşürler. Ancak sonluötesinde bunun böyle olmadığını daha önce de vurgulamıştık. Örneğin

$$\omega < \omega + \omega = \omega 2, \omega = \omega \dot{+} \omega, \omega < \omega \omega, \omega = \omega * \omega, \dots$$

6. Her sonsuz çokluk sayısı bir limit sıra sayısıdır ama bunun tersi doğru değildir! Örneğin

$$\omega 2, \omega 3, \dots, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots$$

limit öğelerdir, ancak çokluk sayıları değildirler. Bunların tümünün ω ile eş güçlü olduklarını biliyoruz. $\square$

Tanım 2.15.6 κ bir çokluk sayısı ise

$$\kappa^+ := \min\{\mu \in Cks \mid \kappa < \mu\}$$

κ çokluk sayısına κ çokluk sayısının **çokluk ardılı** denir. κ^+ bir **ardıl çokluk-tur** da denir.

Not 2.15.7 Bir κ çokluk sayısının κ^+ çokluk ardılı ile onun sıra sayısı ardılı olan $\kappa + 1$ sıra sayısını birbirine karıştırmayınız. κ sonsuz olduğunda κ^+ çokluk sayısı da sonsuzdur ve biz her sonsuz çokluk sayısının bir limit sıra sayısı olduğunu biliyoruz. Oysa $\kappa + 1$ bir ardıl sıra sayısıdır. $\square$

$$Cksz := Cks \setminus \omega = \{\kappa \in Cks \mid \kappa \text{ sonsuz}\}$$

olsun. $Cksz$ iyi sıralanmış bir sınıftır ve $\aleph_0 = \min Cksz$. Şimdi (2.12.12) tekrarlı teoreminde $H, K : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonları şöyle seçilsinler: Her $\kappa \in Cksz$ için $H(\kappa) := \kappa^+$, ve $K := \cup = \sup$ olsun ve H fonksiyonu $\mathbb{U} \setminus Cksz$ sınıfına herhangi biçimde genişletilsin. $a := \omega$ olsun. Teoremimiz aşağıdaki koşulları sağlayan tek olarak belirli bir $\mathcal{K} : Srs \rightarrow Cksz$ fonksiyonu verir. Her α için $\aleph_\alpha := \mathcal{K}(\alpha)$ olmak üzere³⁶.

- (1) $\aleph_0 = \omega$.
- (2) $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$.
- (3) $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$, λ bir limit sıra sayısıdır.

(2.15.3) (3)'ten dolayı $\aleph_\lambda$ bir çokluk sayısıdır. $\mathcal{K}$ fonksiyonu tanım gereği süreklidir ve tanım gereği $\mathcal{K}(\alpha) < \mathcal{K}(\alpha + 1)$ olduğu için (2.11.8)'den dolayı *normaldir*. Bu nedenle $\mathcal{K}$ fonksiyonu her β için $\alpha \geq \beta$ koşulunu sağlayan α sabit noktalarına sahiptir, dd. $\alpha = \aleph_\alpha$ olan $\alpha \geq \beta$ sıra sayıları daima bulunabilir. $\aleph_0 = \omega$. $\aleph_1$ kesinlikle sayılamaz. Çokluklar böyle sıçramalı artarken böyle sabit noktaları düşünebilmek çok zor. Bu sabit noktaların en küçüğü olan $\mathcal{K}^\omega(0)$ ise

$$\mathcal{K}(0), \mathcal{K}^2(0), \mathcal{K}^3(0), \dots$$

dizisinin, dd. $\aleph_0, \aleph_{\aleph_0}, \aleph_{\aleph_{\aleph_0}}, \dots$ dizisinin limitidir.

Önerme 2.15.8 $\mathcal{K} : (Srs, <) \rightarrow (Cksz, <)$ bir eşyapı dönüşümüdür.

Kanıt. $\mathcal{K}$ normal olduğundan yapısal ve birebirdir (İsterseniz bir kez de bundan Cks sınıfının öz sınıf olduğunu elde edersiniz). Geriye sadece bu fonksiyonun örten olduğunu göstermek kalıyor. Örten olmadığını varsayalım ve $\kappa := \min(Cksz \setminus \mathcal{K}[Srs])$ olsun. Sonluötesi tümevarımla her α için $\aleph_\alpha < \kappa$

³⁶ $\aleph_\alpha$ yerine ω_α gösterimi de kullanılmaktadır.

olduğu $\mathcal{K}$ fonksiyonun tanımından doğrudan görülür. Demek ki $\mathcal{K}[Srs] \subseteq \kappa$. Bu ise $Srs \sim \mathcal{K}[Srs] \preceq \kappa$ bağıntısını verir ki Srs öz sınıf ve κ bir küme olduğundan bu bir çelişkidir. ■

Böylece sonsuz çokluk sayılarımızın dizisi atlamalarla aşağıdaki gibidir:

$$\aleph_0, \aleph_1, \dots, \aleph_\omega, \dots, \aleph_{\omega^2}, \dots, \aleph_{\omega^2}, \dots, \aleph_{\varepsilon_0}, \dots \quad (2.17)$$

Biz $\aleph_0 = \aleph \mathbb{N} < \aleph \mathcal{P}(\mathbb{N}) = 2^{\aleph_0}$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\mathfrak{c} := \aleph \mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$ olduğunu da biliyoruz. $\aleph_0 < \mathfrak{c}$ olduğundan $\mathfrak{c}$ çokluk sayımızda bu sayı doğrusu üzerinde olacaktır. Cantor gerçek sayıların herhangi bir sonsuz altkümesinin çokluk sayısının ya $\aleph_0$ ya da $2^{\aleph_0}$ olduğuna ve $\mathfrak{c}$ çokluk sayısının $\aleph_0$ 'dan sonra gelen ilk çokluk sayısı olduğuna inanıyordu. Yıllarca başarısızca bunu kanıtlamak için uğraştı. **Süreklilik Hipotezi** olarak bilinen Cantor'un meşhur sanısı

$$(CH) : \aleph_1 = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c} \quad (2.18)$$

olduğudur. Bu sanı Hilbert'in Paris'te matematikçilere sunduğu önemli problemlerin birincisidir ve her α sıra sayısı için

$$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$$

Genel Süreklilik Hipotezine genişletilmiştir.

“Temel soruların ele alınmasına örnek oluşturmak üzere, her matematik problemin çözülebilirliği tezini seçiyorum. Hepimiz bundan eminiz. İçimizde sürekli olarak duyduğumuz şu ses matematikle uğraşmanın ana heyecanını verir: İşte problem, çözümü ara; sen onu saf düşünceyle bulabilirsin. Çünkü matematikte bilemeyiz yoktur” (Hilbert [32]).

Hilbert'in bu soylu ve yürekli söylemine karşın her şeyi bilemeyeceğimizi öğrenmek zorunda kaldık. Cantor'un başarısızlığının nedeni ne problemin zorluğundan ne de Cantor'un yeterince zeki olmamasından kaynaklanıyordu, bunun nedeni hiç beklemediğimiz yerlerdeydi!

Teorem 2.15.9 (Gödel) ZFC çelişkisiz bir kuramsa $ZFC + \mathfrak{c} = \aleph_1$ de çelişkisiz bir kuramdır.

Teorem 2.15.10 (Cohen) ZFC çelişkisiz bir kuramsa $ZFC + \mathfrak{c} = \aleph_2$ de çelişkisiz bir kuramdır.

Bu durumda ZFC kuramında ne (CH) ne de $\neg(CH)$ kanıtlanamaz! Bu bizim alışık olmadığımız bir durumdur. Doğru ortaya konmuş bir problemi

yeterince zekiysek mutlaka çözeceğimize inancımız tam iken bu sonuçlar bize öyle olmadığını söylüyorlar! İşte tertemiz bir problem: $(CH)!$ İstedğimiz kadar zeki olalım ve istediğimiz kadar zaman ayıralım, ZFC kuramında *ne (CH) 'yi ne de $\neg(CH)$ 'yi kanıtlamayız!* Kesin olan bir şey en az bir α için $\mathfrak{c} = \aleph_\alpha$. İyi de $\mathfrak{c}$ çokluk sayısının (2.17) dizisindeki tam yeri ne-residir? 1905 yılında König tarafından $\mathfrak{c} \neq \aleph_{\aleph_0}$ olduğunu kanıtlamıştır. Daha önce alışık olmadığımız durumlarla karşılaşyoruz. Biz en az bir α için $\mathfrak{c} = \aleph_\alpha$ olduğunu biliyoruz ama bu α çokluk sayısının hangisi olduğunu ZFC kuramında söyleyemiyoruz! Bu sonuç şu şekle dönüştürülürse daha da trajik olur: *Aksiyomlarımız en çok haşır neşir olduğumuz gerçek sayıların çokluğunu bilmemize izin vermiyorlar!*

$\exists \alpha \mathfrak{c} = \aleph_\alpha$. $\alpha = ?$ Bilemeyiz!

Şimdi $Srs^2 := Srs \times Srs$ sınıfını iyi sıralayacak ve ardından *iki sonsuz çokluk sayının çarpım ve toplamlarının bu sayılardan büyüğüne eşit* olduğunu söyleyen Hessenberg Teoremi'ni kanıtlayacağız. Şimdi $\kappa^* = (\kappa_1, \kappa_2)$ ve $\mu^* = (\mu_1, \mu_2)$, Srs^2 sınıfının iki ögesi olsunlar. $\max \kappa^* := \max\{\kappa_1, \kappa_2\}$, ve $\max \mu^* := \max\{\mu_1, \mu_2\}$ olmak üzere

$$\kappa^* \prec \mu^* : \Longleftrightarrow \begin{cases} \max \kappa^* < \max \mu^* \\ \max \kappa^* = \max \mu^* \wedge \kappa_1 < \mu_1 \\ \max \kappa^* = \max \mu^* \wedge \kappa_1 = \mu_1 \wedge \kappa_2 < \mu_2 \end{cases}$$

olarak açıklansın. Bu sıralama çok kolay görselleştirilebilir. Pozitif x -ekseni üzerine soldan sağa ve pozitif y -ekseni üzerine aşağıdan yukarıya tüm sıra sayılarını sıralarına sadık kalarak yerleştirdiğinizi düşününüz. Böylece Srs^2 sınıfının öğelerini birinci bölgeye yerleştirelim. Her $\alpha \geq 1$ için K_α ile Srs^2 sınıfının, köşeleri $(0, 0), (0, \alpha), (\alpha, 0), (\alpha, \alpha)$ olan karenin $[(\alpha, 0), (\alpha, \alpha)]$ ve $[(0, \alpha), (\alpha, \alpha)]$ kenarları üzerindeki noktalarının kümesini gösterelim. Ayrıca $K_0 = \{(0, 0)\}$ olsun. Basitçe söylersek $\alpha < \beta$ ise K_α kümesindeki her öge K_β kümesindeki öğeden $\prec$ bağıntısına göre önce gelir. K_α kümesinin öğelerinin kendi aralarındaki sıralamaları ise küçükten büyüğe şöyledir: Önce x -eksenine paralel olan $[(0, \alpha), (\alpha, \alpha)]$ kenarı üzerindeki öğeler soldan sağa, (α, α) hariç sıralanır, ardından y -eksenine paralel $[(\alpha, 0), (\alpha, \alpha)]$ kenarı üzerindeki noktalar aşağıdan yukarıya sıralanırlar.

Önerme 2.15.11 ($Srs^2, \prec$) iyi sıralanmıştır.

Kanıt. Srs^2 sınıfının $\prec$ ile doğrusal sıralandığını görmek gerçekten kolaydır. Şimdi bunun bir iyi sıralama olduğunu gösterelim. Bir $\emptyset \neq A^* \subseteq Srs^2$ altkümesi verilsin. Bu durumda $A := \{\max \kappa^* \mid \kappa^* \in A^*\}$ sıra sayıla-

rının boştan farklı bir altkümesidir. $\alpha := \min A$ olsun.

$$A_\alpha^* := A^* \cap K_\alpha = \{\kappa^* \in A^* \mid \max \kappa^* = \alpha\} \text{ ve} \\ A_1 := \{\kappa_1 \mid \exists \kappa^* = (\kappa_1, \kappa_2) \in A_\alpha^*\}$$

olsun. Elbette $\emptyset \neq A_1 \subseteq Srs$ ve $\mu_1 := \min A_1$ olsun. $\mu_1 < \alpha$ ise $(\mu_1, \alpha) = \min A^*$. $\mu_1 = \alpha$ ise $\mu_2 := \min\{\kappa_2 \mid (\alpha, \kappa_2) \in A_\alpha^*\}$ olsun. Bu durumda $(\alpha, \mu_2) = (\mu_1, \mu_2) = \min A^*$.

$\kappa^* \in Srs^2$ keyfi verilsin. Bu öğenin Srs^2 'deki uzantısını kısaca $u(\kappa^*)$ ile gösterirsek

$$u(\kappa^*) \subseteq (\max \kappa^* + 1) \times (\max \kappa^* + 1)$$

olur. $(\max \kappa^* + 1) \times (\max \kappa^* + 1)$ bir küme olduğundan $u(\kappa^*)$ da bir kümedir.

■

Teorem 2.15.12 (Hessenberg) κ ve λ , en az biri sonsuz olan iki çokluk sayısı ise $\kappa \dot{+} \lambda = \max(\kappa, \lambda)$. Ayrıca bu sayılardan hiçbiri 0 değilse $\kappa * \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

Kanıt. $(Srs^2, \prec)$ iyi sıralanmış bir öz sınıftır. İyi sıralanmış öz sınıflar kuramı kesin belli olduğundan tek olarak belirli bir $F : (Srs^2, \prec) \xrightarrow{\sim} (Srs, <)$ eşyapı dönüşümü vardır. Her α sıra sayısı için $\alpha \times \alpha$ kümesi Srs^2 'de $(0, \alpha)$ öğesinin uzantısıdır. Dolayısıyla $F(0, \alpha) = F[\alpha \times \alpha]$ kümesi tek olarak belirli bir $f(\alpha)$ sıra sayısının uzantısıdır. Böylece elde ettiğimiz $f : Srs \rightarrow Srs$ dönüşümü kesin artandır ve dolayısıyla her α için $F[\alpha \times \alpha] = f(\alpha) \geq \alpha$ 'dır ((2.10.3)(1)). Biz ilk olarak

$$(*) \quad \forall \alpha \quad f(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha, \text{ dolayısıyla } \aleph_\alpha * \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$$

olduğunu kanıtlayacağız.

Her şeyden önce her α için $F[\alpha \times \alpha : \alpha \times \alpha \rightleftharpoons f(\alpha)]$ bir tameşlemedir. Dolayısıyla her α için $\natural(\alpha \times \alpha) = \natural f(\alpha)$. Buradan eğer $f(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha$ kanıtlanırsa

$$\aleph_\alpha = \natural \aleph_\alpha = \natural(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha) = \natural \aleph_\alpha * \natural \aleph_\alpha = \aleph_\alpha * \aleph_\alpha$$

elde edilir.

Önce savımızı $\aleph_0$ için kanıtlayalım. Zaten $f(\aleph_0) \geq \aleph_0$ olduğunu biliyoruz. Şimdi $f(\aleph_0) > \aleph_0$ olamayacağını görelim. $\aleph_0 = \omega$ olduğunu gözetirsek $F[\omega \times \omega] = f(\omega) > \omega$ olduğunu varsayalım. Böylece $\omega \in F[\omega \times \omega]$, ve F bir tameşleme olduğundan tek olarak belirli $(m, n) \in \omega \times \omega$ ile $F(m, n) = \omega$ olur. $k := \max(m, n) + 1$ olmak üzere $(m, n) \prec (0, k)$ olduğundan

$$\omega = F(m, n) < F(0, k) = F[k \times k]$$

elde edilir. Bu ise bize

$$\omega = \aleph\omega \leq \aleph(k \times k) = k * k = k^2 < \omega$$

çelişkisini verir. Böylece $F[\omega \times \omega] = f(\omega) = \omega$.

Şimdi $C := \{\alpha \mid f(\aleph_\alpha) > \aleph_\alpha\} \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım ve $\alpha := \min C$ olsun. $\alpha > 0$. Tanım gereği $\aleph_\alpha < f(\aleph_\alpha) = F[\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha]$, dolayısıyla $\aleph_\alpha \in F[\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha]$. Bu nedenle tek olarak belirli $\sigma^* = (\sigma_1, \sigma_2) \in \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ ile $F(\sigma^*) = \aleph_\alpha$. Ancak $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ ise Srs^2 'de $(0, \aleph_\alpha)$ öğesinin uzantısı olduğundan $\max \sigma^* < \aleph_\alpha$ 'dır. $\aleph_\alpha$ bir limit sıra sayısı olduğundan $\rho := \max \sigma^* + 1 < \aleph_\alpha$, dolayısıyla $(\sigma_1, \sigma_2) \prec (0, \rho)$ olur. Buradan da $\aleph_\alpha$ bir çokluk sayısı olduğundan bir yandan $\aleph_\beta := \aleph\rho < \aleph_\alpha$, diğer yandan

$$\aleph_\alpha = F(\sigma_1, \sigma_2) < F(0, \rho) = F[\rho \times \rho]$$

olur. Son bağıntıdan ve α 'nın minimal özelliğinden

$$\aleph_\alpha \leq \aleph(\rho \times \rho) = \aleph\rho * \rho = \aleph_\beta * \aleph_\beta = \aleph_\beta < \aleph_\alpha$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Böylece (*) kanıtlamıştır ve her α için $f(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha$, dolayısıyla $\aleph_\alpha * \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

Şimdi κ ve λ en az biri sonsuz olan iki çokluk sayısı ve gbk. $\kappa \leq \lambda$ olsun. Toplam ve çarpımın monotonluğundan (*) ile

$$\lambda = 0 \dot{+} \lambda \leq \kappa \dot{+} \lambda \leq \lambda \dot{+} \lambda = \lambda * 2 \leq \lambda * \lambda = \lambda$$

ve ayrıca $\kappa > 0$ ise

$$\lambda = \lambda * 1 \leq \lambda * \kappa \leq \lambda * \lambda = \lambda$$

elde edilir. ■

Sonuç 2.15.13 1. Her sonsuz çokluk sayısı κ ve her $0 < n < \omega$ için $!\kappa^n = \kappa$.

2. κ ve λ çokluk sayıları, $2 \leq \lambda \leq !2^\kappa$ ve $\kappa \geq \omega$ ise $!\lambda^\kappa = !2^\kappa$. Özellikle $!\kappa^\kappa = !2^\kappa$.

Kanıt. 1. $\kappa * \kappa = \kappa$ eşitliğinden yola çıkan ve Hessenberg Teoremi'ni kullanan basit bir tümevarımla kanıtlanır.

2. Üssün zayıf monotonluğundan ((2.13.10)(3)):

$$!2^\kappa \leq !\lambda^\kappa \leq !(!2^\kappa)^\kappa = !2^{\kappa * \kappa} = !2^\kappa. \blacksquare$$

Örnek 2.15.14 Her şeyden önce $!\omega^\omega = !2^\omega = \mathfrak{c}$ olur. Aslında Sonuç 2.15.13 (2) ilginç bir gerçeği dile getirir: Sonsuz bir A kümesinden bir

B kümesine olan fonksiyonların çokluğunda A kümesi daha belirleyicidir. Özellikle $2 \leq \aleph B \leq \aleph \mathcal{P}(A)$ olduğu sürece bu çokluk değişmez ve $\aleph \mathcal{P}(A)$ 'ye eşittir. $\square$

Örnek 2.15.15 $\kappa \geq \omega$ bir çokluk sayısı, μ ise $1 \leq \mu \leq \kappa$ koşulunu sağlayan bir başka çokluk sayısı olsun. A bir küme ve $\aleph A = \kappa$ ise A 'nın öğelerini her bir öğesi tam μ kez bulunacak biçimde bir $(a_\xi)_{\xi < \kappa}$ dizisine dönüştürebileceğimizi kanıtlayacağız. Bazı problemlerin çözümünde bu tür diziler işimize yaramaktadır. Hessenberg Teoremi'nden dolayı $\kappa * \mu = \kappa$. Dolayısıyla $A \times \mu =: A^*$ kümesinin çokluğu κ 'dır. Dolayısıyla bir $f : \kappa \rightleftharpoons A^*$ tameslemesi vardır. Her $\xi \in \kappa$ için $f(\xi) = (a_\xi, \nu_\xi)$ olsun. İkinci koordinatları unutarak elde ettiğimiz $(a_\xi)_{\xi < \kappa}$ dizisi istenen koşulu sağlar. $\square$

Örnek 2.15.16 A kümesi sonsuz ve $\aleph A = \kappa$ ise $S(A) := \{f \mid f : A \rightleftharpoons A\}$ tameslemelerinin kümesinin gücünün $!2^\kappa$ olduğunu gösteriniz. (2.15.13)'ten $\aleph^A A = !\kappa^\kappa = !2^\kappa$ olduğunu biliyoruz. $S(A) \subseteq {}^A A$ olduğundan $\aleph S(A) \leq !2^\kappa = \aleph \mathcal{P}(A)$. Her $f \in S(A)$ için $sabf := \{x \in A \mid f(x) = x\}$ olsun. A kümesinin tek öğeli altkümelerinin gücü $\aleph A$ 'dır. A sonsuz olduğundan ise A kümesinin tümleyenini en az iki öğeli olan altkümelerinin $\mathcal{P}_2(A)$ kümesinin gücü yine $\mathcal{P}(A)$ 'nin gücüne eşittir.

$$\psi : S(A) \twoheadrightarrow \mathcal{P}(A) \quad (f \rightsquigarrow sabf)$$

fonksiyonunun resmi $\mathcal{P}_2(A)$ 'yi kapsadığından (ödev, prob. 4.0.2'ye bkz.) $\aleph \mathcal{P}_2(A) = !2^\kappa \leq \aleph S(A)$. Böylece $\aleph S(A) = !2^\kappa$. $\square$

Örnek 2.15.17 Cantor herhangi bir α sıra sayısı için $[\aleph_\alpha, \aleph_{\alpha+1})$ aralıklarını ve ayrıca $[0, \omega)$ aralığını sayı sınıfları olarak adlandırır. $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha \sqcup [\aleph_\alpha, \aleph_{\alpha+1})$ olduğundan

$$\aleph_{\alpha+1} = \max\{\aleph_\alpha, \aleph[\aleph_\alpha, \aleph_{\alpha+1})\} = \aleph[\aleph_\alpha, \aleph_{\alpha+1})$$

olur. $[\aleph_\alpha, \aleph_{\alpha+1})$ aralığı tam da gücü $\aleph_\alpha$ olan tüm sıra sayılarının kümesidir, dd.

$$[\aleph_\alpha, \aleph_{\alpha+1}) = \{\beta \in Srs \mid \beta \sim \aleph_\alpha\}. \square$$

Örnek 2.15.18 Problem: Düzlemin öyle bir altkümelerini bulunuz ki, y -eksenine paralel her doğruyu tam bir noktada, x -eksenine paralel her doğruyu ise sonsuz noktada kessin. Böyle bir küme elbette bir $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafıdır. Şimdi $\mathbb{R}$ 'de

$$xRy :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

ile bir denklik bağıntısı tanımlayalım. Her bir denklik sınıfı bir $r \in \mathbb{R}$ ile $r + \mathbb{Q}$ tipinde olduğu için her bir denklik sınıfının çokluk sayısı $\aleph_0$ 'dır. Diğer

yandan $\kappa := \aleph(\mathbb{R}/R)$ dersek, $\mathbb{R} = \bigcup_{p \in \mathbb{R}/R} p$ bir ayrık birleşim olduğundan $\mathfrak{c} = \kappa * \aleph_0$ olur. $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/R$ bölüm dönüşümü örten olduğundan $\kappa \leq \mathfrak{c}$ olur. $\aleph_0 < \mathfrak{c}$ olduğundan Hessenberg Teoremi'den $\kappa = \mathfrak{c}$ olmalıdır. $f : \mathbb{R} \rightleftharpoons \mathbb{R}/R$ bir tameşleme ve her $c \in \mathbb{R}$ için $p_c := f(c)$ olsun. Her bir p_c kümesi $\mathbb{R}$ 'de yoğun ve $\{p_c\}_{c \in \mathbb{R}}$ ise $\mathbb{R}$ kümesinin bir parçalanışı olduğundan

$$g := \bigcup_{c \in \mathbb{R}} p_c \times \{c\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

kümesinin şu iki özelliği vardır: (1) g kümesi y -eksenine paralel her doğruyu tam bir noktada keser; bu $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ demektir. (2) g fonksiyonu her $c \in \mathbb{R}$ değerini herhangi bir (a, b) aralığında sonsuz kez alır, tam da $p_c \cap (a, b)$ noktalarında! Elbette g fonksiyonu bir Darboux fonksiyonudur ve hiçbir yerde sürekli değildir ama her aralıkta aradeğer özelliğine sahiptir. Bu örnekle aradeğer özelliğinin sürekli fonksiyonlara özgü olmadığını bir kez daha kanıtlamış olduk. $\square$

Teorem 2.15.19 $\kappa \geq \omega$ bir çokluk sayısı olsun. Her $\alpha \in \kappa$ için bir A_α kümesi $\aleph(A_\alpha) \leq \kappa$ olacak biçimde verilsin. Bu koşullarda $\aleph(\bigcup_{\alpha \in \kappa} A_\alpha) \leq \kappa$.

Kanıt. Her A_α kümesi $\kappa \times \{\alpha\}$ 'nın bir A_α^* altkümesi ile eşgüçlüdür ve $\bigcup_{\alpha \in \kappa} A_\alpha^* \subseteq \kappa \times \kappa$ olduğundan

$$\aleph\left(\bigcup_{\alpha \in \kappa} A_\alpha\right) \leq \aleph\left(\bigcup_{\alpha \in \kappa} A_\alpha^*\right) \leq \aleph(\kappa \times \kappa) = \kappa * \kappa = \kappa.$$

■

Özel olarak $\kappa = \omega$ ise bu teorem daha önce başka yöntemlerle kanıtladığımız *sayılabilir çoklukta sayılabilir kümelerin birleşimi de sayılabilir* önermesine dönüşür.

Önerme 2.15.20 λ bir sonsuz çokluk sayısı olsun ve her $\alpha < \lambda$ için $\kappa_\alpha > 0$ çokluk sayıları verilsin. Bu durumda

$$\sum_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha = \lambda * \sup_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha = \max\{\lambda, \sup_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha\}.$$

Kanıt. $\kappa := \sup_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha$ ve $\sigma = \sum_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha$ olsun. Her $\alpha < \lambda$ için $\kappa_\alpha \leq \kappa$ olduğundan

$$\sigma \leq \sum_{\alpha < \lambda} \kappa = \lambda * \kappa = \max\{\lambda, \kappa\}.$$

Diğer yandan her $\alpha < \lambda$ için $\sigma \geq \kappa_\alpha \geq 1$ olduğundan $\sigma \geq \sum_{\alpha < \lambda} 1 = \lambda$ ve $\sigma \geq \sup_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha = \kappa$. Dolayısıyla $\sigma \geq \max\{\lambda, \kappa\} = \lambda * \kappa$. ■

Örnek 2.15.21 X bir sonsuz küme ve $\kappa := \aleph X$ olsun. Her $n \in \omega$ için

$$[X]^n := \{x \subseteq X \mid \aleph x = n\} \text{ ve } [X]^{<\omega} := \{x \subseteq X \mid \aleph x < \omega\}$$

ise her $1 \leq n < \omega$ için $\aleph[X]^n = \aleph[X]^{<\omega} = \kappa$ olduğunu gösteriniz. Her şeyden önce $1 \leq n < \omega$ için $\kappa \leq \aleph[X]^n$ olduğu aşıkardır (prob. 2.15.3). Diğer yandan

$$X^n \longrightarrow [X]^n ((x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow \{x_1, \dots, x_n\})$$

örten olduğundan (2.15.13) (1) ile $\aleph[X]^n \leq \aleph X^n = \aleph \kappa^n = \kappa$. Sonuçta $\aleph[X]^n = \kappa$. $[X]^{<\omega} = \bigcup_{n < \omega} [X]^n$ olduğun ise (2.15.20) ile $\kappa \leq \aleph[X]^{<\omega} \leq \max\{\aleph_0, \kappa\} = \kappa$ elde edilir ve işimiz biter. □

Örnek 2.15.22 V, W birer $\mathbb{K}$ vektör uzayı, B ise bu V vektör uzayının bir bazı, $\kappa := \aleph W$ ve $\mu := \aleph B$ olsun. $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ile $\mathbb{K}$ doğrusal $f : V \longrightarrow W$ dönüşümlerinin kümesini gösterelim. Bu durumda

$$\aleph \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) = \aleph \kappa^\mu, \text{ ayrıca } \aleph \mathbb{K} \geq \aleph_0, \mu \geq \aleph_0 \text{ ise } \aleph V = \aleph \mathbb{K} * \aleph B$$

olduğunu gösteriniz.

(1) Her $f : V \longrightarrow W$ doğrusal dönüşümü tek olarak belirli bir $g := f|B : B \longrightarrow W$ dönüşümü verir ve tersine her $g : B \longrightarrow W$ dönüşümü tek biçimde bir $f : V \longrightarrow W$ doğrusal dönüşümüne genişletilebilir. Bu nedenle $\aleph \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) = \aleph^B W = \aleph \kappa^\mu$.

(2) Şimdi $\nu := \aleph \mathbb{K} \geq \aleph_0, \mu \geq \aleph_0$ olsun. $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ olmak üzere $K^* \times B \longrightarrow V ((k, x) \rightsquigarrow kx)$ dönüşümü birebirdir. Bu nedenle $\nu * \mu \leq \aleph V$. Diğer yandan her $1 \leq n < \omega$ ve her $b = \{b_1, \dots, b_n\} \in [B]^n$ için

$$W_b := \left\{ \sum_{1 \leq i \leq n} k_i b_i \mid k_1, \dots, k_n \in \mathbb{K} \right\} \sim \mathbb{K}^n$$

olduğundan $\aleph W_b = \nu^n = \nu$. Her $1 \leq n < \omega$ için $V_n := \bigcup_{b \in [B]^n} W_b$ dersek (2.15.20) ve (2.15.21) ile $\aleph V_n \leq \sum_{b \in [B]^n} \aleph W_b \leq \mu * \nu$ olur. $V = \bigcup_{1 \leq n < \omega} V_n$ olduğundan ise $\aleph V \leq \aleph_0 * (\mu * \nu) = \mu * \nu$ olur ve işimiz biter. □

Örnek 2.15.23 $\mathbb{R}$ 'nin $\mathbb{Q}$ vektör uzayı olarak boyutunun $\mathfrak{c}$ olduğunu gösteriniz. Her şeyden önce $\mathbb{R}$ 'nin $\mathbb{Q}$ vektör uzayı olarak boyutu sonlu, örneğin n olamaz. Çünkü bu bize $\mathbb{R} \sim \mathbb{Q}^n$, dolayısıyla $\mathfrak{c} = \aleph_0$ çelişkisini verir. Dolayısıyla B , $\mathbb{R}$ 'nin bir $\mathbb{Q}$ bazı ise $\mu = \aleph B$ sonsuzdur. (2.15.22)'den $\mathfrak{c} = \mu * \aleph_0 = \mu$ elde edilir. □

Örnek 2.15.24 Tam $!^{\mathfrak{c}}$ çoklukta sürekli olmayan toplamsal $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümlerinin varlığını kanıtlayınız. Her şeyden önce (2.15.13)'ten $2 \leq$

$\mathfrak{c} \leq !2^{\mathfrak{c}}$ olduğundan $! \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = !2^{\mathfrak{c}}$ elde edilir. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir toplamsal fonksiyonsa, dd.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} (f(x + y) = f(x) + f(y))$$

ise önce tümevarımla f 'nin $\mathbb{N}$ doğrusal, ardından da sırasıyla $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ doğrusal olduğu kolayca görülür (Prob.(4.0.8)). $\mathbb{R}$ 'nin $\mathbb{R}$ -boyutu 1, $\mathbb{Q}$ -boyutu ise $\mathfrak{c}$ olduğundan örnek 2.15.22 ve 2.15.23'ten

$$\natural Hom_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = ! \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = !2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c} = ! \mathfrak{c}^1 = \natural Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

elde edilir. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{Q}$ -doğrusal ve ayrıca sürekli ise $\mathbb{R}$ -doğrusal olduğunu görmek için temel analiz bilgisi yeterlidir (prob. 4.0.9). Böylece $!2^{\mathfrak{c}}$ toplamsal dönüşümden sürekli olanlar $\mathfrak{c}$, sürekli olmayanlar ise $!2^{\mathfrak{c}}$ çokluktadır. $\square$

Önerme 2.15.25 λ bir çokluk sayısı olsun ve $Cks \setminus \{0\}$ 'da bir $(\kappa_{\alpha})_{\alpha < \lambda}$ dizisi verilsin.

1. $\lambda < \omega$ ve en az bir κ_{α} sonsuz ise

$$\prod_{\alpha < \lambda}^* \kappa_{\alpha} = \sup_{\alpha < \lambda} \kappa_{\alpha}.$$

2. $\lambda \geq \omega$ ve ayrıca $(\kappa_{\alpha})_{\alpha < \lambda}$ dizisi artan, dd. $\alpha < \beta < \lambda$ ise $\kappa_{\alpha} \leq \kappa_{\beta}$ olsun. Bu koşullarda

$$\prod_{\alpha < \lambda}^* \kappa_{\alpha} = !(\sup_{\alpha < \lambda} \kappa_{\alpha})^{\lambda}.$$

Kanıt. 1. Hessenberg+Tümevarım.

2.a. $\kappa := \sup_{\alpha < \lambda} \kappa_{\alpha}$ olsun.

$$\prod_{\alpha < \lambda}^* \kappa_{\alpha} \leq \prod_{\alpha < \lambda}^* \kappa = !\kappa^{\lambda}.$$

2.b. λ bir sonsuz çokluk sayısı olduğu için (2.15.12)'dan dolayı bir $f : \lambda \times \lambda \rightleftharpoons \lambda$ tameşlemesi vardır. Her bir $\alpha \in \lambda$ için $A_{\alpha} := f[\lambda \times \{\alpha\}]$ olsun. Elbette $\{A_{\alpha}\}_{\alpha \in \lambda}$ küme ailesi λ kümesinin bir parçalanışdır ve her α için $\natural A_{\alpha} = \lambda$. Diğer yandan A_{α} kümesi λ kümesinde üstten sınırlı değildir. Gerçekten de bir an için $A_{\alpha} \subseteq \beta < \lambda$ olduğunu varsayalım. $\natural A_{\alpha} = \lambda$ olduğundan (2.5.6) ile $\beta \smile \lambda$ olur ki bu λ 'nın bir çokluk sayısı olmasıyla

çelişir. $(\kappa_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ dizisi artan ve A_α kümesi λ 'da üstten sınırlı olmadığından $\sup_{\beta \in A_\alpha} \kappa_\beta = \kappa$. Ayrıca daima $\kappa_\alpha \geq 1$ olduğundan

$$\prod_{\beta \in A_\alpha}^* \kappa_\beta \geq \sup_{\beta \in A_\alpha} \kappa_\beta = \kappa.$$

Buradan da not 2.7.3 (5)'teki gruplama özelliği ile

$$\prod_{\alpha < \lambda}^* \kappa_\alpha = \prod_{\alpha < \lambda}^* \left(\prod_{\beta \in A_\alpha}^* \kappa_\beta \right) \geq \prod_{\alpha \in \lambda}^* \kappa = !\kappa^\lambda$$

elde edilir ki bu (2.a) ile birlikte savı kanıtlar. ■

Not 2.15.26 Bu önermede λ çokluk sayısı yerine bir $\beta \in Srs \setminus Cks$ sıra sayısı alırsak savımız genelde doğru kalmaz. Örneğin $\beta = \omega + 1$ olmak üzere her $n \in \omega$ için $\kappa_n = 1$ ve $\kappa_\omega = \aleph_0$ olsun. Bu koşullarda $\aleph^\beta = \aleph_0$ ve $\sup_{\alpha < \beta} \kappa_\alpha = \aleph_0$, dolayısıyla $\prod_{\alpha < \beta}^* \kappa_\alpha = \aleph_0 < !\aleph_0^{\aleph_0} = !(\sup_{\alpha < \beta} \kappa_\alpha)^{\aleph^\beta}$. □

Not 2.15.27 $1 * 2 * 3 * 4 * \dots = \prod_{1 \leq n < \omega}^* n = !(\sup_{n < \omega} n)^\omega = !\omega^\omega = \mathfrak{c}$. Her $n \geq 1$ doğal sayısı için $1 * 2 * \dots * n = 1 \times 2 \times \dots \times n$ olmasına karşın $\prod_{1 \leq n < \omega}^* n$ çokluk çarpımı analizde öğrendiğimiz $\prod_{n=1}^{+\infty} n$ sonsuz çarpımından tümüyle farklı bir kavramdır. Bu sonuncu çarpım iraksaktır ve bir değer verilmek istense bu $+\infty$ olarak açıklanır. □

Teorem 2.15.28 (König, J.) *I bir küme olmak üzere her $i \in I$ için κ_i ve λ_i çokluk sayıları her i için $\kappa_i < \lambda_i$ olacak biçimde verilsinler. Bu durumda*

$$\sum_{i \in I}^* \kappa_i < \prod_{i \in I}^* \lambda_i.$$

Kanıt. 1. Her $i \in I$ için $\kappa_i < \lambda_i$, dolayısıyla $\kappa_i \subset \lambda_i$ olduğundan $\lambda_i \setminus \kappa_i \neq \emptyset$. Seçme Aksiyomundan dolayı bir $b = (\beta_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} (\lambda_i \setminus \kappa_i)$ vardır. Şimdi bir

$$g_j : \kappa_j \rightarrow \prod_{i \in I} \lambda_i$$

birebir fonksiyonunu her $\alpha \in \kappa_j$ için $g_{jj}(\alpha) := \alpha$ ve $i \neq j$ için $g_{ji}(\alpha) := \beta_i$ olmak üzere $g_j(\alpha) := (g_{ji}(\alpha))_{i \in I}$ olarak açıklayalım. g_j dönüşümü κ_j kümesini çarpım uzayına b seviyesinden gömen dönüşümdür. $\kappa_i^* := g_i[\kappa_i]$ olmak üzere $\kappa_i \sim \kappa_i^*$. Ayrıca $i \neq j$ için κ_i^* ve κ_j^* kümeleri, bu kümelere ait noktaların tanım gereği i . ve j . koordinatları farklı olduklarından ayrıktyrlar. Böylece

$$\sum_{i \in I}^* \kappa_i = \aleph \left(\bigsqcup_{i \in I} \kappa_i^* \right) \text{ ve } \bigsqcup_{i \in I} \kappa_i^* \subseteq \prod_{i \in I} \lambda_i$$

olduğundan

$$\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \prod_{i \in I} \lambda_i$$

olur.

2. Şimdi ise her $i \in I$ için $A_i \subseteq \prod_{i \in I} \lambda_i$ kümeleri $\aleph A_i \leq \kappa_i$ olacak biçimde verildiğinde asla $\bigcup_{i \in I} A_i = \prod_{i \in I} \lambda_i$ olamayacağını göstereceğiz; bu ise örten bir

$$h : \bigcup_{i \in I} \kappa_i \times \{i\} \longrightarrow \prod_{i \in I} \lambda_i$$

dönüşüm olamayacağı anlamına gelir ve işimiz biter. Burada yine Cantor köşegen yöntemiyle bir $\sigma = (\sigma_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \lambda_i$ ögesini, i . koordinatı olan σ_i 'yi A_i kümesinin *her bir* ögesinin i . koordinatından farklı olacak biçimde seçeceğiz. P_j kümesi A_j kümesinin j . izdüşümü olsun, d.d

$$P_j := \{a_j \mid \exists a = (a_i)_{i \in I} \in A_j\}.$$

$\aleph P_j \leq \aleph A_j \leq \kappa_j < \lambda_j$ olduğundan $\lambda_j \setminus P_j \neq \emptyset$. Seçme Aksiyomundan dolayı her $i \in I$ için $\sigma_i \in \lambda_i \setminus P_i$ ögelerini seçebiliriz. Şimdi $\sigma = (\sigma_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \lambda_i$. Ancak A_i kümesinin ögelerinin i . koordinatları σ_i 'den farklı olduğundan her i için $\sigma \notin A_i$, dolayısıyla $\sigma \notin \bigcup_{i \in I} A_i$. ■

Not 2.15.29 Cantor teoremi König Teoremi'den hemen kazanılır. κ bir çokluk sayısı olmak üzere König Teoremi'den

$$\kappa = \sum_{\alpha < \kappa} 1 < \prod_{\alpha < \kappa}^* 2 = !2^\kappa. \square$$

Not 2.15.30 König Teoremi'nde *bir tek* i için bile $\kappa_i = \lambda_i$ olsa artık kesin eşitsizlik olması gerekmez. Örneğin $I = \omega$, $\kappa_0 = \lambda_0 = \mathfrak{c}$, ve $1 \leq n < \omega$ içinse $\kappa_n = \aleph_0$, $\lambda_n = \aleph_1$ olsun.

$$\sum_{n \in \omega} \kappa_n \stackrel{(2.15.25)}{=} \aleph_0 * \sup_{n \in \omega} \kappa_n = \aleph_0 * \mathfrak{c} \stackrel{(2.15.12)}{=} \mathfrak{c}.$$

Diğer yandan

$$\begin{aligned} \prod_{n \in \omega}^* \lambda_n &= \lambda_0 * \prod_{1 \leq n \in \omega}^* \lambda_n \stackrel{(2.15.20)}{=} \mathfrak{c} * \left(\sup_{1 \leq n \in \omega} \lambda_n \right)^{\aleph_0} \\ &= \mathfrak{c} * \aleph_1^{\aleph_0} \stackrel{(2.15.13)}{=} \mathfrak{c} * !2^{\aleph_0} \stackrel{(2.15.12)}{=} \mathfrak{c}. \square \end{aligned}$$

Önerme 2.15.31 I bir küme olmak üzere her $i \in I$ için $\kappa_i \geq 2$ ise

$$\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \prod_{i \in I}^* \kappa_i.$$

Kanıt. 1. $I = \{i_0, \dots, i_n\}$ sonlu bir kümeysen doğal bir

$$f : \bigsqcup_{i \in I} \kappa_i \times \{i\} \rightarrow \prod_{i \in I} \kappa_i$$

gömme fonksiyonu vardır: $f(\alpha_i, i) := (0, \dots, 0, \overset{\downarrow i}{\alpha_i}, 0, \dots, 0)$. Sav buradan çıkar.

2. Şimdi I bir sonsuz küme olsun. $\mu := \aleph I$ olmak üzere

$$\mu < 2^\mu = \prod_{i \in I}^* 2 \leq \prod_{i \in I}^* \kappa_i.$$

Bu nedenle

$$\mu * \prod_{i \in I}^* \kappa_i = \prod_{i \in I}^* \kappa_i.$$

Bu ve

$$F : \prod_{i \in I} \kappa_i \times I \longrightarrow \bigsqcup_{i \in I} \kappa_i \times \{i\} ((f, i) \rightsquigarrow (f(i), i))$$

dönüşümünün örten olması savı verir. ■

Problem 2.15.1 Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

1. $\forall \alpha (\aleph \alpha = \min\{\beta \mid \beta \smile \alpha\} \wedge \aleph \alpha = \aleph \alpha)$.
2. $\forall \alpha \aleph \alpha \leq \alpha$.
3. $\forall \alpha, \beta (\alpha \leq \beta \implies \aleph \alpha \leq \aleph \beta)$.
4. $\kappa \in Cks \implies \forall \alpha (\alpha < \kappa \iff \aleph \alpha < \kappa)$.
5. F bir fonksiyon ve $\tan F$ bir küme ise $\aleph \text{res} F \leq \aleph \tan F$.

Problem 2.15.2 $\mathcal{K} : Srs \longrightarrow Cks$ fonksiyonunun yapısal olduğunu kanıtlayınız.

Problem 2.15.3 Her X kümesi için $\aleph X \leq \aleph[X]$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.15.4 λ bir çokluk sayısı, $(\kappa_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ çokluk sayılarının bir artan dizisi olsun. $\sup A = \lambda$ koşulunu sağlayan her $A \subseteq \lambda$ için $\sup_{\alpha \in A} \kappa_\alpha = \sup_{\alpha < \lambda} \kappa_\alpha$ olduğunu gösteriniz.

Problem 2.15.5 Önerme 2.15.31’de “her $i \in I$ için $\kappa_i \leq 2$ ” koşulunun niçin gerekli olduğunu söyleyiniz.

2.16 SONDAŞLIK, DÜZENLİ VE TEKİL ÇOKLULUKAR

Bu bölümde bir tür ulaşılabilme ölçüsü olan *sondaşlığı* öğreneceğiz. Bir α sıra sayısının $sd(\alpha)$ sondaşlığı kısaca, ona yakınsayan kesin artan $(\alpha_\xi)_{\xi < \lambda}$ dizilerinin $\aleph_\lambda$ çokluk sayılarının minimumudur. Bu bize kesin artan bir diziyle α sıra sayısına $sd(\alpha)$ adımda ulaşabileceğimizi, buna karşın $\aleph_\lambda < sd(\alpha)$ ise α sıra sayısının hiçbir kesin artan $(\alpha_\xi)_{\xi < \lambda}$ dizisinin limiti olamayacağını söyler. $\kappa = sd(\kappa)$ olan çokluk sayılarına *düzenli*, diğer çokluk sayılarına ise *tekil* çokluklar denir.

ω limit sıra sayısının her $n \in \omega$ için

$$A_n = 2^n \mathbb{N} = \{2^n \cdot 0, 2^n \cdot 1, 2^n \cdot 2, 2^n \cdot 3, \dots\}$$

altkümelerini tanımlayalım. İyi sıralanmış ω kümesinin altkümeleri olarak tüm bu kümelerin bir ortak özelliği her birinin ω 'da üstten sınırlı olmamalarıdır. Başka deyişle her n için $\omega = \sup A_n$. Herhangi bir λ *limit* sıra sayısının herhangi bir $x \subseteq \lambda$ altkümesi λ 'da üstten sınırlı değilse, dd. $\sup x = \lambda$ ise x kümesi λ 'da *sondaştır* diyeceğiz. Ancak önce tanımı daha genel tutacağız.

Tanım 2.16.1 $(X, <)$ *kısmi sıralanmış bir küme olsun. $A \subseteq X$, ve $f : Y \longrightarrow X$ verilsin.*

1. A kümesi X 'te **sondaştır** : $\iff \forall x \in X \exists a \in A \ x \leq a$.
2. $f : Y \longrightarrow X$, X 'te **sondaştır** : $\iff f[Y]$, X 'te sondaştır.
3. $sd(X) := \min\{\aleph_A \mid A \text{ kümesi } X \text{ 'te sondaştır}\}$ *çokluk sayısına X 'in sondaşlığı denir.*

*Sondaş kavramının ikilisi olan **baştaş** tanımını okuyucuya bırakıyoruz.*

Örnek 2.16.2 Örneğin $(\mathbb{Z}, <)$ sıralanmış kümesinde herhangi $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$, $b_0 < b_1 < b_2 < \dots$, $\dots < a'_2 < a'_1 < a'_0$ ve $\dots < b'_2 < b'_1 < b'_0$ dizileri verildiğinde $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, $B = \{b_0, b_1, b_2, \dots\}$, $A' = \{a'_0, a'_1, a'_2, \dots\}$ ve $B' = \{b'_0, b'_1, b'_2, \dots\}$ olmak üzere A ve B sondaş, A' ve B' ise baştaşır.

Yine doğal sıralamayla alınmış $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinde $\mathbb{N}$ kümesi sondaştır. Doğal sıralamayla alınmış $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ aralığında $\{\frac{n}{n+1} \mid n < \omega\}$ sondaştır ve $\{\frac{1}{n} \mid 1 \leq n < \omega\}$ baştaşır. $\square$

Örnek 2.16.3 ω 'nın her sonlu altkümesinin bir maksimumu olacağından bu altküme sınırlıdır ve ω 'da sondaş olamaz. Diğer yandan örneğin tek

doğal sayıların kümesi ω 'da sondaştır. ω kümesinin her sonsuz altkümesinin gücü $\aleph_0 = \omega$ olduğundan böylece $sd(\omega) = \omega$ elde ederiz. $\square$

Örnek 2.16.4 λ herhangi bir limit sıra sayısı olmak üzere $\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ kümesi $\aleph_\lambda$ kümesinde, tanım gereği $\aleph_\lambda = \sup_{\alpha < \lambda} \aleph_\alpha$ olduğundan, sondaştır. Özellikle $\{\aleph_n \mid n < \omega\}$ kümesi $\aleph_\omega$ kümesinde sondaştır ve ikinci örnekteki koşut bir irdelemeyle $sd(\aleph_\omega) = \omega$ olduğu kolayca görülür. Ancak biz $\omega < \aleph_\omega$ olduğunu biliyoruz! $\square$

Şimdi bizi ilgilendiren *iyi sıralanmış* kümelerle dönelim. $(X, <)$ iyi sıralanmış bir küme olsun. A kümesinin X 'de sondaş olması A kümesinde istenildiği kadar büyük öğelerin olması demektir. Eğer $\exists \max X =: m$ ise A kümesinin sondaş olması için gerek ve yeter koşul m öğesini içermesidir. Bu durum ilginç değildir. Herhangi bir $\emptyset \neq A \subseteq X$ altkümesi verilsin. $\exists \min A$ olduğundan A kümesi alttan sınırlıdır ve baştaşlık ilginç değildir. İyi sıralanmış bir kümenin herhangi bir altkümesine **sınırsızdır** dediğimizde kastedilen elbette ancak *üstten sınırlı değildir* olabilir. İlginç olan tek durum X kümesinin büyük öğesinin olmadığı durumda sondaşıktır. *Bu durumda ise*

$$\begin{aligned} A \text{ kümesi } X' \text{te sondaştır} &\iff \forall x \in X \exists a \in A (x < a) \\ &\iff A, X' \text{te sınırsızdır.} \end{aligned}$$

α bir ardılsa, dd. bir β ile $\alpha = \beta + 1$ ise A kümesinin α 'da sondaş olması için gerek ve yeter koşul $\beta = \alpha - 1 = \max \alpha$ öğesinin A 'da olmasıdır. Bu durumda $A = \{\beta\}$ kümesi α 'da sondaş olduğundan ve α 'da sondaş her küme β öğesini içereceğinden $sd(\alpha) = 1$ olur. Özetle sondaşlık ancak limit sıra sayılar için ilginçtir. Olayı bizi gerçekten ilgilendirecek durumda dile getirelim. α bir *limit* sıra sayısı ve $x \subseteq \alpha$ olmak üzere:

$$\begin{aligned} x \text{ kümesi } \alpha' \text{da sondaştır.} &\iff \forall \beta \in \alpha \exists \xi \in x (\beta < \xi < \alpha). \\ &\iff x, \alpha' \text{da üstten sınırlı değildir.} \\ &\iff \sup x = \sup^+ x = \alpha. \end{aligned}$$

Şimdi

$$\alpha \in Lim \implies sd(\alpha) \geq \omega \quad (2.19)$$

olduğunu savunuyoruz. Gerçekten de $x \subseteq \alpha$ sonlu bir kümeysen

$$\sup x = \max x \in x \subseteq \alpha \implies \sup x \in \alpha$$

, dolayısıyla $\sup x < \alpha$ olacağından x kümesi α 'da sondaş değildir. Bu ise $sd(\alpha) \geq \omega$ demektir.

Önerme 2.16.5 $\alpha \in Lim$ olsun.

1. $sd(\alpha) = \min\{\beta \mid \exists f : \beta \longrightarrow \alpha \text{ yapısal ve sondaş}\}$.
2. α 'nın iyi sıralanmış küme olarak $sd(\alpha)$ ile eşyapılı olan bir altkümesi vardır.
3. Her $\alpha \in Srs$ için $sd(\alpha)$ bir çokluk sayıdır.

Kanıt. 1. “ $\leq$ ” : $A := \{\beta \mid \exists f : \beta \longrightarrow \alpha \text{ yapısal ve sondaş}\}$ olsun. $f : \beta \longrightarrow \alpha$ yapısal ve sondaş ise $\natural f[\beta] = \natural \beta \leq \beta$ ve $f[\beta]$, α 'da sondaş olduğundan tanım gereği $sd(\alpha) \leq \min A$.

“ $\geq$ ” : x kümesi α 'da sondaş ve $\kappa := sd(\alpha) = \natural x$ olsun. $\kappa \in A$ olduğunu kanıtlayacağız. $g : \kappa \rightleftharpoons x$ bir tameşleme olsun. Her $\xi \in \kappa$ için $x_\xi := g(\xi)$ olsun. Tekrarlamalı teorem yardımıyla yapısal bir $f : \kappa \rightarrow \alpha$ dönüşümünü şu biçimde bulabiliriz. i) $f(0) = x_0$. ii) $\beta < \kappa$ ise

$$f(\beta + 1) = \max\{x_\beta, f(\beta) + 1\}.$$

α bir limit sıra sayısı olduğundan elbette $f(\beta + 1) < \alpha$ olur. iii) $\lambda < \kappa$ bir limit sıra ise $f(\lambda) = \sup f[\lambda]$. Her $\beta < \lambda$ için $f(\beta) < \alpha$ ve $\lambda < sd(\alpha)$ olduğundan $f[\lambda]$ kümesi α 'da sondaş olamaz! Öyleyse $\sup f[\lambda] < \alpha$ ve dolayısıyla $f(\lambda) < \alpha$.

$f : \kappa \rightarrow \alpha$ tanım gereği yapısaldır (hatta süreklidir). f aynı zamanda α 'da sondaştır. Gerçekten de $\beta < \alpha$ keyfi verildiğinde x kümesi α 'da sondaş olduğundan bir $\xi \in \kappa$ ile $\beta < x_\xi < \alpha$ olur. Buradan ise

$$\beta < x_\xi \leq f(\xi + 1) < \alpha$$

elde edilir ve bu $f[\kappa]$ kümesinin α 'da sondaş olması demektir.

2. f fonksiyonu (1)'in kanıtındaki fonksiyon olmak üzere κ ve $f[\kappa]$ eşyapılıdır.

3. Doğrudan tanımdan çıkar. ■

Not 2.16.6 $\kappa = sd(\alpha)$ olduğunda yukarıda kanıtta bir normal sondaş $f : \kappa \longrightarrow \alpha$ dönüşümü tanımladık. α sıra sayısının $sd(\alpha)$ sondaşlığı (2.16.5)(1) gereğince α ile sondaş olan $x \subseteq \alpha$ altkümelerinin sıra sayılarının en küçüğüdür. □

Tanım 2.16.7 Bir $\alpha \in Lim$ sıra sayısına $sd(\alpha) = \alpha$ ise **düzenli**, $sd(\alpha) < \alpha$ ise **tekil** denir.

Her şeyden önce α düzenli ise sondaşlığın tanımından dolayı bir çokluk sayıdır. ω düzenlidir ancak $\aleph_\omega$ tekildir.

Önerme 2.16.8 1. $\forall \alpha \text{ } sd(\alpha) \leq \aleph \alpha \leq \alpha$.

2. x kümesi α 'da sondaş ise $sd(\alpha) \leq sr sx$.

3. α 'da verilen $(\beta_\xi)_{\xi < \lambda}$ dizisi kesin artan ve α 'da sondaş ise $sd(\lambda) = sd(\alpha)$.

4. Her α için $sd(sd(\alpha)) = sd(\alpha)$, dolayısıyla $sd(\alpha)$ düzenlidir.

5. $\forall \lambda (\lambda \in Lim \implies sd(\lambda) = sd(\aleph_\lambda))$.

Kanıt. 1. $\aleph \alpha \leq \alpha$ biliniyor. Her tamesleme $f : \aleph \alpha \rightleftharpoons \alpha$ sondaş olduğundan $sd(\alpha) \leq \aleph \alpha$.

2. $\beta := sr sx$ ise $\exists h : \beta \xrightarrow{\sim} x$. (2.16.5)(1)'den $sd(\alpha) \leq \beta$.

3. x, λ 'da sondaş ise $\{\beta_\xi \mid \xi \in x\}$ kümesi α 'da sondaştır. Bu nedenle $sd(\alpha) \leq sd(\lambda)$.

Şimdi $y \subseteq \alpha$ kümesi α 'da sondaş olsun. Her $\eta \in y$ için en az bir $\mu(\eta) \in \lambda$ ögesi $\eta \leq \beta_{\mu(\eta)}$ olacak biçimde vardır. $\{\mu(\eta) \mid \eta \in y\}$ kümesi λ 'da sondaştır ve dolayısıyla $sd(\lambda) \leq sd(\alpha)$.

4. $f : sd(\alpha) \longrightarrow \alpha$ ve $g : sd(sd(\alpha)) \longrightarrow sd(\alpha)$ dönüşümleri sondaş iseler $f \circ g : sd(sd(\alpha)) \longrightarrow \alpha$ de sondaştır ve (2.16.5)(1) ile $sd(\alpha) \leq sd(sd(\alpha))$ olur. Diğer yandan zaten $sd(sd(\alpha)) \leq sd(\alpha)$.

5. $\lambda \in Lim$ olmak üzere $(\aleph_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ dizisi $\aleph_\lambda$ 'da sondaş olduğundan (3)'ten $sd(\aleph_\lambda) = sd(\lambda)$. Özellikle

$$sd(\aleph_\omega) = sd(\omega) = \omega = \aleph_0.$$

■

Teorem 2.16.9 1. $\aleph_{\alpha+1}$ düzenlidir.

2. λ bir limit sıra sayısı ve $\lambda < \aleph_\lambda$ ise $\aleph_\lambda$ tekildir.

Kanıt. 1. $\aleph_{\alpha+1}$ çokluğunun tekil olduğunu varsayalım. $sd(\aleph_{\alpha+1}) < \aleph_{\alpha+1}$ ve $sd(\aleph_{\alpha+1})$ bir çokluk sayısı olduğundan $sd(\aleph_{\alpha+1}) \leq \aleph_\alpha$ olur. Bu durumda bir $x \subseteq \aleph_{\alpha+1}$ sondaş altkümesi $\aleph x \leq \aleph_\alpha$ ve $\sup x = \aleph_{\alpha+1}$ olacak biçimde vardır. Bu bize (2.15.20) ile aşağıdaki çelişkiyi verir:

$$\aleph_{\alpha+1} = \aleph \aleph_{\alpha+1} = \aleph \sup x = \aleph \left(\bigcup_{\xi \in x} x \right) \leq \max\{\aleph x, \sup_{\xi \in x} \aleph \xi\} = \aleph_\alpha.$$

2. (2.16.8)(5) ile $sd(\aleph_\lambda) = sd(\lambda) \leq \lambda < \aleph_\lambda$ elde edilir ki bu savı verir. ■

Teorem 2.16.10 Bir sonsuz κ çokluk sayısı için aşağıdaki önermeler denktirler.

1. κ düzenlidir.
2. $\forall x (x \subset \kappa \wedge \aleph x < \kappa \implies \sup x < \kappa)$.
3. I bir küme, $\aleph I < \kappa$ ve her $i \in I$ için κ_i çokluk sayıları ve $\kappa_i < \kappa$ ise $\sum_{i \in I} \kappa_i < \kappa$.

Kanıt. (1) $\implies$ (2) : Bir $x \subset \kappa \wedge \aleph x < \kappa$ için $\sup x = \kappa$ olsaydı tanım gereği $sd(\kappa) \leq \aleph x < \kappa$ olurdu ki bu κ 'nın düzenli olmasıyla çelişir.

(2) $\implies$ (3) : Bir an için savımızın yanlış olduğunu varsayalım ve $\sum_{i \in I} \kappa_i \geq \kappa$ olup savı bozan bu tip I kümelerinin arasından çokluğu en küçük olan bir I seçelim. Elbette I bir sonsuz küme olmak zorundadır. $\mu := \aleph I$ ve $f : \mu \rightarrow I$ bir tameşleme olsun. Her $\alpha \in \mu$ için

$$\nu_\alpha := \sum_{\beta \leq \alpha} \kappa_{f(\beta)} = \sum_{\beta \in \alpha+1} \kappa_{f(\beta)}$$

olsun. Her sonsuz çokluk sayısı bir limit sıra sayısı olduğundan $\alpha + 1 < \mu = \aleph I$ ve μ bir çokluk sayısı olduğu içinde $\aleph(\alpha + 1) < \mu$ olur. I 'nin minimal özelliğini gözönünde tutarsak $\nu_\alpha < \kappa$ olmak zorundadır. (2.15.20)'yi ve $x := \{\nu_\alpha \mid \alpha \in \mu\} \subseteq \kappa$ için $\aleph x \leq \mu < \kappa$ olduğunu gözetirsek

$$\sum_{\alpha \in \mu} \nu_\alpha = \mu * \sup_{\alpha \in \mu} \nu_\alpha = \sup\{\nu_\alpha \mid \alpha \in \mu\} = \sup x < \kappa$$

elde ederiz. Diğer yandan her $\alpha \in \mu$ için $\kappa_{f(\alpha)} \leq \nu_\alpha$ olduğundan

$$\sum_{i \in I} \kappa_i = \sum_{\alpha \in \mu} \kappa_{f(\alpha)} \leq \sum_{\alpha \in \mu} \nu_\alpha < \kappa$$

çelişisini elde ederiz.

(3) $\implies$ (1) : Tanım gereği $sd(\kappa) \leq \kappa$ olduğunu zaten biliyoruz. Şimdi $\mu := sd(\kappa) < \kappa$ olduğunu varsayalım. $f : \mu \rightarrow \kappa$ yapısal ve sondaş olsun. $\kappa = \sup_{\alpha < \mu} f(\alpha) = \bigcup_{\alpha < \mu} f(\alpha)$. Her $\alpha < \mu$ için $\kappa_\alpha := \aleph f(\alpha) < \kappa$ ve κ bir çokluk sayısı olduğu için $\aleph f(\alpha) < \kappa$ olur. Buradan hipotezle

$$\aleph \kappa = \kappa = \aleph \left(\bigcup_{\alpha < \mu} f(\alpha) \right) \leq \sum_{\alpha < \mu} \aleph f(\alpha) = \sum_{\alpha < \mu} \kappa_\alpha < \kappa$$

çelişkisi elde edilir. ■

Teoremimizde (3) önermesinin aşağıdaki gibi de yazılabileceğini kanıtlamayayı ödev olarak bırakıyoruz:

$$\kappa \text{ düzenlidir} \iff \forall x (\aleph x < \kappa \wedge \forall y (y \in x \implies \aleph y < \kappa) \implies \aleph \left(\bigcup x \right) < \kappa). \quad (2.20)$$

Teorem 2.16.11 κ bir sonsuz çokluk sayısı olsun. $sd(\kappa)$ sondaşlığı aşağıdaki koşulu sağlayan μ çokluk sayılarının en küçüğüdür: κ kümesinin altkümelerinden oluşan bir $(M_\nu)_{\nu < \mu}$ dizisi

1. $\kappa = \bigcup_{\nu < \mu} M_\nu$ ve
2. $\forall \nu < \mu (\aleph M_\nu < \kappa)$ olacak biçimde vardır.

Kanıt. $\lambda = sd(\kappa)$ olsun. $\exists f : \lambda \longrightarrow \kappa$ yapısal ve sondaş. $\nu < \lambda$ için $M_\nu := f(\nu)$ alırsak bir yandan

$$\kappa = \sup_{\nu < \lambda} M_\nu = \bigcup_{\nu < \lambda} M_\nu$$

diğer yandan ise her $\nu < \lambda$ için M_ν bir sıra sayıdır ve $M_\nu < \kappa$ olduğundan $\aleph M_\nu < \kappa$. Böylece $\lambda = sd(\kappa)$ teoremin koşullarını sağlar. (2.16.10)(3)'ten dolayı ise hiçbir $\mu < sd(\kappa)$ ile teoremin 1. ve 2. koşulları sağlanmaz. ■

Teorem 2.16.12 Her sonsuz çokluk sayıları κ, λ için

1. $\kappa < !\kappa^{sd(\kappa)}$.
2. $sd(!2^\kappa) > \kappa$.
3. $sd(!\kappa^\lambda) > \lambda$.

Kanıt. 1. (2.16.5)'ten dolayı bir $f : sd(\kappa) \longrightarrow \kappa$ yapısal ve sondaş dönüşümü vardır. Her $\alpha \in sd(\kappa)$ için $\aleph f(\alpha) < \kappa$ olduğundan König Teoremi'yle

$$\kappa = \aleph \kappa = \aleph \left(\bigcup_{\alpha \in sd(\kappa)} f(\alpha) \right) \leq \sum_{\alpha \in sd(\kappa)} \aleph f(\alpha) < \prod_{\alpha \in sd(\kappa)}^* \kappa = !\kappa^{sd(\kappa)}.$$

2. Tersini varsayalım ve $\beta \leq \kappa$ olmak üzere $f : \beta \longrightarrow !2^\kappa$ bir sondaş dönüşüm olsun, dd. $!2^\kappa = \bigcup_{\xi < \beta} f(\xi)$. Her $\xi < \beta$ için $f(\xi) < !2^\kappa$ ve $!2^\kappa$ bir çokluk sayısı olduğundan $\aleph f(\xi) < !2^\kappa$ olur. Buradan König Teoremi'yle

$$!2^\kappa = \aleph \left(\bigcup_{\xi < \beta} f(\xi) \right) \leq \sum_{\xi \in \beta} \aleph f(\xi) < \prod_{\xi < \beta}^* !2^\kappa \leq !(2^\kappa)^\kappa = !2^{\kappa * \kappa} = !2^\kappa$$

çelişkisi elde edilir.

3. Sondaş bir $f : \lambda \longrightarrow !\kappa^\lambda$ olamayacağı (2)'nin kanıtında olduğu gibi görülür. Böyle bir f bulunsaydı $\kappa_i := \mathbb{I}f(i) < !\kappa^\lambda$ olmak üzere benzer irdelemeyle

$$!\kappa^\lambda \leq \sum_{i < \lambda} \kappa_i < \prod_{i < \lambda}^* !\kappa^\lambda \leq !(!\kappa^\lambda)^\lambda = !\kappa^{\lambda * \lambda} = !\kappa^\lambda$$

çelişkisi elde edilirdi. ■

Özellikle

$$sd(\mathfrak{c}) = sd(!2^\omega) > \omega.$$

Diğer yandan $sd(\aleph_\omega) = \omega$ olduğunu öğrendik ve okuyucu kolayca

$$\aleph_{\omega 2}, \aleph_{\omega 3}, \aleph_{\omega 4}, \dots$$

çokluklarının sondaşıklarının da ω olduğunu kolayca görebilir. $\mathfrak{c}$ çokluğu için şimdilik söyleyebileceğimiz şey sondaşlığı ω olan çokluklardan farklı olduğudur, dd.

$$\mathfrak{c} = !2^\omega \neq \aleph_\omega, \aleph_{\omega 2}, \aleph_{\omega 3}, \aleph_{\omega 4}, \dots$$

Eğer α bir ardılsa $\aleph_\alpha$ çokluk sayısının düzenli olduğunu öğrendik. λ bir limit sıra sayısı olduğunda bildiğimiz bir düzenli $\aleph_\lambda$ çokluk var mıdır? Hayır! Bildiğimiz tüm bu tür sayılar

$$\aleph_\omega, \aleph_{\omega 2}, \aleph_{\omega 3}, \aleph_{\omega 4}, \dots, \aleph_{\aleph_\omega}, \aleph_{\aleph_{\aleph_1}}, \dots$$

tekildir.

- **(ZD)** $\lambda \in \text{Lim}$ için $\aleph_\lambda$ düzenli ise $\aleph_\lambda = \lambda$.

Gerçekten de (2.16.8)(5) ile

$$\lambda \leq \aleph_\lambda = sd(\aleph_\lambda) = sd(\lambda) \leq \lambda \implies \lambda = \aleph_\lambda$$

olur. Demek ki $\aleph_\lambda$ limit çokluğunun düzenli olması için bir önceki bölümde tanımladığımız $\mathcal{K} : Srs \longrightarrow Cksz$ normal fonksiyonun bir sabit noktası olması *gerekmektedir*, bunun *yeterli olduğunu söylemiyoruz*. Diğer yandan $\mathcal{K}$ fonksiyonun en küçük sabit noktası $\mathcal{K}^\omega(0)$ 'dır. Eğer bir düzenli limit çokluk sayısı varsa her bir

$$\omega = \aleph_0, \aleph_\omega, \aleph_{\aleph_\omega}, \aleph_{\aleph_{\aleph_\omega}}, \dots, \text{ dd. } \mathcal{K}(0), \mathcal{K}^2(0), \mathcal{K}^3(0), \dots$$

çokluk sayılarından büyük, bu demektir ki epeyce büyük olmalıdır.

$$\{\mathcal{K}^n(0) \mid n < \omega\} \text{ kümesi } \kappa := \mathcal{K}^\omega(0) \text{ 'da sondaş}$$

olduğundan $sd(\kappa) \leq \omega$ ve (2.19)'dan dolayı ise $sd(\kappa) \geq \omega$, sonuçta $sd(\kappa) = \omega < \kappa$ olduğundan $\kappa = \mathcal{K}^\omega(0)$ tekildir. $\lambda \in Lim$ ve $\aleph_\lambda$ düzenli ise $\lambda = \aleph_\lambda$ olacağını gösterdik, dd.

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_\xi, \dots; \aleph_\lambda = \lambda \ (\xi < \lambda).$$

Demek ki λ 'dan önce gelen aleflerin çokluğu, λ 'dan önce gelen tüm sıra sayılarının çokluğuna eşittir. Aleflerin yarışa $\aleph_0 = \omega$ 'da başladığını ve ne kadar büyük adımlarla koştuğunu düşünürsek yine inanılması zor bir durumla karşı karşıyayız.

$\omega = \aleph_0$ çokluk sayısının kendinden önce gelenlere göre davranışına yakından bakalım. ω 'dan önce gelenler bizim sezgisel evrenimizin *sonlu* nesnelere aittir. Bir kümenin çokluğunu artıran iki temel işlem vardır: Birleşim ve güç kümesi oluşturmak.

1. Sonlu sayıda sonlu kümenin birleşimi de sonludur.
2. Sonlu bir kümenin güç kümesi de sonludur.

Bu iki işlemle ω 'ya *ulaşamaz* ve biz bu nedenle sonsuz bir kümenin, dolayısıyla ω 'nın varlığını bir aksiyomla istemek zorunda kaldık! Diğer yandan ω sonsuz ve düzenlidir. *Büyük çokluk sayıları* bir anlamda sonlu sayıların ω 'ya göre şu veya bu ilişkisi genelleştirilerek elde edilir. (2.20)'de belirtildiği gibi düzenli çokluk sayıları da benzer bir tavır sergilerler: κ bir düzenli çokluk sayısı ise her birinin çokluğu κ 'dan kesin küçük olan, $\mu < \kappa$ olmak üzere, μ çoklukta kümenin birleşimiyle asla κ 'ya ulaşamayız!

Tanım 2.16.13 κ düzenli bir çokluk sayısı olmak üzere:

1. κ *zayıf ulaşamaz* : $\Longleftrightarrow \exists \lambda (\lambda \in Lim \wedge \kappa = \aleph_\lambda)$.
2. κ (*güçlü*) *ulaşamaz* : $\Longleftrightarrow \kappa > \omega \wedge \forall \mu (\mu < \kappa \implies 2^\mu < \kappa)$.

Güçlü ulaşamaz çokluklar elbette zayıf ulaşamazdırlar. Bunu görelim. Şimdi $\aleph_\alpha$ güçlü ulaşamaz ise $\alpha \in Lim$ olduğunu görmeliyiz. Tanım gereği $\aleph_\alpha > \omega = \aleph_0$ olduğundan her şeyden önce $\alpha > 0$. Geriye α 'nın bir ardıl sıra sayısı, dd. bir β ile $\alpha = \beta + 1$ olamayacağını göstermek kalıyor. Ancak $\aleph_\beta < \aleph_{\beta+1}$ olduğundan, eğer $\aleph_{\beta+1}$ ulaşamaz olsaydı $2^{\aleph_\beta} < \aleph_{\beta+1}$ olması gerekirdi! Ancak biz $\aleph_{\beta+1} \stackrel{def}{=} \aleph_\beta^+ \leq 2^{\aleph_\beta}$ olduğunu biliyoruz.

$\aleph_\lambda$ zayıf ulaşamaz ise tanım gereği $\lambda \in Lim$ ve $\aleph_\lambda$ düzenli olacağından (ZD)'den dolayı $\lambda = \aleph_\lambda$ olur. Zayıf veya güçlü ulaşamaz çokluk sayılarımız her şeyden önce düzenli limit çokluklar olduklarından ω 'dan kesin büyüktürler.

Zayıf ulaşılamazlık yukarıdaki birinci özelliği, güçlü ulaşılamazlık ise her ikisini birden genelleştirirler. Bu çokluklar kendilerinden önce gelenlere kıyasla öylesine büyüktürler ki, önce gelenlerin alanında kalmak üzere küme işlemlerimizle bunlara ulaşamayız.

Zayıf ulaşılamaz çokluklar yoksa elbette güçlü ulaşılamaz çokluklar da olamaz. Öyleyse ilk sorumuz zayıf ulaşılmaz çoklukların olup olmadığıdır. φ ile “Zayıf çokluklar vardır.” önermesini gösterelim, dd.

$$\varphi := \exists \kappa \, sd(\kappa) = \kappa \wedge \exists \lambda \, (\lambda \in Lim \wedge \kappa = \aleph_\lambda)$$

olsun. ZFC kuramı çelişkisizse $ZFC + \neg \varphi$ de çelişkisizdir. Buradan ise ZFC kuramında φ önermesinin kanıtlanamayacağı çıkar. Bu durumda, ZFC’yi çelişkisiz varsaymak koşuluyla, eğer evrenimizde zayıf ulaşılamaz çokluklar olsun istiyorsak bunu aksiyomatik olarak istemekten başka çaremiz yoktur. $ZFC + \varphi$ kuramının çelişkisiz olup olmadığı bilinmemektedir.

2.17 KOMBİNATORİK

Önce sonlu kümeler için okuyucunun aşına olduğu birkaç bilgiyi verelim. Doğal sayılarda açıkladığımız üç farklı çarpma, toplama ve üs işlemlerinin örtüştüğünü öğrendik. Dolayısıyla şimdi vereceğimiz bilinen bilgileri okuyucu ister alışık olduğu yöntemle ister tümevarımla kolayca kanıtlayabilir.

E bir sonlu küme ve $\sharp E = m$ olsun. $\sharp \mathcal{P}(E) = 2^m$ olduğunu okuyucu defalarca kanıtlamıştır. Şimdilik evrenimiz bu E kümesi olsun. Onun A altkümelerini inceleyelim ve tümleyen E' ’de alınsın, dd. $A^c = E \setminus A$ olsun. c_A ile daha önce de A kümesinin özgün fonksiyonunu göstermiştik. $\mathbf{1} := c_E$ yazalım. $A, B \in \mathcal{P}(E)$ olmak üzere

$$c_{A^c} = \mathbf{1} - c_A, \quad c_{A \cap B} = c_A c_B \quad (2.21)$$

$$c_{A \cup B} = c_A + c_B - c_{A \cap B}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad c_A^n = c_A \quad (2.22)$$

olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca açıkça

$$\mathbf{1} c_A = c_A \quad \text{ve} \quad \sum_{x \in E} c_A(x) = \sharp A.$$

E kümemizin sonlu çoklukta $A_1, \dots, A_n$ altkümeleri verilsin. $I := \{1, 2, \dots, n\}$ ve $J \subseteq I$ olmak üzere $A_J := \bigcap_{i \in J} A_i$ olsun. Evrenimizi E seçtiğimizden elbette $A_\emptyset = E$ alınacaktır.

Teorem 2.17.1 (Ekleme Çıkarma Teoremi) E , m öğeli bir sonlu küme ve $A_1, \dots, A_n$ onun sonlu sayıda altkümeleri olsunlar. E kümesinin

A_i 'lerin hiçbirinde olmayan öğeleri, dd. her bir A_i kümesinin tümleyeninde olan öğeleri tam

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \left(\sum_{J \subseteq I, \sharp J=k} \sharp A_J \right) = \sum_{J \subseteq I} (-1)^{\sharp J} \sharp A_J$$

tanedir.

Kanıt. Aranan $A_1^c \cap \dots \cap A_n^c$ kümesinin öğe sayısıdır. Yalnlık açısından $c_i := c_{A_i}$ ve $c_{i_1 \dots i_k} := c_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}$ yazarsak (2.21) ve bir parça işlem ile

$$\begin{aligned} c_{A_1^c \cap \dots \cap A_n^c} &= (\mathbf{1} - c_1) \dots (\mathbf{1} - c_n) \\ &= \mathbf{1} - \sum_{1 \leq i \leq n} c_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_{ij} - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} c_{ijk} + \dots + (-1)^n c_{1 \dots n} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\sum_{\sharp J=k} c_J \right) = \sum_{J \subseteq I} (-1)^{\sharp J} c_J. \end{aligned}$$

Bu eşitliğin iki yanındaki fonksiyonların $x \in E$ 'deki değerlerini alır toplarsak istenilen elde edilir:

$$\begin{aligned} \sharp(A_1^c \cap \dots \cap A_n^c) &= \sum_{x \in E} c_{A_1^c \cap \dots \cap A_n^c}(x) = \sum_{J \subseteq I} (-1)^{\sharp J} \left(\sum_{x \in E} c_J(x) \right) x \\ &= \sum_{J \subseteq I} (-1)^{\sharp J} \sharp A_J. \end{aligned}$$

■

Not 2.17.2 E kümesinin öğelerine ilişkin her ψ özelliği bir altküme belirler. ψ ile birlikte $\varphi = \neg\psi$ de E kümesinin öğelerine ilişkin bir özellik olduğundan bu teorem E kümesinin öğelerine ilişkin $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ özellikleri verildiğinde bu özelliklerin tümüne birden sahip olan öğelerin sayısını, bu özelliklere sahip olmayan öğelerin sayıları türünden hesaplamakta kullanılır.

□

Tanım 2.17.3 Not (2.3.4)'te belirttiğimiz gibi $\tilde{U}$ yerine $\mathbb{N}$ alalım. $G : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonunu $G(n, m) = (n+1) \cdot m$ olarak açıklansın ve $a = 1$ alınsın. (2.3.3) teoremi

1. $f(0) = 1$ ve
2. $\forall n \in \mathbb{N} \ f(n+1) = G(n, f(n)) = (n+1) \cdot f(n)$
koşulunu sağlayan bir tek $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ fonksiyonunun varlığını verir.
 $f(n)$ yerine $n!$ yazılır. Böylece

$$0! = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (n+1)! = (n+1) \cdot n!.$$

X ve Y iki sonlu küme, $m = \sharp Y$, $n = \sharp X$ olsun. Y kümesinden X kümesine olan tüm fonksiyonların çokluğu bizim için *tanım gereği* $\sharp(Y \rightarrow X) = n^m$ 'dir. Ancak genelde kümeler kuramı dersinde değilseniz böyle bir tanımdan yola çıkmazsınız ve bunun böyle olduğunu kanıtlarsınız. Kanıt da aşağı yukarı şöyledir: Önce $m = 0$, dd. $Y = \emptyset$ olsun. Bu durumda bir tek $\emptyset : \emptyset \rightarrow X$ fonksiyonu vardır ve $n^0 = 1$. Şimdi $1 \leq m$ olsun. $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ ise bir $f : Y \rightarrow X$ tanımlanmak istendiğinde $f(y_1)$ için n seçenek vardır, $f(y_1)$ seçildikten sonra $f(y_2)$ için de n seçenek vardır vb... . Sonuçta bir f için $\overbrace{nn \cdots n}^m = n^m$ seçenek vardır. Bu n^m fonksiyondan kaç tanesi birebirdir? $f : Y \rightarrow X$ birebir olacaksa $f(y_1)$ için n seçenek vardır, $f(y_1)$ seçildikten sonra $f(y_2)$ için ise $n - 1$ seçenek vardır,..., $f(y_m)$ içinse eğer $m \leq n$ ise $n - m + 1$ seçenek vardır ancak $m > n$ ise hiçbir seçenek, dolayısıyla Y kümesinden X kümesine hiçbir birebir fonksiyon yoktur. Sonuçta Y kümesinden X kümesine birebir dönüşümlerin sayısı

$$n(n-1) \cdots (n-m+1)$$

olur. Bu formül $m > n$ için de doğru sonuç verir, çünkü o zaman çarpanlardan biri sıfır olacağından sonuç sıfırdır. $m = 0$ ise zaten bir tek $f : \emptyset \rightarrow X$ vardır ve o da birebirdir.

Teorem 2.17.4 Y ve X sonlu kümeler $m = \sharp Y$, $n = \sharp X$ ve $m \leq n$ ise Y kümesinden X kümesine tam

$$\frac{n!}{(n-m)!}$$

birebir dönüşüm vardır. Özellikle X 'ten X 'e tameşlemelerin sayısı $n!$ olur.

Kanıt. Her ne kadar teoremden önce söylediklerimiz yeterince açıksa da yine de tümevarıma dayanan tam bir kanıt verelim. Önermeyi m üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız. $m = 0$ ise $Y = \emptyset$ olacağından $\emptyset X$ 'de bir tek $\emptyset : \emptyset \rightarrow X$ fonksiyonu vardır ve o da birebirdir. Savımız m ögeli kümeler için kanıtlanmış olsun. Şimdi Y kümesinin $m + 1$ ögesi bulunsun ve $m + 1 \leq n$ olsun. $F_b(A, B)$ ile A kümesinden B kümesine birebir fonksiyonların kümesini gösterelim. $Y \neq \emptyset$ olduğundan bir $y_0 \in Y$ ögesini keyfi seçelim. $Y' := Y \setminus \{y_0\}$ şimdi m ögeli bir kümedir ve onun için sav kanıtlanmıştır. Bir

$$\psi : F_b(Y, X) \rightarrow F_b(Y', X)$$

dönüşümünü $\psi(f) := f|_{Y'}$ ile tanımlayalım. Her bir $f' \in F_b(Y', X)$ fonksiyonu, $X \setminus f'[Y']$ kümesi $n - m$ ögeli olduğundan Y' 'den X 'e birebir olacak

biçimde tam $n - m$ farklı fonksiyona genişletilebilir. ψ örten ve her bir sapın gücü $n - m$ olduğundan (bkz. prob 2.7.3)

$$\begin{aligned}\sharp F_b(Y, X) &= (n - m) \cdot \sharp F_b(Y', X) \\ &= (n - m) \frac{n!}{(n - m)!} = \frac{n!}{(n - m - 1)!} = \frac{n!}{(n - (m + 1))!}\end{aligned}$$

Şimdi özel olarak $Y = X$ ise, X sonlu olduğundan her birebir $f : X \rightarrow X$ bir tameşlemedir ve bu bize kalan savı verir. ■

Önerme 2.17.5 X , n öğeli bir sonlu küme ise, $0 \leq m \leq n$ olmak üzere X kümesinin tam

$$\frac{n!}{m!(n - m)!} =: \binom{n}{m}$$

tane m öğeli altkütmesi vardır.

Kanıt. X , n öğeli bir sonlu küme ve $0 \leq m \leq n$ olsun. m öğeli herhangi bir Y kümesi alalım. X kümesinin tüm altkümeleri sonlu sayıda olduğundan m öğeli altkümeleri de sonlu tanedir: Bunlar $X_1, \dots, X_k$ olsunlar. $\sharp Y = \sharp X_i = m$ olduğundan Y kümesinden X_i kümesine her birebir dönüşüm aynı zamanda bir tameşlemedir ve bunlar tam da X_i kümesinin öz tameşlemeleri kadardır (ödev). Böylece (2.17.4)'ten dolayı Y kümesinden herhangi bir X_i kümesine tüm birebir dönüşümlerin sayısı $m!$ 'dir. Yine aynı teoremden dolayı Y kümesinden X kümesine tüm birebir dönüşümlerin sayısı $\frac{n!}{(n - m)!} = k \cdot m!$. Buradan $k = \binom{n}{m}$ olur. ■

Teorem 2.17.6 X ve Y kümeleri sırasıyla m ve n öğeli iki sonlu küme olsunlar. X kümesinden Y kümesine tüm örten dönüşümler tam

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)^m$$

tanedir.

Kanıt. $F := {}^X Y$ ve her $y \in Y$ için

$$F_y := \{f \in F \mid y \notin \text{res } f\}$$

olsun. $J \subseteq Y$ için $F_J := \bigcap_{y \in J} F_y$ olsun. $E = F$ olmak üzere (2.17.1) teoremini kullanacağız. X kümesinden Y kümesine tüm örten dönüşümlerin kümesini O ile gösterirsek açıkça $O = \bigcap_{y \in Y} F_y^c$ ve

$$\sharp O = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\sum_{J \subseteq Y, \sharp J = k} \sharp F_J \right).$$

$\sharp J = k$ olsun. $f \in F_J \iff f : X \longrightarrow Y \setminus J$. $\sharp(Y \setminus J) = n - k$ olduğundan $\sharp F_J = (n - k)^m$, Y kümesinin k ögesi altkümelerinin sayısı ise (2.17.5)'ten dolayı $\binom{n}{k}$ olduğundan

$$\sharp O = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n - k)^m$$

elde edilir. ■

Not 2.17.7 Matematikte herhangi bir alandaki uğraşlarımız bazen bize matematiğin bir başka alanına ilişkin beklenmedik gerçekler sunar. Teore-mimizde m ve n doğal sayılarına hiçbir kısıtlama getirmediğimize dikkat ediniz. Bu demektir ki o teoremden $m > n$ olabilir. Ancak bu durumda örten fonksiyonlarımızın sayısı sıfırdır. Amaçlamadığımız halde, (2.17.4), (2.17.5) ve (2.17.6) teoremlerinde sayılar teorisine ilişkin aşağıdaki önermeleri yan ürün olarak elde ettik:

$$\begin{aligned} \forall m, n \in \mathbb{N} \quad & \left(0 \leq m \leq n \implies \frac{n!}{(n-m)!}, \frac{n!}{m!(n-m)!} \in \mathbb{N} \right) \\ \forall m, n \in \mathbb{N} \quad & \left(m > n \implies \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m = 0 \right). \quad \square \end{aligned}$$

Daha önce problem olarak sorduğumuz ve “Güvercin Yuvası Teoremi”, “Posta Kutusu Teoremi” veya “Çekmece Teoremi” gibi değişik adlarda bi-linen teorem m, n doğal sayılar ve $m < n$ olmak üzere n nesne m yuvaya (veya posta kutusuna veya çekmeceye) dağıtıldığında bunlardan en az bi-rinde birden fazla nesnenin bulunduğunu ileri sürer. Hadi buna “**Çekmece İlkesi**” diyelim. Bu ilke genel olarak belli anlamda “büyük” bir küme ken-disine kıyasla belli ölçüde “küçük” sayıda çekmeceye dağıtılsa en az bir çekmecedeki kümenin de büyük olduğunu söyler.

Teorem 2.17.8 Çekmece İlkesi : κ bir sonsuz çokluk sayısı, $\lambda < sd(\kappa)$ ve $\sharp A = \kappa$ olmak üzere $A = \bigcup_{\beta < \lambda} A_\beta$ ise en az bir $\beta < \lambda$ için $\sharp A_\beta = \kappa$. Özellikle κ sonsuz ve düzenli bir çokluk sayısı, $\sharp A = \kappa$, $\lambda < \kappa$ ve $A = \bigcup_{\beta < \lambda} A_\beta$ ise en az bir $\beta < \lambda$ için $\sharp A_\beta = \kappa$.

Kanıt. Teorem (2.16.11)'in başka türlü söylenişidir. ■

Bu teorem elbette aşağıdaki gibi de yazılabilir.

Önerme 2.17.9 κ bir sonsuz çokluk sayısı, $\sharp A = \kappa$ ve $f : A \longrightarrow \lambda < sd(\kappa)$ ise en az bir $\beta \in \lambda$ için $\sharp f^{-1}[\{\beta\}] = \sharp A_\beta^f = \kappa$.

Şimdi “büyük” kavramını “sınırsız” olarak yorumlayarak aşağıdaki öner-meyi elde ederiz.

Önerme 2.17.10 $\lambda \in Lim$, $X \subseteq \lambda$ sınırsız, $\alpha < sd(\lambda)$ ve $f : X \rightarrow \alpha$ ise en az bir $\beta \in \alpha$ için $X_\beta^f = f^{-1}[\{\beta\}]$ sınırsızdır.

Kanıt. Savımız yanlış olsun. Bu durumda her $\beta \in \alpha$ için $\xi_\beta := \sup^+ X_\beta^f < \lambda$ olur. $\alpha < sd(\lambda)$ olduğundan

$$X \subseteq \bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta^f \subseteq \sup_{\beta < \alpha}^+ \xi_\beta < \lambda$$

olur ki bu bize $\lambda = \sup X \leq \sup_{\beta < \alpha}^+ \xi_\beta < \lambda$ çelişmesini verir. ■

Tanım 2.17.11 $\kappa \in Cks$ ve X herhangi bir küme olmak üzere

1. $[X]^\kappa := \{A \mid A \subseteq X \wedge \mathfrak{h}A = \kappa\}$.
2. $[X]^{<\kappa} := \{A \mid A \subseteq X \wedge \mathfrak{h}A < \kappa\}$.

Önerme 2.17.12 $\kappa \in Cks \wedge \aleph_0 \leq \kappa \leq \mathfrak{h}X \implies \mathfrak{h}[X]^\kappa = !(\mathfrak{h}X)^\kappa$. Aynı koşullarda $\mu \geq \kappa$ bir çokluk sayısı ise $\mathfrak{h}[\mu]^\kappa = !\mu^\kappa$.

Kanıt. (1) Her $x \in [X]^\kappa$ için bir $f_x : \kappa \rightleftarrows x$ vardır. $g_x : x \hookrightarrow X$ gömme dönüşümü olmak üzere $g_x \circ f_x \in {}^\kappa X$.

$$h : [X]^\kappa \longrightarrow {}^\kappa X (x \rightsquigarrow g_x \circ f_x)$$

fonksiyonu birebirdir (ödev), dolayısıyla $\mathfrak{h}[X]^\kappa \leq !(\mathfrak{h}X)^\kappa$.

(2) Her şeyden önce $\mathfrak{h}Y = \mathfrak{h}X$ ise $\mathfrak{h}[X]^\kappa = \mathfrak{h}[Y]^\kappa$ olduğu kolayca görülür (ödev). $\mathfrak{h}(\kappa \times X) = \kappa * \mathfrak{h}X = \mathfrak{h}X$ olduğundan $\mathfrak{h}[X]^\kappa = \mathfrak{h}[\kappa \times X]^\kappa$. Bu ve ${}^\kappa X \subseteq [\kappa \times X]^\kappa$ bağıntısından

$$!(\mathfrak{h}X)^\kappa = \mathfrak{h}({}^\kappa X) \leq \mathfrak{h}[\kappa \times X]^\kappa = \mathfrak{h}[X]^\kappa$$

elde edilir. (1) ve (2) savı verir. ■

Tanım 2.17.13 $\kappa, \lambda \in Cks$ için

$$!\lambda^{<\kappa} := \sup\{!\lambda^\nu \mid \nu \in Cks \cap \kappa\}$$

olsun. $!\lambda^{<\kappa}$ yerine $!\lambda^{\overset{\kappa}{<}}$ gösterimi de kullanılmaktadır.

Önerme 2.17.14 $\kappa, \lambda \in Cks$, $\kappa \geq \aleph_0$ ve $\lambda \geq 2$ ise

1. $!\lambda^{<\kappa} \geq \kappa$.
2. $!\lambda^{<\kappa} = \sum_{\nu \in Cks \cap \kappa} !\lambda^\nu$.

Kanıt. 1. (a). κ bir μ çokluğunun ardılı, dd. $\kappa = \mu^+$ olsun. Bu durumda $!\lambda^{<\kappa} \stackrel{tan}{=} !\lambda^\mu \geq !2^\mu > \mu$, buradan da $!\lambda^{<\kappa} \geq \mu^+$ olur.

1. (b). Şimdi κ bir limit çokluk olsun. Tanım ve (1)(a) ile

$$!\lambda^{<\kappa} = \sup\{!\lambda^\nu \mid \nu \in Cks \cap \kappa\} \geq \sup\{\nu \mid \nu \in Cks \cap \kappa\} = \kappa$$

olur.

(2) $\sigma := \sum_{\nu \in Cks \cap \kappa} !\lambda^\nu$ olsun. Her $\nu \in Cks \cap \kappa$ için $!\lambda^\nu \leq \sigma$, dolayısıyla

$$!\lambda^{<\kappa} = \sup\{!\lambda^\nu \mid \nu \in Cks \cap \kappa\} \leq \sigma.$$

Diğer yandan

$$\sigma \leq \sum_{\nu \in Cks \cap \kappa} !\lambda^\kappa \stackrel{(2.15.20)}{=} \kappa * !\lambda^\kappa \stackrel{(1)+(2.15.12)}{=} !\lambda^{<\kappa}.$$

■

Önerme 2.17.15 $\lambda = \aleph X \geq \aleph_0$ ve $\kappa \leq \lambda^+$ koşulunu sağlayan bir κ çokluk sayısı verildiğinde $\aleph([X]^{<\kappa}) = \aleph X^{<\kappa}$.

Kanıt. $[X]^{<\kappa} = \bigcup_{\nu \in Cks \cap \kappa} [X]^\nu$ olduğundan (2.17.12) ile

$$\begin{aligned} \aleph[X]^{<\kappa} &= \aleph\left(\bigcup_{\nu \in Cks \cap \kappa} [X]^\nu\right) \leq \sum_{\nu \in Cks \cap \kappa} \aleph[X]^\nu \\ &= \sum_{\nu \in Cks \cap \kappa} \aleph([X]^\nu) = \aleph([X]^{<\kappa}). \end{aligned}$$

Diğer yandan $\nu \in Cks \cap \kappa$ için $[X]^\nu \subseteq [X]^{<\kappa}$ olduğundan $\aleph([X]^\nu) = \aleph[X]^\nu \leq \aleph[X]^{<\kappa}$, buradan da

$$\aleph([X]^{<\kappa}) = \sup\{\aleph([X]^\nu) \mid \nu \in Cks \cap \kappa\} \leq \aleph[X]^{<\kappa}$$

elde edilir ve kanıt tamamlanır. ■

Örnek 2.17.16 Ramsey Teoremi'ni ifade edip kanıtlamadan önce basit bir örnek yararlı olacaktır. Altı ögeli bir küme, örneğin $6 = \{0, 1, \dots, 5\}$ verilsin. $[6]^2$ ile bu kümenin iki ögeli altkümelerinin kümesini göstermiştik. Herhangi bir $f : [6]^2 \rightarrow 2 = \{0, 1\}$ fonksiyonu vermenin $[6]^2$ kümesinin iki ögeli bir $\mathcal{P} = \{A, B\}$ parçalanışını vermekle eş anlamlı olduğunu biliyoruz ($A = f^{-1}[\{0\}]$, $B = f^{-1}[\{1\}]$). Gerçi daha önce verdiğimiz parçalanış kavramında parçaların boş küme olmamasını ayrıca istemiştik; bu f fonksiyonunun örten olmasını gerektirir. Buradaki irdelememiz için bu hiç önemli

değildir. Titiz davranmak istiyorsanız parçaların boş olmadığı önceki parçalanışlarla, örten f fonksiyonları ile çalışabilirsiniz. Ancak bu bölümde biz parçalanış kavramında parçaların bazılarının boş küme olmasına izin verecek ve herhangi bir f fonksiyonu ile çalışmayı yeğleyeceğiz. Şimdi şunu savunuyoruz:

$[6]^2$ kümesinin herhangi bir $\mathcal{P} = \{A, B\}$ parçalanışı verildiğinde 3 ögeli bir $x \subset 6$ kümesi $[x]^2 \subseteq A$ veya $[x]^2 \subseteq B$ olacak biçimde vardır.

Savunduğumuz şey elbette f fonksiyonunun $[x]^2$ kümesinde sabit olmasıyla eş anlamlıdır. Şimdi $[6]^2$ kümesinin $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{0, 3\}$, $\{0, 4\}$, $\{0, 5\}$ ögelerine bakalım. A ve B parçalarından birinde bunların en az üç tanesi bulunmak zorundadır. Diyelim ki $\{0, m\}$, $\{0, n\}$, $\{0, k\}$ ögeleri A 'da olsunlar (Bu üç ögenin B 'de olma durumu benzer biçimde tartışılır). İki durum söz konusudur:

1. $\{m, n\} \in A \vee \{m, k\} \in A \vee \{n, k\} \in A$ veya
2. $\{m, n\} \in B \wedge \{m, k\} \in B \wedge \{n, k\} \in B$.

Birinci durumda, örneğin $\{m, k\} \in A$ ise $x = \{0, m, k\}$ için $[x]^2 \subseteq A$ olur. Diğer durumlarda da benzer biçimde işimiz biter. İkinci durumda ise $x = \{m, n, k\}$ kümesi için $[x]^2 \subseteq B$ olur ve işimiz biter. Bu örneğimizin özel bir durumuna bakalım. Bir toplantıda altı kişi bulunsun. Bu kişilerin kümesini X ile gösterelim. $a, b \in X$ olmak üzere bu iki kişi birbirini tanıyorlarsa $\{a, b\} \in A$, birbirine yabancı iseler $\{a, b\} \in B$ diyerek $[X]^2$ kümesini $\mathcal{P} = \{A, B\}$ olarak parçalayalım. Az önce kanıtladığımıza göre altı kişilik bir toplantıda üç kişilik bir grup aşağıdaki koşulu sağlayacak biçimde bulunabilir: Ya bu gruptaki herhangi iki kişi birbirini hep tanıyordur, ya da bu gruptaki herhangi iki kişi birbirine daima yabancıdır. Bu örneğimizi bir de çizge kuramı diliyle söylemekte yarar var. Altı ögemizi düzlemde üçü bir doğru üzerinde olmayacak biçimde, örneğin bir düzgün altıgenin köşelerine yerleştirelim. Sonra bunları iki farklı renkli, örneğin kırmızı ve siyah, doğru parçalarıyla birleştirelim. Bu durumda kanıtladığımız şey bu işlemi nasıl yaparsak yapalım, sonuçta köşeleri bizim nesnelerimiz olan üçgenlerimizden en az bir tanesinin tek renkli olduğudur.

Şimdi aynı önermeyi beş ögeli kümeler için, örneğin $5 = \{0, 1, \dots, 4\}$ için kanıtlamaya çalışalım. $[5]^2$ kümesinin herhangi bir $\mathcal{P} = \{A, B\}$ parçalanışı verildiğinde 3 ögeli bir $x \subset 5$ kümesi $[x]^2 \subseteq A$ veya $[x]^2 \subseteq B$ olacak biçimde var mıdır? Bu kez yanıtımız hayırdır. Gerçekten de

$$A = \{\{0, 1\}, \{0, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\} \text{ ve}$$

$$B = \{\{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}\}$$

ve alırsak $[x]^2 \subseteq A$ veya $[x]^2 \subseteq B$ olacak biçimde üç ögeli bir $x \subseteq 5$ altkümesi olmadığı görülür. Veya beş nesnemizi düzgün bir beşgenin köşele-

rine herhangi bir sırada yerleştirip beşgenin kenarlarını kırmızı, köşeleri birbirine bağlayan diğer doğruları ise siyah seçelim. Elbette köşeleri nesnele-rimiz olan tek renkli bir üçgen yoktur. $\square$

Bazı tanımlar vermeden önce örneğimizi daha genel duruma taşıyalım. Şimdi bize gücü κ olan bir X kümesi verilsin. κ sonlu veya sonsuz olabilir. μ ve ν ise yine çokluk sayıları olsunlar. $n \in \omega$ olmak üzere bir $f : [X]^n \rightarrow \nu$ fonksiyonu verilsin. Örneğin X bir takım insanların kümesi ve ν ise bu in-sanların her n -li grubunun oluşturabileceği derneklerin kümesi olsun. Farklı n -li gruplar aynı türden dernek kurabilirler ve bir kişi yer aldığı farklı grup-larda farklı türden dernekler kurabilir. Yaygın anlatımı yeğlersek X her-hangi bir küme olmak üzere ν kümesini *renkler* kümesi olarak düşünelim. $f(u) = \sigma \in \nu$ ise n ögeli $u \in [X]^n$ altkümesi σ rengiyle boyanmıştır denir³⁷. Burada göz önünde tutulması gereken X kümesinin öğelerinin değil, n ögeli altkümelerine renk atandığıdır! Bir $x \in X$ öğesinin yer aldığı n ögeli farklı kümeler elbette farklı renklerle boyanmış olabilirler!

Elbette böyle bir $f : [X]^n \rightarrow \nu$ fonksiyonu $[X]^n$ kümesini her $\sigma \in \nu$ için σ ile boyanmış $[X]_\sigma^{nf} = f^{-1}[\{\sigma\}]$ parçalarına ayırır. Tersine $[X]^n$ kümesinin her $\mathcal{P} = \{P_\sigma\}_{\sigma \in \nu}$ parçalanışına ilişkin tam da bu parçaları veren bir $f_{\mathcal{P}} : [X]^n \rightarrow \nu$ *boyama fonksiyonu* vardır:

$$\forall \sigma \in \nu \forall u \in P_\sigma \quad f_{\mathcal{P}}(u) := \sigma.$$

Herhangi bir $Y \subseteq X$ altkümesi verildiğinde $[Y]^n$ kümesi bir $[X]_\sigma^{nf}$ parçasının altkümesi ise, dd. $f|[Y]^n$ sabit ise Y kümesine *f-türdeş(-homojen veya -renktaş)* diyeceğiz. Her $f : [X]^n \rightarrow \nu$ boyamasına karşılık gücü $\mu = \aleph Y$ olan *f-türdeş* Y altkümelerin var olup olmadıklarını araştıracağız.

Tanım 2.17.17 $\kappa = \aleph X$, $\mu, \nu \in Cks$ ve $n \in \omega$ verilsin.

1. $f : [X]^n \rightarrow \nu$ ve $Y \subseteq X$ olsun. Y kümesi **f-türdeştir (f-tek renklidir)**: $\iff f$ fonksiyonu $[Y]^n$ 'de sabittir.
2. $\kappa \rightarrow (\mu)_\nu^n : \iff$ Her $f : [X]^n \rightarrow \nu$ için gücü μ olan *f-türdeş* bir $Y \subseteq X$ altkümesi vardır.
Eğer $\kappa \rightarrow (\mu)_\nu^n$ değilse bunu $\kappa \nrightarrow (\mu)_\nu^n$ ile göstereceğiz.

Bu gösterimlerle örneğimize dönersek önce $6 \rightarrow (3)_2^2$, sonra ise $5 \nrightarrow (3)_2^2$ olduğunu gösterdik. Bu gösterimlerle (2.17.8) aşağıdaki gibi de dile getirilebilir.

³⁷Bunun yerine u kümesine (derneğine) rengi ν olan bir amblem veya bayrak atanmıştır demek daha doğru olur.

Teorem 2.17.18 1. κ herhangi bir sonsuz çokluk ve $\lambda < sd(\kappa)$ ise $\kappa \longrightarrow (\kappa)_\lambda^1$.
 2. κ düzenli sonsuz çokluk sayısı ve $\lambda < \kappa$ ise $\kappa \longrightarrow (\kappa)_\lambda^1$.

Özel olarak her $n \in \omega$ için $\omega \longrightarrow (\omega)_n^1$ veya aynı anlama gelmek üzere $\aleph_0 \longrightarrow (\aleph_0)_n^1$. Eğer $\kappa \longrightarrow (\mu)_\nu^n$ ise tanım gereği apaçıktır ki her $\lambda > \kappa$ için de $\lambda \longrightarrow (\mu)_\nu^n$.

Teorem 2.17.19 Ramsey . X sonsuz bir küme, $m, n \in \omega$ ve $f : [X]^n \longrightarrow m$ herhangi bir fonksiyon ise X kümesinin sayılabilir sonsuz bir f -türdeş altkümesi vardır. Başka sözlerle $[X]^n$ kümesi $P_0, \dots, P_{m-1}$ gibi m parçaya bölündüğünde en az bir P_i parçası ve sayılabilir sonsuz bir $Y \subseteq X$ altkümesi $[Y]^n \subseteq P_i$ olacak biçimde vardır.

Sonuç: Her $m, n \in \omega$ için $\omega \longrightarrow (\omega)_m^n$, dolayısıyla her $\kappa \geq \omega$ için $\kappa \longrightarrow (\omega)_m^n$.

Kanıt. Eğer $m = 0 = \emptyset$ ise önermedeki türden f fonksiyonları olamayacağından sav boş olarak doğrudur. Ancak $m \geq 1$ için gerçekten kanıtlanacak bir şey vardır.

n üzerinden tümevarım uygulayacağız. $n = 0$ için $[X]^n = \{\emptyset\}$ tek ögeli olduğundan her $f : [X]^n \longrightarrow m$ kendiliğinden sabittir ve kanıtlanacak bir şey yoktur.

Savımız n için kanıtlanmış ve $f : [X]^{n+1} \longrightarrow m$ olsun. Şimdi tekrarlı tanımlamayla X kümesinin öğelerinden oluşan bir $(x_k)_{k < \omega}$ dizisiyle sonsuz altkümelerinden oluşan bir $(X_k)_{k < \omega}$ dizisini

$$X_0 \supset X_1 \supset X_2 \cdots \text{ ve } x_k \in X_l \iff k \geq l$$

olacak biçimde tanımlayacağız.

$X_0 := X$ olsun. X_k tanımlanmış olsun. Bir $x_k \in X_k$ ögesini keyfi seçelim. Bir

$$f_k : [X_k \setminus \{x_k\}]^n \longrightarrow m$$

fonksiyonunu

$$f_k(u) := f(u \cup \{x_k\})$$

ile tanımlayalım. Tümevarım koşulundan dolayı $X_k \setminus \{x_k\}$ kümesinin f_k -türdeş sonuz bir altkümesi vardır. Böyle bir küme seçelim ve ona X_{k+1} diyelim. Tanım gereği bir yandan $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \cdots$ iken diğer yandan x_k öğeleri ikiye ikiye farklıdır ve teoremin koşulunu sağlarlar. f_k fonksiyonunun $[X_{k+1}]^n$ kümesindeki f_k rengi, dd. f_k fonksiyonunun $[X_{k+1}]^n$ kümesinde aldığı sabit değer m_k olsun. Her $i < m$ için $Y_i := \{x_k \mid m_k = i\}$ kümesi f -türdeş ve rengi i 'dir. Gerçekten de Y_i kümesinin $n + 1$ ögeli

bir v altkümesi verilsin. $k := \min\{j \mid x_j \in v\}$ ise $u := v \setminus \{x_k\}$ olmak üzere $u \in [X_{k+1}]^n$ ve $v = u \cup \{x_k\}$. Dolayısıyla $f(v) = f_k(u) = i$. Sonuçta $Y := \{x_k \mid k < \omega\}$ sayılabilir sonsuz kümesinin bir sonlu $\{Y_i\}_{i < m}$ parçalanışını elde ederiz. (2.17.8)'dan dolayı en az bir $i < m$ için Y_i sonsuz olur. ■

2.18 SÜZGEÇLER, KAPALI VE SINIRSIZ KÜMELER

Uzlaşma: Bu bölümde bir X kümesinde süzgeçlerden söz ettiğimiz sürece evrenimiz bu X kümesi olacağından bir A kümesi için A^c tümleyeni daima $X \setminus A$ kümesini kastedecektir ve ayrıca $\bigcap \emptyset = X$ olacaktır.

Tanım 2.18.1 *Aşağıdaki koşulların ilk üçü sağlandığında $F \subseteq \mathcal{P}(X)$ kümesine X kümesinde bir **süzgeçtir**, dördü de sağlandığında ise bir **aşırı süzgeçtir** denir:*

1. $X \in F, \emptyset \notin F$.
2. $A, B \in F \implies A \cap B \in F$.
3. $A \in F \wedge A \subseteq B \subseteq X \implies B \in F$.
4. $\forall A \in \mathcal{P}(X) (A \in F \vee A^c \in F)$.

X üzerinde $F \subset F^*$ koşulunu sağlayan bir F^* süzgeci yoksa F süzgeci **büyüktür** (veya **maksimaldir**) denir.

Bir süzgeç, (1)+(2)'den dolayı, aynı anda hem A hem de A^c kümesini içermeyeceği için bir süzgecin aşırı olması tam da herhangi bir $A \subseteq X$ altkümesi için “ya A kümesinin ya da A^c kümesinin F 'de olması” demektir. Bu tanımda her kavram eşleğiyle (ikilisiyle) değiştirilirse *ideal* kavramına ulaşırız.

Tanım 2.18.2 *Aşağıdaki koşulların ilk üçü sağlandığında $I \subseteq \mathcal{P}(X)$ kümesine X kümesinde bir **idealdir**, dördü de sağlandığında ise bir **asal idealdir** denir:*

1. $X \notin I, \emptyset \in I$.
2. $A, B \in I \implies A \cup B \in I$.
3. $A \in I \wedge B \subseteq A \implies B \in I$.
4. $\forall A \in \mathcal{P}(X) (A \in I \vee A^c \in I)$.

Bu iki kavram eşlek oldukları için biri üzerinde söylenenin eşlek üzerinde bir eşleği vardır. Bu nedenle biri için önermeleri kanıtlamak yeterlidir, diğereine doğrudan aktarılır. Herhangi bir $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ için $\mathcal{A}^C := \{A^c \mid A \in \mathcal{A}\}$ olmak üzere her F süzgeci için F^C bir idealdir, F 'nin **eşlek idealdir** ve her I ideali içinse I^C bir süzgeçtir, I 'nın **eşlek süzgecidir**. Kolayca görüleceği gibi $F^{CC} = F$ ve $I^{CC} = I$.

Örnek 2.18.3 Süzgeçlere birkaç örnek vereceğiz:

1. $X \neq \emptyset$ ise $F := \{X\}, X$ 'de bir süzgeçtir. Buna basit veya kaba süzgeçte denir.
2. $\emptyset \neq A \subseteq X$ olmak üzere $F_A := \{B \in \mathcal{P}(X) \mid A \subseteq B\}$ bir süzgeçtir. Bu tipten süzgeçlere **esas süzgeçler** ve F_A^C tipindeki ideallere ise **esas idealler** denir.
3. X bir sonsuz küme ise sonlu altkümelerinin kümesi $I = [X]^{<\omega}$ bir idealdir. I 'ya X kümesindeki **Frèchet ideali** ve I^C 'ye ise X kümesindeki **Frèchet süzgeci** denir. I^C süzgeci X kümesinin tümleyeni sonlu olan altkümelerinden oluşur ve onu kısaca **tson** X ile gösterelim. Bunlar esas ideal ve esas süzgeç değildirler. Gerçekten de $A \subseteq X$ keyfi verilsin ve $A \neq \emptyset$ olsun. $a \in A$ için $X \setminus \{a\} \in I^C$ ancak $A \not\subseteq X \setminus \{a\}$. Dolayısıyla I^C , A kümesinin tanımladığı esas süzgeç olamaz, dd. $I^C \neq F_A$!
4. $X := [0, 1]$ ve I ise bu kümenin Lebesgue ölçüleri sıfır olan altkümelerinin ailesi olsun. I bir idealdir ve I^C ise X kümesinin ölçüsü 1 olan altkümelerinin süzgecidir.
5. $X \neq \emptyset$ bir topolojik uzay ve $x \in X$ ise, bu noktanın komşuluklarının $\mathcal{K}_x$ ailesi bir süzgeçtir.
6. X sayılamaz bir küme ise $I = [X]^{\leq \omega} = \{A \subseteq X \mid \aleph A \leq \omega\}$ bir idealdir ve **tsay** $X := I^C$ ise X kümesinde tümleyeni sayılabilir olan kümelerin süzgecidir. $\square$

Bir A kümesine her sonlu $B \subseteq A$ için $\bigcap B \neq \emptyset$ ise **sonlu arakesit özelliğine** sahiptir denir.

Önerme 2.18.4 $X \neq \emptyset$ olmak üzere aşağıdaki önermeler geçerlidir:

1. X kümesi üzerinde süzgeçlerin boş olmayan bir $\mathcal{F}$ ailesi verildiğinde $\bigcap \mathcal{F}$ de X üzerinde bir süzgeçtir.
2. X üzerinde bir $\mathcal{Z}$ süzgeç ailesi verilsin ve bu aile $\subseteq$ bağıntısına göre bir zincir olsun. O zaman $\bigcup \mathcal{Z}$ de bir süzgeçtir.
3. $G \subseteq \mathcal{P}(X)$ sonlu arakesit özelliğine sahipse X kümesi üzerinde $G \subseteq F$ koşulunu sağlayan bir F süzgeci vardır.

Kanıt. (1) ve (2)'yi ödev olarak bırakıp (3)'ün kanıtını vereceğiz.

$$G^* := \left\{ \bigcap H \mid H \subseteq G \wedge \aleph H < \omega \right\}$$

olmak üzere

$$F := \{B \mid \exists A \in G^* A \subseteq B \subseteq X\}$$

olsun. (1): G sonlu arakesit özelliğine sahip olduğundan $\emptyset \notin G^*$, dolayısıyla $\emptyset \notin F$ ve her sonlu $H \subseteq G$ için $\bigcap H \subseteq X$ olduğundan $X \in F$. (2): $B_1, B_2 \in F$ olsun. Tanım gereği sonlu $H_1, H_2 \subseteq G$ altkümeleri $\bigcap H_1 \subseteq B_1$ ve $\bigcap H_2 \subseteq B_2$ olacak biçimde vardır. $H := H_1 \cup H_2 \subseteq G$ sonlu ve

$$\bigcap H = \left(\bigcap H_1\right) \cap \left(\bigcap H_2\right) \subseteq B_1 \cap B_2$$

olduğundan $B_1 \cap B_2 \in F$ olur. (3) tanım gereği sağlanmıştır. ■

Not 2.18.5 Kanıtta tanımlanan F süzgeci X üzerindeki süzgeçlerden G kümesini içerenlerin $\subseteq$ bağıntısına göre en küçüğüdür, dd.

$$F = \bigcap \{S \mid G \subseteq S \text{ ve } S, X \text{ üzerinde bir süzgeçtir}\}.$$

Önerme 2.18.6 X kümesi üzerindeki bir F süzgecinin bir aşırı süzgeç olması için gerek ve yeter koşul bir büyük süzgeç olmasıdır.

Kanıt. 1. F , X üzerinde bir aşırı süzgeç olsun. F 'nin büyük olmadığını varsayalım. O zaman $F \subset F^*$ koşulunu sağlayan bir F^* süzgeci vardır. $\exists A \in F^* \setminus F$. F aşırı süzgeç olduğundan $A^c \in F$ ve $F \subset F^*$ olduğundan $A, A^c \in F^*$, dolayısıyla $A \cap A^c = \emptyset \in F^*$ olur. Bu ise bir çelişkidir.

2. F aşırı süzgeç olmasın. F 'nin büyük olmadığını kanıtlayacağız. F aşırı süzgeç olmadığından $A \notin F$ ve $A^c \notin F$ olacak biçimde bir $\emptyset \neq A \subseteq X$ altkümesi vardır. Önce $G := F \cup \{A\}$ ailesinin sonlu arakesit özelliğine sahip olduğunu görelim. Keyfi bir $B \in F$ için $A^c \notin F$ olduğundan $B \not\subseteq A^c$, dolayısıyla her $B \in F$ için $B \cap A \neq \emptyset$. Her sonlu $H \subseteq F$ için $\bigcap H \in F$ olduğundan $A \cap (\bigcap H) \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla G sonlu arakesit özelliğine sahiptir ve (2.18.4)(3)'ten dolayı G 'yi içeren bir F^* süzgeci vardır. $A \in F^*$ ve $F \subseteq F^*$ olduğundan $F \subset F^*$ olur ve F süzgeci büyük değildir. ■

Teorem 2.18.7 Tarski. Bir $G \subseteq \mathcal{P}(X)$ ailesinin X üzerinde bir aşırı süzgece genişletilebilmesi için gerek ve yeter koşul G 'nin sonlu arakesit özelliğine sahip olmasıdır. Özellikle her süzgeç bir aşırı süzgece genişletilebilir.

Kanıt. G sonlu arakesit özelliğine sahip değilse $G \subseteq F$ koşulunu sağlayan bir F süzgeci olamayacağı aşikardır.

Şimdi G sonlu arakesit özelliğine sahip olsun. (2.18.4)(3)'ten $G \subseteq F$ olan bir F süzgeci vardır. Şimdi $\mathcal{F} := \{S \mid F \subseteq S \text{ ve } S, X \text{ de süzgeç}\}$ kümesini $\subseteq$ ile kısmi sıralarsak (2.18.4)(2)'den dolayı Zorn Lemması'nın koşulları

sağlanır. $\mathcal{F}$ 'de en az bir F^* büyük öge vardır. $F \subseteq F^*$ ve (2.18.6)'dan dolayı F^* bir aşırı süzgeçtir. Her süzgeç sonlu arakesit özelliğine sahip olduğundan işimiz biter. ■

Önerme 2.18.8 X üzerindeki F süzgeci için aşağıdaki önermeler denktir:

1. F aşırı esas süzgeçtir.
2. Bir $x_0 \in X$ için $\{x_0\} \in F$. Bu durumda x_0 noktası tek olarak belirlidir ve $F = \{A \mid A \subseteq X \wedge x_0 \in A\}$.

Kanıt. (1) $\implies$ (2): $\exists \emptyset \neq A \subseteq X$, $F = F_A = \{B \mid A \subseteq B \subseteq X\}$ ve F aşırı süzgeç olsun. $\exists a \in A$. $A \not\subseteq X \setminus \{a\}$ olduğundan $X \setminus \{a\} \notin F$ ve F aşırı süzgeç olduğundan $\{a\} \in F$ olur. $A = \{a\}$ olmak zorundadır, aksi halde bir $b \in A \setminus \{a\}$ ögesinin olması gerekirdi ve aynı irdelemeyle $\{b\} \in F$ ve sonuçta $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset \in F$ olurdu!

(2) $\implies$ (1) : $\{x_0\} \in F$ olsun. $S_{x_0} := \{A \mid x_0 \in A \subseteq X\}$ esas süzgeci bir aşırı süzgeçtir. Gerçekten de herhangi bir $Y \subseteq X$ için ya $x_0 \in Y$ ya da $x_0 \notin Y$ olduğundan ya $Y \in S_{x_0}$ ya da $Y^c \in S_{x_0}$. Biz $F = S_{x_0}$ olduğunu savunuyoruz. $F \supseteq S_{x_0}$ olduğu süzgeç tanımından apaçıktır. Şimdi $Y \in F$ keyfi verilsin. $\emptyset \neq \{x_0\} \cap Y \in F$ olduğundan $x_0 \in Y$ dolayısıyla $Y \in S_{x_0}$ olur. Bu nedenle $F \subseteq S_{x_0}$ ve sonuçta $F = S_{x_0}$. ■

Not 2.18.9 Her $x \in X$ için $S_x = \{Y \mid x \in Y\}$ esas süzgecinin bir aşırı süzgeç olduğunu öğrendik. Ancak X sonsuz bir küme olduğunda X üzerinde bu tipten olmayan aşırı süzgeçler de vardır. Örneğin $\text{tson}X$ Fréchet süzgecini içeren herhangi bir F süzgeci bir esas süzgeç olamaz! Gerçekten de bir an için bir $x \in X$ ile $\text{tson}X \subseteq F = S_x$ varsayarsak $\{x\} \in S_x$, $X \setminus \{x\} \in \text{tson}X \subseteq S_x$ çelişmesine ulaşırız. Özellikle $\text{tson}X$ süzgecini içeren aşırı süzgeçler esas süzgeç olamazlar. $\text{tson}X$ süzgecini içeren süzgeçlere **serbest** süzgeçler denir. □

Tanım 2.18.10 κ sonsuz çokluk sayısı ve S ise X kümesi üzerinde bir süzgeç olsun. $\aleph T < \kappa$ koşulun sağlayan her $T \subseteq S$ için $\bigcap T \in S$ (bb. $\bigcup T \in F^C$) ise S (bb. S^C) κ -**tamdır** denir.

Not 2.18.11 Tanım gereği her süzgeç $\aleph_0$ -tamdır. $\aleph_1$ -tam yerine genellikle σ -tamdır denir. S 'nin tam olması için gvyk. S^C 'nin tam olmasıdır. □

λ bir sıra sayısı olsun. Herhangi bir λ sıra sayısını daima $\in$ sıralamasından kaynaklanan sıralama topolojisiyle ele alacağız. Bir $A \subseteq \lambda$ altkümenin kapalı olması yığılma noktalarını içermesi demektir. Bir $\gamma < \lambda$ sıra sayısının A kümesinin bir yığılma noktası olması için gerek ve yeter koşul önce γ 'nın bir limit sıra sayısı olması, γ 'nın her komşuluğunda A kümesinin γ 'dan farklı

bir öğesinin bulunmasıdır. Ancak $\{(\beta, \gamma] \mid \beta < \gamma\}$ ailesi γ için bir komşuluk bazı olduğundan ikinci koşul tam da $\sup(A \cap \gamma) = \gamma$ olması demektir. Bu nedenle ödev olarak bıraktığımız aşağıdaki önermeler geçerlidir:

$$A, \lambda\text{'da kapalıdır.} \iff \forall \beta < \lambda \sup(A \cap \beta) \in A.$$

Özel olarak κ bir düzenli çokluk sayısı ve $A \subseteq \kappa$ ise

$$A, \kappa\text{'da kapalıdır.} \iff \forall B \subseteq A (\text{t}B < \kappa \implies \sup B \in A.)$$

Tanım 2.18.12 λ bir limit sıra sayısı ve $A \subseteq \lambda$ olsun. A kümesi λ 'da kapalı ve sınırsız ise kısaca A, λ 'da bir **kasızdır** diyeceğiz.

Örnek 2.18.13 Birkaç örnek verelim.

1. ω 'nın topolojisi ayrık topoloji olduğundan her altkümesi kapalıdır. Diğer yandan $K_1 = \{2n + 1 \mid n < \omega\}$ ve $K_2 = \{2n \mid n < \omega\}$ kümeleri ω 'da sınırsız olduklarından K_1 ve K_2 kasızdırlar ve $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Benzer biçimde $C_1 = \{\omega_{2n+1} \mid n < \omega\}$ ve $C_2 = \{\omega_{2n} \mid n < \omega\}$ kümeleri $\aleph_\omega$ 'da kasızdırlar. ω ve $\aleph_\omega$ uzaylarının bir ortak yanı $sd(\omega) = sd(\aleph_\omega) = \aleph_0$ olmasıdır.
2. λ bir limit sıra sayısı, $sd(\lambda) > \omega$ ve $\beta < \lambda$ olsun. Bu durumda (β, λ) aralığı ve $(\beta, \lambda) \cap Lim$ kümeleri λ 'da birer kasızdırlar.
3. κ sayılamaz bir çokluk sayısı ve $\omega < sd(\kappa)$ olsun. $f : \kappa \rightarrow \kappa$ herhangi bir normal fonksiyonsa $K := \{\alpha \mid \alpha < \kappa \wedge f(\alpha) = \alpha\}$ bir kasızdır. κ bir Hausdorff uzayı ve normal fonksiyonlar sürekli olduklarından sabit noktalarının kümesi olarak K kapalıdır. Diğer yandan her $\beta < \kappa$ için $\omega < sd(\kappa)$ olduğundan $\beta \leq f^\omega(\beta) < \kappa$ ve $f^\omega(\beta) \in K$ olduğundan K sınırsız, dolayısıyla kasızdır. $\square$

Teorem 2.18.14 λ bir limit sıra sayısı ve $\omega < sd(\lambda)$ olsun. $\delta < sd(\lambda)$ ve her $\xi < \delta$ için λ 'da kasız A_ξ kümeleri verilsin. Bu durumda $\bigcap_{\xi < \delta} A_\xi$ kasızdır.

Kanıt. Her şeyden önce $A := \bigcap_{\xi < \delta} A_\xi$, λ 'da kapalı kümeleri arakesiti olarak λ 'da kapalıdır. Geriye A kümesinin λ 'da sınırsız olduğunu göstermek kalıyor.

Her $\xi < \delta$ için bir $f_\xi : \lambda \rightarrow \lambda$ fonksiyonu her $\alpha < \lambda$ için

$$f_\xi(\alpha) := \min(A_\xi \setminus (\alpha + 1))$$

olarak açıklansın. Tanım gereği $\alpha < \alpha + 1 \leq f_\xi(\alpha) \in A_\xi$. Şimdi bir $f : \lambda \rightarrow \lambda$ fonksiyonunu

$$f(\alpha) := \sup\{f_\xi(\alpha) \mid \xi < \delta\}$$

olarak tanımlayalım. $\delta < sd(\lambda)$ olduğundan $f(\alpha) < \lambda$.

Şimdi $\beta < \lambda$ keyfi verilsin. β sıra sayısının f altında $f^n(\alpha)$ tekrarlarını alalım, dd. $\beta_n := f^n(\beta)$ yazarsak

$$\beta_0 = \beta, \forall n < \omega \beta_{n+1} = f(\beta_n) \text{ ve } f^\omega(\beta) = \sup_{n < \omega} \beta_n.$$

olsun. Bu durumda her $\xi < \delta$ için

$$\beta = \beta_0 < f_\xi(\beta_0) \leq \beta_1 < f_\xi(\beta_1) \leq \beta_2 < f_\xi(\beta_2) \leq \beta_3 < \dots (f_\xi(\beta_n) \in A_\xi)$$

dizisini elde ederiz. $\omega < sd(\lambda)$ olduğundan $f^\omega(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_\xi(\beta_n) < \lambda$ ve A_ξ , λ 'da kapalı olduğundan her ξ için $f^\omega(\beta) \in A_\xi$, dolayısıyla $f^\omega(\beta) \in A$ olur. Her $\beta < \lambda$ için bir $f^\omega(\beta) \in A$ ögesini $\beta < f^\omega(\beta) < \lambda$ olacak biçimde bulabildiğimiz için A kümesi λ 'da sınırsızdır. ■

Teoremimizin bir basit sonucu $\{K \mid K \subseteq \lambda \text{ ve } K, \lambda \text{'da kasızdır}\}$ ailesinin sonlu arakesit özelliğine sahip olduğudur. Sonlu sayıda kasızın arakesiti de bir kasız olduğundan (2.18.4)(3)'ün kanıtından

$$Kasız_\lambda := \{X \mid \lambda \text{'da bir kasız } K \text{ ile } K \subseteq X \subseteq \lambda\}$$

λ 'da bir süzgeçtir; hem de λ 'daki tüm kasızları içeren en küçük süzgeçtir.

Not 2.18.15 Örnek (2.18.13)(1)'de önermemizin $sd(\lambda) = \omega$ için doğru olmadığını gördük. Ancak savımız $\omega < sd(\lambda)$ ve $\delta \geq sd(\lambda)$ için de genelde doğru değildir. Kesin artan bir $(\alpha_\xi)_{\xi < sd(\lambda)}$ dizisini $\lambda = \sup\{\alpha_\xi \mid \xi < sd(\lambda)\}$ olacak biçimde seçelim. Her $\sigma < sd(\lambda)$ için $A_\sigma := [\alpha_\sigma, \lambda)$ ve her $sd(\lambda) \leq \sigma < \delta$ içinse $A_\sigma = \lambda$ olarak alınsın. Her $\sigma < \delta$ için A_σ kasızdır, ancak $\bigcap_{\sigma < \delta} A_\sigma = \emptyset$ sınırsız değildir. Özellikle $\kappa > \omega$ düzenli çokluk sayısı ise bu örnek her $\sigma < \kappa$ için κ 'da A_σ kasızı verildiğinde $\bigcap_{\sigma < \kappa} A_\sigma$ arakesitinin kasız olması gerekmediğini gösterir. Köşegensel arakesit diyeceğimiz bir başka kavramla bu doğru olacaktır. □

Tanım 2.18.16 Her $\sigma < \kappa$ için bir $A_\sigma \subseteq \kappa$ altkümesi verildiğinde

$$\Delta_{\sigma < \kappa} A_\sigma := \{\alpha \mid \alpha < \kappa \wedge \alpha \in \bigcap_{\sigma < \alpha} A_\sigma\}$$

kümesine $\{A_\sigma \mid \sigma < \kappa\}$ ailesinin **köşegensel arakesiti** denir³⁸.

³⁸ $\Delta_{\alpha < \kappa} A_\alpha$ gösterimini yaygın bir gösterim olduğu için kullandık. Ancak köşegensel arakesitin eşleği olan köşegensel birleşim de göz önüne alırsa bu gösterim yerine örneğin $\Delta \bigcap_{\sigma < \alpha} A_\sigma$ gösterimini kullanmak daha uygun görünmektedir.

$$D_\alpha := \bigcap_{\sigma < \alpha} A_\sigma$$

olmak üzere

$$\kappa = D_0 \supseteq D_1 \supseteq \cdots \supseteq D_\alpha \supseteq \cdots \quad (\alpha < \kappa)$$

dizisini elde ederiz. $D_1 = A_0$ ve $D_2 = A_0 \cap A_1$ olduğundan $1 \in \Delta_{\sigma < \kappa} A_\sigma \iff 1 \in A_0$ ve $2 \in \Delta_{\sigma < \kappa} A_\sigma \iff 2 \in A_0 \cap A_1$ olur. Bu gösterimlerle

$$\Delta_{\sigma < \kappa} A_\sigma = \{\alpha \mid \alpha < \kappa \wedge \alpha \in D_\alpha\}.$$

Teorem 2.18.17 $\kappa > \omega$ düzenli çokluk sayısı ve her $\sigma < \kappa$ için κ 'da bir A_σ kasızı verilsin. Bu durumda $A := \Delta_{\sigma < \kappa} A_\sigma$ köşegensel arakesitte bir kasızdır.

Kanıt. 1. Önce A kümesinin κ 'da kapalı olduğunu görelim. $\lambda < \kappa$ sıra sayısı A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Bu durumda $\lambda = \sup(A \cap \lambda)$. Bir σ sıra sayısını $\sigma < \kappa$ olacak biçimde seçelim ve sabit turalım. Bu durumda λ sıra sayısı A kümesinin (σ, λ) açık aralığına düşen bir takım noktalarından oluşan bir dizinin limitidir. Ancak $\alpha \in A \cap (\sigma, \lambda)$ ise köşegensel arakesitin tanımından $\alpha \in D_\alpha \subseteq A_\sigma$ olacağından bu dizini tüm terimleri A_σ kasısında bulunur. Dolayısıyla $\lambda \in A_\sigma$. $\sigma < \kappa$ keyfi seçildiğinden sonuçta $\lambda \in A$ olur.

2. A kümesinin κ 'da sınırsız olduğunu görelim. Her $\alpha < \kappa$ için $\alpha < \kappa$ olduğundan (2.18.14) ile $D_\alpha = \bigcap_{\sigma < \alpha} A_\sigma$ kümesi κ 'da bir kasızdır. Şimdi $\alpha < \kappa$ keyfi verilsin. Tekrarlı tanımlamayla her $n < \omega$ için $\beta_n < \kappa$ sıra sayıları $\alpha < \beta_0 < \beta_1 < \cdots$ ve $\beta_n \in D_{\beta_n}$ olacak biçimde tanımlanacaklardır. D_0 bir kasız olduğundan bir β_0 koşulları sağlayacak biçimde seçilebilir. β_n koşulları sağlayacak biçimde seçilmiş olsun. $D_{\beta_{n+1}}$ bir kasız olduğundan $\beta_n < \beta_{n+1} < \kappa$ olacak biçimde bir β_{n+1} bulabiliriz. $\beta := \sup \beta_n$ olsun. $\omega < \kappa$ ve κ düzenli olduğundan $\beta < \kappa$.

Şimdi $\beta \in D_\beta$, dolayısıyla $\beta \in A$ olduğunu savunuyoruz. Her $\sigma < \beta$ için tanım gereği $D_\beta \subseteq D_\sigma \subseteq A_\sigma$. Şimdi σ , $\sigma < \beta$ olacak biçimde keyfi verilsin. Bir n doğal sayısını $\sigma < \beta_n$ olacak biçimde seçelim. $\{\beta_m \mid m \geq n\} \subseteq A_\sigma$ ve A_σ bir kasız olduğundan $\sup\{\beta_m \mid m \geq n\} = \beta \in A_\sigma$ olacaktır. $\sigma < \beta$ keyfi olarak seçildiğinden her $\sigma < \beta$ için $\beta \in A_\sigma$, dolayısıyla $\beta \in D_\beta$ olacaktır. Bu ise $\beta \in A$ demektir. Her $\alpha < \kappa$ için $\alpha < \beta < \kappa$ olacak biçimde bir $\beta \in A$ bulabildiğimiz için A kümesi κ 'da sınırsızdır. ■

Teoremimizin basit bir sonucu ise κ sayılamaz ve düzenli çokluk sayısı olduğunda Kasız $_\kappa$ süzgecinin κ -tam olduğudur.

Güç ve sondaşlık gibi büyüklük türlerine *durağanlık* gibi bir başka büyüklük ölçütü katacağız. λ sıra sayısının herhangi bir anlamda büyük diyeceği-

miz altkümelerinden beklediğimiz asgari koşullar şunlardır:

- (1) λ büyüktür.
- (2) $\emptyset$ küçüktür.
- (3) X büyük ve $X \subseteq Y \subseteq \lambda$ ise Y de büyüktür.
- (4) $X = Y \cup Z$ büyükse Y veya Z büyüktür.

λ 'daki kasızlar büyük gibi görünseler de (3) ve (4)'ü sağlamazlar. Yine de onlar yardımıyla (1)–(4)'ü sağlayan bir büyüklük kavramı tanımlayacağız. Ancak daha şimdiden şunu belirtebiliriz: (4)'ün bir sonucu olarak bir büyük küme sonlu sayıda ayırık parçaya ayrılırsa bunlardan en az biri büyük olmak zorundadır. Çekmece ilkesi geçerlidir.

Tanım 2.18.18 λ sıra sayısındaki her kasız K için $K \cap A \neq \emptyset$ ise A kümesi λ 'da **durağandır** denir.

(2.18.14)'ten dolayı herhangi bir kasızın tüm kasızlarla arakesiti boş olmadığından *her kasız durağandır*.

Örnek 2.18.19 $D := \{\alpha \in \aleph_2 \mid sd(\alpha) = \omega\}$ kümesinin $\aleph_2$ kümesinde durağan ancak kapalı olmadığını savunuyoruz. K kümesi $\aleph_2$ 'de bir kasız olsun. K kümesi $\aleph_2$ 'de sondaş ve $\aleph_2$ düzenli çokluk olduğundan $\aleph K = \aleph_2$. Dolayısıyla K kümesinin öğelerini kesin artan bir $(\alpha_\xi)_{\xi < \aleph_2}$ dizisiyle sıralayabiliriz. Bu durumda $sd(\alpha_\omega) = \omega$ olacağından $\alpha_\omega \in D$, dolayısıyla $D \cap K \neq \emptyset$ olur. D durağandır. D kümesi de $\aleph_2$ 'de sondaş olduğundan bu kümenin öğelerini de $(\delta_\xi)_{\xi < \aleph_2}$ olarak kesin artan biçimde sıralayabiliriz. $\lambda := \sup_{\xi < \aleph_1} \delta_\xi$ için $sd(\lambda) = \aleph_1$ olacağından $\lambda \notin D$, dolayısıyla D kapalı değildir. $\square$

Durağan kümelerin “büyük” için verdiğimiz ölçütlerin ilk üçünü sağladığı apaçıktır. (4)'ün ise fazlasıyla sağlandığını aşağıdaki çekmece önermesiyle kanıtlayacağız.

Önerme 2.18.20 κ düzenli, $sd(\kappa) > \omega$ ve $\beta < sd(\kappa)$ olsun. D kümesi κ 'da durağansa her $f : D \rightarrow \beta$ fonksiyonun en az bir $D_\alpha^f = f^{-1}[\{\alpha\}]$ sapı durağandır. Başka sözlerle D kümesi $\{D_\xi \mid \xi < \beta\}$ olarak parçalanırsa en az bir D_ξ durağandır.

Kanıt. Savımızın yanlış olduğunu varsayalım. Her $\alpha < \beta$ için κ 'da kasız bir K_α kümesini $K_\alpha \cap D_\alpha^f = \emptyset$ olacak biçimde seçelim. (2.18.14)'ten dolayı $K := \bigcap_{\alpha < \beta} K_\alpha$ kümesi κ 'da bir kasızdır ve $K \cap D = \emptyset$. Bu ise D kümesinin durağanlığıyla çelişir. $\blacksquare$

Tanım 2.18.21 λ bir sıra sayı, $X \subseteq \lambda$ ve $f : X \rightarrow \lambda$ olsun. Her $\xi \in X$ için $f(\xi) < \xi$ ise f fonksiyonu **(geri) çekilmiştir** diyelim.

Teorem 2.18.22 Fodor: κ sayılamaz ve düzenli bir çokluk sayısı ve D ise κ 'nın durağan bir altkümeleri olsun. Her çekilmiş $f : D \rightarrow \kappa$ fonksiyonun en az bir durağan D_α^f sapı vardır.

Kanıt. Tersini varsayalım. Bir önceki kanıtta olduğu gibi her $\alpha < \kappa$ için κ 'da kasız bir K_α kümesini $K_\alpha \cap D_\alpha^f = \emptyset$ olacak biçimde seçelim. $K := \Delta_{\alpha < \kappa} K_\alpha$ bu kasızların kösegensel arakesitleri olsun. K bir kasızdır.

Biz $K \cap D = \emptyset$ olduğunu savunuyoruz. $\alpha \in K \cap D$ ve $\beta := f(\alpha)$ olsun. $\alpha \in D_\beta^f$, $\beta < \alpha$ ve dolayısıyla $\alpha \in \bigcap_{\sigma < \alpha} K_\sigma \subseteq K_\beta$ olduğundan $K_\beta \cap D_\beta^f \neq \emptyset$ çelişkisi elde edilir. ■

Teorem 2.18.23 Ulam-Solovay : Her düzenli ve sayılamaz κ çokluk sayısı κ -çoklukta ayrık ve durağan altkümelerine parçalanabilir.

Kanıt. Durağan kümeleri içeren kümeler de durağan olduklarından κ 'da durağan ve ayrık olan κ çoklukta durağan küme bulduğumuzda işimiz biter.

$$D := \{\lambda \mid \lambda \in \text{Lim} \cap \kappa \wedge \text{sd}(\lambda) = \omega\}$$

kümesi κ 'da durağandır. Her $\alpha \in D$ için α 'ya yakınsayan kesin artan bir $(\delta_n^\alpha)_{n < \omega}$ dizisi seçelim.

Biz her $\nu < \kappa$ için $\{\alpha \in D \mid \delta_n^\alpha \geq \nu\}$ kümesinin durağan olduğu bir $n < \omega$ doğal sayısının var olduğunu savunuyoruz. Aksi halde her $n < \omega$ için bir $\nu_n < \kappa$,

$$A_n := \{\alpha \in D \mid \delta_n^\alpha \geq \nu_n\}$$

durağan olmayacak biçimde bulunabilir. $\nu := \sup_{n < \omega} \nu_n$ dersek $\omega < \kappa \text{sd}(\kappa)$ olduğundan $\nu < \kappa$ olur. Her $n < \omega$ için kasız $K_n \subseteq \kappa$ kümesini $A_n \cap K_n = \emptyset$ olacak biçimde seçelim. (2.18.14)'ten dolayı $K := \bigcap_{n < \omega} K_n$ kasızdır. Böylece $D \cap K$ kümesi κ 'da durağandır; özellikle sınırsızdır. Şimdi $\alpha \in D \cap K$ ögesini $\nu < \alpha$ olacak biçimde seçelim. $K \cap (\bigcup_{n < \omega} A_n) = \emptyset$ olduğundan $\delta_n^\alpha < \nu_n \leq \nu < \alpha$ ve böylece $\alpha = \sup \delta_n^\alpha \leq \nu < \alpha$ çelişkisi elde edilir.

n savunduğumuz tipten bir doğal sayı olsun. $f : D \rightarrow \kappa$ fonksiyonu $f(\alpha) := \delta_n^\alpha < \alpha$ olarak tanımlansın. f bir çekilmiş fonksiyondur. n doğal sayısının seçiminden her $\nu < \kappa$ için

$$D_\nu := \{\alpha \in D \mid \delta_n^\alpha \geq \nu\}$$

kümesi durağandır. $f|D_\nu : D_\nu \rightarrow \kappa$ fonksiyonu da çekilmiş olacağından Fodor Teoremi'nden dolayı en az bir sapı durağandır, dd. bir $\gamma_\nu \in \kappa$ ile

$$D_\nu^* := \{\alpha \in D_\nu \mid f(\alpha) = \gamma_\nu\}$$

durağandır. $\nu \leq \gamma_\nu$ olduğundan $\{\gamma_\nu \mid \nu < \kappa\}$ kümesi κ 'da sondaştır ve κ düzenli olduğundan $\aleph\{\gamma_\nu \mid \nu < \kappa\} = \kappa$. Böylece gücü κ olan bir $I \subseteq \kappa$

altkümesi her $i, j \in I$ için $i \neq j$ ise $\gamma_i \neq \gamma_j$ olacak biçimde seçilebilir. Bu durumda elbette $\{D_i^* \mid i \in I\}$ saplar ailesi ayrık olacaktır ve her bir sap ayrık olduğundan işimiz biter. ■

Düzenli bir κ çokluk sayısına $\{\lambda \in \kappa \mid \lambda \text{ ulaşamaz}\}$ kümesi κ 'da durağan-sa bir **Mahlo çokluk sayısıdır** veya kısaca **Mahlodur** denir.

Teorem 2.18.24 κ Mahloysa ulaşamaz.

Kanıt. Tanım gereği κ düzenli. $\mu < \kappa$ ise (μ, κ) aralığı κ 'da kasızdır. $\{\lambda \in \kappa \mid \lambda \text{ ulaşamaz}\}$ durağan olduğundan ulaşamaz bir λ sıra sayısı $\mu < \lambda < \kappa$ olacak biçimde vardır. Bu durumda ise $!2^\mu < \lambda < \kappa$ ve işimiz biter. ■

Bu teoremin bir sonucu ise ZFC kuramında Mahlo sayılarının varlığının kanıtlanamayacağıdır.

2.19 NEUMANN SİLSİLESİ

Öykünün sonuna geldik. Matematik özünde nesnelerle ilgilenmez, onlar arasındaki *bağıntılarla* ilgilenir. Bağıntıları kümeler olarak tanımlayabileceğimizi öğrendik. Öyleyse temel öğelerden vazgeçebilir ve tüm matematiği kümeler üzerine kurabiliriz. Neumann'ı izleyerek $\mathbb{U}$ evreninden tüm öğeleri kümeler olan ve matematik için yeterli olacak bir $\mathbb{V}$ evrenini belirleyelim. Bir takım önlemler almazsak çelişkilerle karşılaşabileceğimizi öğrendik. Bu çelişkilerden kurtulmanın bir yolunun *yeni* küme oluştururken *kendisini* kullanmayıp öğelerini *daha önce oluşturulmuş* öğelerden seçmek olduğunu öğrendik. Her ne kadar matematiksel evren *oluşum halinde bir evren değilse* de yeni bir küme tanımlarken daha önce küme olduğundan emin olduğumuz öğeleri derlemek bize bir tür *küme kuramsal zaman eksenini* verir. $\mathbb{V}$ evrenin zaman eksenini olarak Srs sıra sayıları alınacaktır. Teorem 2.12.12'de $a = \emptyset$ ve

$$H : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}(x \rightsquigarrow \mathcal{P}(x)) \text{ ve } K : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}(x \rightsquigarrow \cup x)$$

olarak elde ettiğimiz fonksiyonumuz $F : Srs \rightarrow \mathbb{U}$ ve her $\alpha \in Srs$ için $\mathbb{V}_\alpha := F(\alpha)$ olsun. Bu durumda:

1. $\mathbb{V}_0 = \emptyset$ (*Başlangıçta hiçbir şey yoktu!*).
2. Her $\alpha \in Srs$ için $\mathbb{V}_{\alpha+1} = \mathcal{P}(\mathbb{V}_\alpha)$.
3. Her λ limit sıra sayısı için $\mathbb{V}_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathbb{V}_\alpha$.

İşte çelişkisiz olduğunu *sandığımız* ve matematik için yeterli bulduğumuz $\mathbb{V}$ evreni:

$$\mathbb{V} := \bigcup_{\alpha \in Srs} \mathbb{V}_\alpha$$

olarak tanımlanan evrendir.

İlk birkaç sıra sayısı için $\mathbb{V}_\alpha$ kümelerini yazalım.

$$\mathbb{V}_0 = \emptyset = 0.$$

$$\mathbb{V}_1 = \{\emptyset\} = \{0\} = 1 = \{\mathbb{V}_0\}.$$

$$\mathbb{V}_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\} = 2 = \{\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1\}.$$

$$\mathbb{V}_3 = \{0, 1, \{1\}, 2\} = \{\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1, \{1\}, \mathbb{V}_2\}.$$

$$\mathbb{V}_4 = \{0, 1, \{1\}, \{2\}, \{\{1\}\}, 2, \{0, \{1\}\}, \{0, 2\}, \{1, \{1\}\}, \{1, 2\}, \{\{1\}, 2\}, \{0, 1, \{1\}\}, 3, \{0, \{1\}, 2\}, \{1, \{1\}, 2\}, \mathbb{V}_3\}.$$

Bu başlangıca kısa bir göz attığımızda dikkatimizi çeken bazı noktaları belirtelim: $\mathbb{V}$ evreninde bir tek temel öge vardır, o da $\emptyset = 0$ boş kümedir. Her $\mathbb{V}_\alpha$ bir geçişli kümedir. $\alpha < \beta$ ise $\mathbb{V}_\alpha \in \mathbb{V}_\beta \wedge \mathbb{V}_\alpha \subset \mathbb{V}_\beta$. Her α için $\mathbb{V}_\alpha \cap Srs = \alpha$. Örneğin $\mathbb{V}_3 \cap Srs = \{0, 1, 2\} = 3$, $\mathbb{V}_4 \cap Srs = \{0, 1, 2, 3\} = 4$. Başlangıçta gözlediğimiz bu ilişkilerin genel doğrular olduğunu görelim.

Teorem 2.19.1 1. Her $\mathbb{V}_\alpha$ geçişli bir kümedir.

2. Her $\alpha, \beta \in Srs$ için $\alpha < \beta \implies \mathbb{V}_\alpha \in \mathbb{V}_\beta$, dolayısıyla $\mathbb{V}_\alpha \subset \mathbb{V}_\beta$.

3. $\mathbb{V}_\alpha \cap Srs = \alpha$, dolayısıyla $\alpha \in \mathbb{V}_{\alpha+1}$.

4. $\mathbb{V}$ bir öz sınıftır.

Kanıt. 1. Sonluötesi tümevarım kullanacağız. i) $\mathbb{V}_0 = \emptyset$ geçişlidir. ii) $\mathbb{V}_\alpha$ geçişli olsun. $y \in x \in \mathbb{V}_{\alpha+1}$ ise $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ 'nin tanımından $y \in x \subseteq \mathbb{V}_\alpha$. Buradan $y \in \mathbb{V}_\alpha$ ve $\mathbb{V}_\alpha$ geçişli olduğundan $y \subseteq \mathbb{V}_\alpha$, dolayısıyla $y \in \mathbb{V}_{\alpha+1}$ olur. Böylece $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ geçişlidir. iii) λ bir limit öge ve her $\alpha < \lambda$ için $\mathbb{V}_\alpha$ geçişli olsun. Geçişli kümelerin birleşimi de geçişli olduğundan $\mathbb{V}_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathbb{V}_\alpha$ da geçişlidir.

2. α keyfi veilsin. Önermeyi $X := \{\beta \mid \beta \geq \alpha + 1\}$ iyi sıralanmış sınıfında sonluötesi tümvarımla kanıtlayacağız. $\alpha + 1 = \min X$. i) $\beta = \alpha + 1$ için tanım gereği $\mathbb{V}_\alpha \in \mathcal{P}(\mathbb{V}_\alpha) = \mathbb{V}_{\alpha+1}$. ii) Şimdi $\alpha < \beta$ ve $\mathbb{V}_\alpha \in \mathbb{V}_\beta$ olsun. $\mathbb{V}_\beta$ geçişli olduğundan $\mathbb{V}_\alpha \subseteq \mathbb{V}_\beta$, dolayısıyla $\mathbb{V}_\alpha \in \mathbb{V}_{\beta+1}$. iii) Şimdi $\lambda > \alpha$ bir limit öge ise $\alpha < \alpha + 1 < \lambda$ ve $\mathbb{V}_\alpha \in \mathbb{V}_{\alpha+1}$ olduğundan $\mathbb{V}_\alpha \in \bigcup_{\beta < \lambda} \mathbb{V}_\beta = \mathbb{V}_\lambda$.

3. Sonluötesi tümevarım kullanacağız. i) $\alpha = 0$ için $0 = \emptyset = \mathbb{V}_0 \cap Srs$. ii) α için önerme kanıtlanmış olsun (tvk). Her $\beta \in Srs$ için

$$\beta \in \mathbb{V}_{\alpha+1} \iff \beta \subseteq \mathbb{V}_\alpha \iff \beta \subseteq \mathbb{V}_\alpha \cap Srs \stackrel{(tvk)}{=} \alpha \iff \beta \in \alpha + 1.$$

Dolayısıyla

$$\alpha + 1 = \{\beta \mid \beta \in \alpha + 1\} = \{\beta \mid \beta \in \mathbb{V}_{\alpha+1}\} = Srs \cap \mathbb{V}_{\alpha+1}.$$

iii) Şimdi λ bir limit sıra sayısı olsun ve her $\alpha < \lambda$ için $\alpha = \mathbb{V}_\alpha \cap Srs$ olsun (tvk). Bu durumda

$$\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \alpha = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathbb{V}_\alpha \cap Srs = \left(\bigcup_{\alpha < \lambda} \mathbb{V}_\alpha \right) \cap Srs \stackrel{(tvk)}{=} \mathbb{V}_\lambda \cap Srs.$$

$\alpha = \mathbb{V}_\alpha \cap Srs \subseteq \mathbb{V}_\alpha$ olduğundan $\alpha \in \mathbb{V}_{\alpha+1}$.

4. (3)'ten dolayı $Srs \subseteq \mathbb{V}$, dolayısıyla $\mathbb{V}$ bir öz sınıftır. ■

Şimdiye kadar elde ettiğimiz teoremlerin hiçbirinde kümeler için “ $x \notin x$ ” gibi bir aksiyoma gerek duymadık. Gerçekten de geleneksel matematik için böyle bir aksiyom zorunlu değildir. Ancak yine de tanıdık kümeler için bu böyledir ve Russell çelişkisinden dolayı da bu tip kümeler bir şekilde bize sevimsiz görünmektedirler. $\emptyset$ kümeden başlayarak adım adım oluşturduğumuz $\mathbb{V}$ evreninde gerçekten her $x \in \mathbb{V}$ için $x \notin x$ doğrudur. Bunu az ileride göreceğiz.

$\mathbb{V}$ evreninin herhangi bir x ögesi verilisin. Bir α için $x \in \mathbb{V}_{\alpha+1}$ ise $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ geçişli olduğundan $x \subseteq \mathbb{V}_{\alpha+1}$. Diğer yandan $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ kümesinin tanımından dolayı aynı zamanda $x \subseteq \mathbb{V}_\alpha$. Bu nedenle

$$sv(x) := \min\{\alpha \mid x \in \mathbb{V}_{\alpha+1}\} = \min\{\alpha \mid x \subseteq \mathbb{V}_\alpha\}.$$

$sv(x)$ sıra sayısına x ögesinin $\mathbb{V}$ evrenindeki **seviyesi** denir. Bu tanıma göre örneğin

$$\begin{aligned} sv(\emptyset) &= 0, sv(1) = 1, sv(\{1\}) = sv(2) = 2, \\ sv(3) &= sv(\{1, \{1\}, 2\}) = sv(\{0, 2\}) = sv(\{2\}) = 3. \end{aligned}$$

Olaya şöyle de bakabiliriz. Bir tek $\emptyset$ temel öğemiz var ve onu 0. seviyeden öge olarak açıklıyoruz. Her $\beta \leq \alpha$ için β seviyesinden öğeler açıklanmış olsun. Seviyesi $\alpha + 1$ olan bir kümenin öğelerinin seviyeleri $\leq \alpha$ olacaktır ve *en az bir* öğesinin seviyesi ise α olmalıdır. Bu nedenle

$$sv(x) = \sup\{sv(y) + 1 \mid y \in x\} = \bigcup\{sv(y) + 1 \mid y \in x\}.$$

Dolayısıyla

$$\forall x, y \in \mathbb{V} (x \in y \implies sv(x) < sv(y)) \quad (2.23)$$

(2.23)'den dolayı herhangi bir $x \in \mathbb{V}$ için $x \in x$ varsayımı bizi hemen $sv(x) < sv(x)$ çelişkisine götürür. *Dolayısıyla her $x \in \mathbb{V}$ için $x \notin x$.*

Tanım 2.19.2 X sınıfı verilsin. Boştan farklı her $Y \subseteq X$ altkümesinin bir $z \in Y$ ögesi $z \cap Y = \emptyset$ olacak biçimde varsa X sınıfı **temellidir** denir. X sınıfını temelliyse ve ayrıca her $x \in X$ ögesinin $X_x^\in$ uzantısı bir küme ise X sınıfı **iyi temellidir** denir.

Teorem 2.19.3 $\mathbb{V}$ sınıfı iyi temellidir.

Kanıt. 1. $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{V}$ altkümesi verilsin. $\alpha := \min\{sv(x) \mid x \in X\}$ ve $A := \{x \in X \mid sv(x) = \alpha\}$ olsun. Her $a \in A$ ögesi X kümesinin bir $\in$ -küçük ögesidir. Dolayısıyla $\in$ bağıntısı temellidir.

2. $x \in \mathbb{V}$ ögesi keyfi verilsin. $\alpha := sv(x)$ olsun. Öncelikle $x \in \mathbb{V}_{\alpha+1}$. $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ geçişli olduğundan her $y \in x$ için $y \in \mathbb{V}_{\alpha+1}$ olduğundan x ögesinin $\mathbb{V}$ sınıfındaki $\in$ bağıntısına göre uzantısı $\mathbb{V}_x^\in = \{y \mid y \in x\}$, $\mathbb{V}_{\alpha+1}$ kümesinin bir altkümesidir. ■

Lemma 2.19.4 X temelli bir sınıfsa her $x \in X$ için $x \notin x$.

Kanıt. Gerçekten de bir $x \in X$ için $x \in x$ olduğunu varsayalım. $Y = \{x\} \subseteq X$ altkümesi için $x \in x \cap Y$, dolayısıyla $x \cap Y \neq \emptyset$ olur. Diğer yandan Y kümesinin yegane ögesi x ve X temelli olduğundan $x \cap Y = \emptyset$ olması gerekir. Çelişki! ■

İşte uygun aksiyomlar seçerek biçimselleştirmeyi düşündüğümüz evren bu $(\mathbb{V}, \in)$! Ancak bunun nedenlerini ve aksiyomlarımızın neler olabileceğini tartışmadan önce bir başka yaklaşıma kısaca değinelim.

2.19.1 Kümesel Evrenler, Evrencikler

Aslında **evren** olarak adlandırılan bir kavramı tanıyacağız. Ancak biz bu adı $\mathbb{V}$ için kullandığımızdan bunlara **kümesel evren** veya **evrencik** demeyi yeğledik. Bunlar kümeler olacaklar, birleşim ve kartezyen çarpımdaki damga kümeleri de bu kümede olmak üzere, temel küme işlemlerine göre kapalı olacaklar.

Tanım 2.19.5 Aşağıdaki koşullar sağlandığında bir E kümesine bir **evrencik** veya **kümesel evren** diyeceğiz:

1. $E \in \mathbb{V}$.
2. $\omega \in E$.
3. E geçişlidir.
4. $\forall x (x \in E \implies \mathcal{P}(x) \in E)$.
5. Her x için, $x \subseteq E$ ve x ile E eşgüçlü değilse $x \in E$.

Birçok matematikçi için tüm $\mathbb{V}$ evreninde çalışmak yerine bir kümesel evrende çalışmak yeterlidir. Bu yaklaşım aşağıdaki teoremden gerekçesini bulacaktır.

Teorem 2.19.6 *Her kümesel E evreni için aşağıdakiler geçerlidir.*

- (i) $\forall x \in E (\mathfrak{h}x < \mathfrak{h}E)$.
- (ii) $\omega < \mathfrak{h}E$.
- (iii) $\forall x, y (x \subseteq y \in E \implies x \in E)$.
- (iv) $\forall x, y (x, y \in E \implies \{x, y\} \in E)$.
- (v) $\forall x, y \in E (x, y) \in E$.
- (vi) $\forall x, y \in E x \times y \in E$.
- (vii) $\forall x \in E (f : x \rightarrow E \implies \text{res}f, f \in E)$.
- (viii) $\mathfrak{h}E$ ulaşılabilir.
- (ix) Her $x \in E$ için $\bigcup x \in E$.
- (x) $I \in E \wedge \forall i \in I (x_i \in E) \implies \bigcup_{i \in I} x_i, \prod_{i \in I} x_i \in E$.

Kanıt. (i): $x \in E$ keyfi verilsin. (2.19.5)(4)'ten dolayı $\mathcal{P}(x) \in E$ ve (2.19.5)(3)'ten dolayı ise $\mathcal{P}(x) \subseteq E$. Böylece $\mathfrak{h}x < \mathfrak{h}\mathcal{P}(x) \leq \mathfrak{h}E$.

(ii). (2.19.5)(2) ve (i) ile $\omega < \mathfrak{h}E$.

(iii): $x \subseteq y \in E$ ise $x \in \mathcal{P}(y) \in E$ ve E geçişli olduğundan $x \in E$.

(iv): $x, y \in E$ keyfi verilsinler. $\{x, y\} \subseteq E$. $\mathfrak{h}\{x, y\} < \omega < \mathfrak{h}E$ olduğundan (2.19.5)(5)'ten $\{x, y\} \in E$.

(v) Doğrudan (iv)'ten çıkar.

(vi) $x, y \in E$ keyfi verilsinler. E geçişli olduğundan $x, y \subseteq E$. Dolayısıyla (v) ile her $u \in x, v \in y$ için $(u, v) \in E$ olur. Böylece $x \times y \subseteq E$ olur. (ii)'den dolayı E sonsuzdur. Diğer yandan (i)'den dolayı $\mathfrak{h}x < \mathfrak{h}E$ ve $\mathfrak{h}y < \mathfrak{h}E$ olduğundan $\mathfrak{h}(x \times y) < \mathfrak{h}E$ elde edilir. (2.19.5)(5)'ten $x \times y \in E$ elde edilir.

(vii) $x \in E$ ve $f : x \rightarrow E$ olsun. $\text{res}f \subseteq E$ ve $\mathfrak{h}\text{res}E \leq \mathfrak{h}x < \mathfrak{h}E$ olduğundan (2.19.5)(5)'ten $\text{res}f \in E$ olur. Önce (vi) ile $x \times \text{res}f \in E$, ardından (iii) ile $f \in E$ olur.

(viii) $\omega < \mathfrak{h}E =: \kappa$ olduğundan E sayılamaz sonsuzdur. κ 'nin düzenli olmadığını varsayalım ve $sd(\kappa) < \kappa$ olsun. Bu durumda $\mathfrak{h}A = sd(\kappa)$ olan bir $A \subseteq E$ altkümesi vardır. (2.19.5)(5)'ten dolayı $A \in E$ ve (vii)'den dolayı ise ${}^A E \subseteq E$. böylece (2.16.12)(1) ile

$$\kappa < !\kappa^{sd(\kappa)} = !(\mathfrak{h}E)^{\mathfrak{h}A} = ({}^A E) \leq \mathfrak{h}E = \kappa$$

çelişkisi elde edilir. Böylece κ düzenlidir. Şimdi $\mu < \kappa$ herhangi bir çokluk sayısı olsun. E kümesinin $\mu = \mathfrak{h}x$ olan bir $x \subseteq E$ altkümesi vardır. Kümesel evren tanımının sırasıyla (5), (4) ve teoremimizin (i) önermesinden $x \in E$, $\mathcal{P}(x) \in E$ ve $!2^\mu = \mathfrak{h}\mathcal{P}(x) < \kappa$ elde edilir. Sonuçta κ ulaşılabilir.

(ix): $x \in E$ keyfi verilsin. E geçişli olduğundan her $y \in x$ için $y \in E$, dolayısıyla $y \subseteq E$ olduğundan $\bigcup x = \bigcup_{y \in x} y \subseteq E$ olur. κ düzenli ve (i) ile $\aleph x < \kappa$ ve her $y \in x$ için $\aleph y < \kappa$ olduğundan (2.16.10)(3) ile

$$\aleph(\bigcup x) \leq \sum_{y \in x} \aleph y < \kappa$$

olur. (2.19.5)(1) ile $\bigcup x \in E$ elde edilir.

(x) $I \in E$ ve her $i \in I$ için $x_i \in E$ olsun. $Y := \{x_i \mid i \in I\}$ olmak üzere $Y \subseteq E$ ve $\aleph Y = \aleph I < \aleph E$ olduğundan (2.19.5)(5) ile $Y \in E$ olur. (ix) ile $B := \bigcup_{i \in I} x_i = \bigcup Y \in E$, dolayısıyla $\nu := \aleph B < \kappa$. (vii)'den dolayı $\prod_{i \in I} x_i \subseteq E$. Diğer yandan $\prod_{i \in I} x_i \subseteq {}^I B$. κ ulaşamaz, $\aleph I < \kappa$ ve $\nu < \kappa$ olduğundan $\mu := \max\{\aleph I, \nu, \aleph_0\}$ için $\aleph_0 \leq \mu < \kappa$ olur. (2.15.13)'ten ve κ 'nın ulaşamaz olmasından

$$\aleph(\prod_{i \in I} x_i) \leq \aleph({}^I B) = !\nu^{\aleph I} \leq !\mu^\mu = !2^\mu < \kappa$$

buradan da (2.19.5)(5) ile $\prod_{i \in I} x_i \in E$. ■

Önerme 2.19.7 1. $\forall \alpha \mathbb{V}_\alpha = \{x \in \mathbb{V} \mid sv(x) < \alpha\}$.

2. κ ulaşamazsa $\aleph \mathbb{V}_\kappa = \kappa$.

Kanıt. 1. (a) $\subseteq$: $x \in \mathbb{V}_\alpha$ ise seviyenin tanımı gereği $sv(x) < \alpha$. (b) $\supseteq$: $x \in \mathbb{V}$ ve $sv(x) < \alpha$ olsun. Dolayısıyla $x \in \mathbb{V}_{sv(x)+1}$ ve $sv(x) + 1 \leq \alpha$. (2.19.1)(2)'den $x \in \mathbb{V}_\alpha$.

2. (a) (2.19.1)(3)'ten $\kappa = Srs \cap \mathbb{V}_\kappa \subseteq \mathbb{V}_\kappa$ olduğundan $\kappa \leq \aleph \mathbb{V}_\kappa$. (b) Şimdi $\aleph \mathbb{V}_\kappa \leq \kappa$ olduğunu kanıtlayacağız. Her şeyden önce κ bir limit sıra sayısı olduğundan tanım gereği $\mathbb{V}_\kappa = \bigcup_{\alpha < \kappa} \mathbb{V}_\alpha$. Diğer yandan $(\mathbb{V}_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ artan bir dizi olduğundan $\aleph \mathbb{V}_\kappa = \sup_{\alpha < \kappa} \aleph \mathbb{V}_\alpha$. Her $\alpha < \kappa$ için $\aleph \mathbb{V}_\alpha < \kappa$ olduğunu kanıtlarsak işimiz biter. Bunu sonluötesi tümevarımla kanıtlayacağız. (i) $\alpha = 0$ için $\mathbb{V}_0 = \emptyset$ olduğundan sav doğrudur. (ii) $\alpha < \kappa$ ve $\aleph \mathbb{V}_\alpha < \kappa$ olsun. κ ulaşamaz olduğundan

$$\aleph \mathbb{V}_{\alpha+1} = \aleph \mathcal{P}(\mathbb{V}_\alpha) = !2^{\aleph \mathbb{V}_\alpha} < \kappa.$$

(iii) Şimdi $\alpha < \kappa$ bir limit sıra sayısı olsun ve sav her $\beta < \alpha$ için kanıtlanmış olsun. κ bir çokluk sayısı olduğundan $\aleph \alpha < \kappa$. κ düzenli, $\aleph \alpha < \kappa = sd(\kappa)$ ve her $\beta < \alpha$ için $\aleph \mathbb{V}_\beta < \kappa$ olduğundan $\mu := \sup_{\beta < \alpha} \aleph \mathbb{V}_\beta < \kappa$. Tanım gereği $\mathbb{V}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathbb{V}_\beta$ ve $(\mathbb{V}_\beta)_{\beta < \alpha}$ artan olduğundan $\aleph \mathbb{V}_\alpha = \mu < \kappa$ ve işimiz biter. ■

Teorem 2.19.8 $E \in \mathbb{V}$ kümesinin bir evrencik olması için gerek ve yeter koşul ulaşamaz bir κ ile $E = \mathbb{V}_\kappa$ olmasıdır.

Kanıt. $\implies$: E bir evrencik olsun. (2.19.6)(viii)'den $\kappa := \aleph E$ ulaşılabilir çokluk sayısıdır. Şimdi $E = \mathbb{V}_\kappa$ olduğunu savunuyoruz. $\mathbb{V}_\alpha$ kümelerinin tanımından ve κ ulaşılabilir olduğundan

$$(1) \quad \forall \alpha < \kappa (\aleph \mathbb{V}_\alpha < \kappa)$$

olduğu kolayca görülür. $\mathbb{V}_\kappa \subsetneq E$ olduğunu varsayalım. Her $x \in \mathbb{V}_\kappa$ için tanım gereği $sv(x) < \kappa$. Şimdi $\mathbb{V} \setminus E$ deki öğeler içinde seviyesi en küçük öğelerden biri x olsun. $x \notin E$ ve $sv(x) < \kappa$. $x \in \mathbb{V}_{sv(x)+1}$ ve κ bir limit sıra sayısı olduğundan $sv(x) + 1 < \kappa$. $x \subseteq \mathbb{V}_{sv(x)}$ olduğundan (1) ile $\aleph x < \kappa$ olur. x öğesinin seçiminden dolayı her $y \in x$ için $y \in E$ olduğundan $x \subseteq E$, dolayısıyla (2.19.5)(5) ile $x \in E$ olur. Bu bir çelişkidir; $\mathbb{V}_\kappa \subseteq E$ olmalıdır. Şimdi

$$(2) \quad \forall x (x \in E \implies sv(x) \in E)$$

olduğunu savunuyoruz. Savımızın yanlış olduğunu varsayalım ve $x \in E$ öğesi $sv(x) \notin E$ olan öğelerden seviyesi en küçük olanlardan biri olsun. x öğesinin seçiminden dolayı

$$B := \{sv(y) \mid y \in x\} \subset E.$$

Diğer yandan (2.19.5)(1) ile $\aleph B \leq \aleph x < \kappa$. Bu nedenle (2.19.6)(x) ile $\bigcup B \in E$ olur. $\alpha := \bigcup B$ olsun.

$$sv(x) = \bigcup \{sv(y) + 1 \mid y \in x\} = \bigcup \{\beta + 1 \mid \beta \in B\}$$

olduğundan $sv(x) = \alpha$ veya $sv(x) = \alpha + 1$ olur. (2.19.6)(iv)+(ix) ile $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\} \in E$. $\alpha \in E$ ile beraber bu $sv(x) \in E$ demektir ki $sv(x) \notin E$ seçimi ile çelişir! Dolayısıyla (2) savımız doğrudur.

(2)'den her $x \in E$ için $\aleph sv(x) < \kappa$ elde edilir. κ ulaşılabilir olduğunda $sv(x) < (\aleph sv(x))^+ < \kappa$. Böylece her $x \in E$ için $sv(x) < \kappa$, dolayısıyla (2.19.7)(1) ile $E \subseteq \mathbb{V}_\kappa$. Sonuçta $E = \mathbb{V}_\kappa$ kanıtlanmıştır.

$\Leftarrow$: Şimdi κ ulaşılabilir ve $E = \mathbb{V}_\kappa$ olsun. (2.19.5) tanımının ilk dört koşulu doğrudan sağlanmıştır. Şimdi $x \subseteq \mathbb{V}_\kappa$ ve $\aleph x < \aleph \mathbb{V}_\kappa \stackrel{(2.19.7)(2)}{=} \kappa$ olsun. κ düzenli olduğundan $\alpha := \sup_{y \in x} sv(y) < \kappa$, dolayısıyla $sv(x) \leq \alpha + 1 < \kappa$ ve $x \in \mathbb{V}_\kappa$. ■

Son iki teorem bize iki şey öğretir. Bir yandan E bir evrencikse ve biz yalnızca $x \in E$ kümeleriyle çalışırsak küme işlemleri bizi E evrenciğinin dışına çıkarmazlar; E yeterlidir. Diğer yandan ZFC kuramının aksiyomları ulaşılabilir çokluk sayılarının varlığını garantilemedikleri için aynı şey evrenciklerimiz için de söz konusudur.

2.19.2 $(\mathbb{V}, \in)$ Evreni

Önce bu evrenin niye yeterli olacağını düşündüğümüzü belirtelim. Her şeyden önce tüm sıra sayılarımızın bu evrende olduğunu öğrenmiş bulunuyoruz. Dolayısıyla doğal sayılarımız ve buradan yola çıkarak tam, gerçek ve karmaşık sayılarımız bu evrendedir. Bize herhangi bir A kümesi verildiğinde İyi Sıralama Teoremi yardımıyla A ile eşgüçlü bir α sıra sayısı bulabileceğimizi öğrendik. Eşgüçlü kümelerle aynı gözü ile bakarsak bu evren her güçten küme içermektedir, dd. her küme bu evrende temsil edilmektedir.

$\mathbb{V}$ evreni bir bakıma $\emptyset$ kümeden yola çıkıp şimdiye kadar başımıza dert açmamış küme işlemleriyle kazanılmıştır. Burada sorun çıkacağını düşünmüyoruz, daha doğrusu sorun çıkmayacağına ilişkin bir beklentimiz var. Diğer yandan $\mathbb{V}$ 'nin tanımı ortadayken aksiyomlar için bir arayışa gerek var mı?

Burada bir noktanın altını çizmekte yarar var. Biz içinde çelişkilerle karşılaştığımız bir $\tilde{\mathbb{U}}$ evreninden yola çıktık. Bu evrende bazı ayıklamalar yaptık ve bizi çelişkilere götürmeyeceğini umduğumuz daraltmalarla $\mathbb{U}$ evrenine ulaştık. Bu evrene ait α sıra sayılarını kullanarak $\mathbb{V}$ evrenini tanımladık. Ne $\mathbb{U}$ ne de $\mathbb{V}$ evrenlerinin verilen aksiyomlarla çelişkisiz olup olmadıklarını bilmiyoruz. Bu bölümün sonunda vereceğimiz, aslında kitapta uyguladığımız aksiyomlarla Aksiyomatik Kümeler Kuramı kitabında yola çıkacağız. Ne yazık ki bu aksiyomlarla tanımlanan kümeler kuramının çelişkisiz olup olmadığını bilmiyoruz. Çelişkisiz olduğunu umuyoruz, o kadar.

Her ne kadar $\mathbb{V}$ evreni boş kümeden yola çıkılarak tanımlanmış gibi görünse de gerçekte hiç de öyle değildir. $\mathbb{V}$ evreninin tanımında sıra sayılarını ve tekrarlı teorem gibi çok güçlü bir teoremi kullandık! Demek ki işimiz var. Aksiyomlarımızı öyle seçmeliyiz ki bize sıra sayılarımızı vermeli ve biz onlar yardımıyla aksiyomlarımızın belirlediği bir $\mathbf{V}$ evreninde benzer biçimde tanımlayacağımız $\mathbf{V}_\alpha$ kümeleriyle $\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha \in Srs} \mathbf{V}_\alpha$ olduğunu kanıtlayabilmeliyiz.

Bu evrendeki tüm teoremleri kazanabileceğimiz aksiyomlar neler olabilir? Veya en azından neler olmalıdır? Yeterli olduğunu umduğumuz aksiyomları sözel olarak vereceğiz. Ancak biz (II.1)'de, her ne kadar Cantor Kümeler Kuramı işlenecekse ve bu kuramın aksiyomları (Uz), (DerC) ve (Seç) ise de, (DerC)'yi tam gücüyle kullanmayacağımızı ve yetineceğimiz aksiyomları vermiştik. Bir kez daha bunları şu anki bilgilerimiz ışığında yazalım ve orada belirttiğimiz gibi (Soz*) aksiyomu yeni bir (Soz) aksiyomu ile yer değiştirecektir.

Her kuram için en temel şey nesnelerinin birbirine ne zaman eşit olacağını bilinmesidir. $\mathbb{V}$ evrenimizdeki tüm nesneler bir *kümedir*. Bir tek asal öge vardır, o da boş kümedir. Öyleyse işte ilk aksiyomumuz:

Aksiyom (Uz): *İki küme aynı öğeleri içeriyorlarsa birbirine eşittir.*

Matematiğin en temel kavramının bağıntılar olduğunu, bunlar için ise sıralı ikili kavramının yeterli olduğunu gördük. Diğer yandan sıralı ikilinin Kuratowski tanımına göre bu kavram için x ve y kümelerse $\{x, y\}$ 'nin de bir küme olduğunu bilmek yeterlidir. Bunu ikinci aksiyom olarak seçelim:

Aksiyom (Çift): *x ve y kümelerse $\{x, y\}$ de bir kümedir.*

CKK kuramında $\mathcal{A}$ bir küme ailesi olduğunda $\bigcup \mathcal{A}$ da bir kümeydi. Ama şimdi kümelerimizin öğeleri de kümeler olacağından her kümemiz bir küme ailesidir. İşte bir sonraki aksiyom:

Aksiyom (Bir): *Her x kümesi için $\bigcup x$ de bir kümedir.*

Başımız derlediğimiz nesneler çoksa derde giriyordu. Kümeler ise bizim için büyük değil küçük çokluklar anlamına gelmeliydi. Öyleyse bir kümenin öğelerinin bir kısmını derlersek onlarda bir küme oluştururlar, dd.:

Aksiyom (DerZ): *Bir kümenin bir $\psi(x)$ özelliğine sahip öğeleri bir küme oluşturur.*

Kümeler bir anlamda küçük sınıflar olacaklardır. Küçük sınıfların altçoklukları da küçük olacaklarından kümelerin altçokluklarının da bir küme olmasını isteyeceğiz.

Akiyom (Küç): *Kümelerin altçoklukları da bir kümedir (**Küçük Çokluk Aksiyomu**).*

Güç kümesi CKK kuramında çok temel bir rol oynamaktadır. Gerçi $\mathcal{P}(x)$ kümesinin gücü x kümesinin gücünden büyüktür. Ancak güç kümesi bizi henüz hiçbir çelişkiye götürmediğinden ondan da vazgeçmek istemiyoruz.

Aksiyom (Güç): *x bir kümeysen $\mathcal{P}(x)$ de bir kümedir.*

Herhangi bir fonksiyon altında bir kümenin resminin gücü en fazla bu küme kadardır, dd. fonksiyonlar küçük çoklukları küçük çokluklara resmederler:

Aksiyom (Yer): *Herhangi bir fonksiyon altında bir kümenin resmi de bir kümedir.*

Yukarıda verdiğimiz aksiyomların hiçbirisi *bir kümenin varlığını ileri sürmezler, verilen kümelerden yeni kümeler kazanma yöntemleridirler*. Evren olarak boş kümeyi seçersek $(\emptyset, \in)$ bu aksiyomlar için bir modeldir. Evrenimizde hiç küme olmayacağından kümeler için söylemlerde bulunan bu aksiyomlar boş bildirimler olarak doğrudurlar. Ancak şimdiye kadar verdiğimiz aksiyomlar için bir $(M, \in)$ modelimiz var ve $M \neq \emptyset$ ise bu modelimiz epeyce zengin olmak zorundadır. M evrenimizde en az bir X kümemiz olacaktır. Ama hemen ardından $\emptyset = \{x \in X \mid x \neq x\} \in M$ olacaktır. Buradan yola devam ederek örneğin Neumann doğal sayılarının, onlardan oluşan sonlu

kümelerin de M evrenimizin öğeleri olduğunu görmek kolaydır. Bu nedenle şimdiye kadar verdiğimiz aksiyomlara *geçici olarak*

(Boş) *Hiçbir öğesi olmayan bir $\emptyset$ kümesi vardır.*

aksiyomunu ekleyelim.

$(\mathbb{V}_\omega, \in)$ şimdiye kadar verdiğimiz aksiyomları, (Boş) da dahil olmak üzere, sağlayan bir modeldir. Bunu görmek çok kolaydır. Sadece (Yer) aksiyomunun niye sağlandığını kısaca belirtelim. $\mathbb{V}_\omega = \bigcup_{n < \omega} \mathbb{V}_n$ 'nin öğeleri sonlu kümelerdir. $x \in \mathbb{V}_\omega$ ise x sonlu olduğundan herhangi bir f fonksiyonu için $m := \sup\{sv(f(y)) \mid y \in x\}$ sonludur ve $f[x] \subseteq \mathbb{V}_{m+2}$ bir kümedir. $\mathbb{V}_\omega$ geçişli olduğundan öğelerinin öğeleri de yine $\mathbb{V}_\omega$ 'dadır; bu nedenle $\mathbb{V}_\omega$ 'ya **kalıtsal sonludur** denir. Diğer yandan ω sonsuzdur. Biz ω 'nın bir sınıf, dd. $\omega \subseteq \mathbb{V}_\omega$ olduğunu biliyoruz ama aksiyomlarımızdan $\omega \in \mathbb{V}_\omega$ olduğunu, yani bu modelde ω 'nın bir küme olduğunu söyleyemeyiz! Bu nedenle $\mathbb{V}_\omega$ evreni matematik yapılayamayacak kadar fakirdir.

ω sınıfının küme olmasını garanti edecek bir aksiyoma gereksinim vardır. Bu aksiyom fazladan kavramlar gereksindirmeden ifade edilebilmelidir. $\mathbb{U}$ evreninde $\mathbb{N}$ Neumann doğal sayılar kümesinin iki temel özelliğinin i) $\emptyset \in \mathbb{N}$, ii) $\forall x(x \in \mathbb{N} \implies x \cup \{x\} \in \mathbb{N})$ olduklarını biliyoruz. Bu iki özelliğe sahip olan bir X sınıfına **tümevarımsal** diyecek ve bunu $Tv(X)$ ile göstereceğiz, dd.

$$Tv(X) : \iff i) \emptyset \in X \wedge \forall x(x \in X \implies x \cup \{x\} \in X)$$

Kuşkusuz $\mathbb{U}$ ve $\mathbb{V}$ birer tümevarımsal sınıftırlar ve $\mathbb{N} = \bigcap_{Tv(X)} X$. Bir sonraki aksiyomumuz *en az bir tümevarımsal kümenin* varlığını ister. O zaman bu tümevarımsal kümenin altkümesi olarak $\mathbb{N}$ 'nin de küme olması garanti- lenmiş olur. İşte bir sonraki aksiyomumuz:

Aksiyom (Soz): $\emptyset$ 'yi ve her $y \in x$ öğesiyle birlikte $y \cup \{y\}$ kümesini de içeren bir x kümesi vardır.

(Soz) aksiyomu en az bir x kümesinin varlığını ister. Dolayısıyla bu küme ile birlikte evrenimizde $\emptyset$ de olmak zorundadır ve geçici olarak aldığımız (Boş) aksiyomundan vazgeçebiliriz. (Soz) aksiyomu *varlık* ileri süren *ilk* aksiyomumuzdur. $\mathbb{V}$ evrenimizin temelli olduğunu da öğrendik ve bu her $x \in \mathbb{V}$ için $x \notin x$ olduğu sonucunu da verir. Her ne kadar geleneksel matematik için zorunlu olmasa da bunu da aksiyomlarımız arasına alacağız.

Aksiyom (Tem): *Boştan farklı her kümenin kendisiyle arakesiti boş olan bir öğesi vardır.*

Buraya kadar verdiğimiz aksiyomların belirlediği kümeler kuramının kısa adı **ZF**'dir.

Geriye bir aksiyom kaldı: Seçme Aksiyomu.

Aksiyom (Seç): $\emptyset \notin x$ ise bir $f : x \rightarrow \bigcup x$ fonksiyonu her $y \in x$ için $f(y) \in y$ olacak biçimde vardır.

Verdiğimiz aksiyomlar matematikçilerin en çok tercih ettikleri **ZFC** kuramının aksiyomlarıdır. Bu kuramın nesneleri *kümelerdir*.

Biz Aksiyomatik Kümeler Kuramı kitabında **NBG** kuramını inceleyeceğiz. Nesnelerimiz *sınıflar* olacak. Bir başka sınıfın ögesi olan sınıflara *küme* diyeceğiz. ZFC aksiyomlarından beşinde değişiklik yapacağız. Nesnelerimiz şimdi sınıflar olmak üzere (Uz) aksiyomunu aşağıdaki gibi değiştireceğiz.

Aksiyom (Uz): *İki sınıf aynı öğeleri içeriyorsa birbirine eşittir.*

İkinci olarak (DerZ) aksiyomu biraz kabaca aşağıdaki gibi değiştirilecektir.

Aksiyom (Der): *Kümelere ilişkin her $\psi(x)$ özelliği bir $\{x \mid \psi(x)\}$ sınıfı oluşturmak üzere derlenebilir. Derlemeyi bir y kümesinin öğelerine kısıtlarsak elde ettiğimiz $\{x \mid x \in y \wedge \psi(x)\}$ sınıfı da bir kümedir.*

Elbette $\psi(x)$ özelliklerinin tam olarak ne oldukları netleştirilmelidir. (Yer) aksiyomunun ifadesi *aynı* kalacak, ancak şimdi bu ifadedeki fonksiyonun *bir sınıf* olmasına da izin verilecektir. ZF yalnızca kümelerle çalıştığından oradaki fonksiyonlar bir küme olmak zorundadırlar. (Tem) aksiyomunun ifadesi *aynı* kalacak ancak şimdi oradaki x nesnesinin bir *sınıf* olmasına da izin verilecektir. Son olarak (Seç) aksiyomunun ifadesi aynı kalacak ancak oradaki x nesnesinin bir *küme* olduğu koşulu eklenecektir.

Aksiyomatik Kümeler Kuramında niçin NBG'yi seçeceğimizi kısaca belirtelim. Matematikçiler tarafından en çok yeğlenen ZFC'dir. Kategori kuramı ve kümeler kuramının kendisini bir kenara bırakılırsa matematiğin geri kalan kısmı için ZFC yeterlidir. Gerçi ZFC'nin çelişkisiz olduğu kanıtlanmamıştır. Yine de çoğu matematikçinin paylaştığı, ZFC'nin çelişkisizliğine ilişkin çok yaygın bir *güven duygusu* var. Biz NBG aksiyomatik yöntemini kullanacağız. Her şeyden önce ZFC ve NBG'deki kümelere ilişkin teoremler özdeşler. Bu nedenle NBG'yi seçmekle kümelere ilişkin teoremler değişmediği için bir yandan ZFC de ısrar edenlerle uyurken onların beslediği *güveni* de paylaşıyor olacağız. Diğer yandan baştan sınıflara yer vermenin getirdiklerinden yararlanacağız. Ayrıca NBG kuramı ZFC'nin *göreceli* çelişkisiz bir genişlemesidir, dd. ZFC çelişkisizse NBG'nin de çelişkisiz olduğu kanıtlanmıştır. Son bir estetik avantaj ise NBG'nin *sonlu sayıda aksiyomla* verilebilir olmasıdır. Bunu açalım. Aslında (DerZ) ve (Der) bir aksiyom değil birer *aksiyom şemalarıdır*; bunlar seçilen *her bir ψ* için bir aksiyom verirler. Aynı şey (Yer) içinde söz konusudur; seçilen *her fonksiyon* için bir aksiyom verirler. ZF veya ZFC sonlu aksiyomla verilemezken NBG sonlu aksiyomla verilebilmektedir.

2.20 CANTOR'UN AKSİYOMLARI GERÇEKTE NELERDİR?

Kümeler kuramıyla ayrıca ilgilenmemiş isek kulaktan duyma bilgimiz, Russell'ın açmazıyla Cantor'un kuramını, dolayısıyla matematiğin temelini dinamitlediği yönündedir. Ancak biz Russell'dan çok önce Cantor'un ve Burali-Forti'nin kümeler kuramındaki açmazların bilincinde olduklarını öğrenmiş bulunuyoruz. Kümeler kuramının açmazlarından söz edildiğinde Russell'ın isminin daha sık geçmesinin nedenlerinden ikisi şunlar olabilir: Birincisi Russell açmazın yalınlığı ve kümeler kuramından hiçbir ön bilgi gerektirmemesidir, ikincisi ise hocası Whitehead ile birlikte, sonradan izlenmese de, krize ilk çözümü getirmiş olmalarıdır.

Bu bölümün başında Cantor'un aksiyomlarının $(A_1):=(UzCs)$, $(A_2):=(DerCs)$ ve $(A_3):=(Seç)$ olduğu söylenir demiştik. Gerçek dostu diyebileceğimiz Dedekind'e yazdığı üç dört mektup aslında tüm işin özetidir diyebiliriz. Bu mektuplardan Cantor'un diğer aksiyomlarını süzüp onları da (A_k) olarak numaralayacağız.

Dedekind'e 28 Temmuz 1899'da yazılmış bir mektuptan:

“Nesnelerin belli bir çokluğu (sistemi, topluluğu) kavramından yola çıkıldığında, (daima *belli* çoklukları kastediyorum) iki tür çokluğu ayırt etme zorunluluğuyla karşılaşıyorum.

Zira bir çokluk öyle oluşmuş olabilir ki, *tüm* öğelerinin “birlikteliği” varsayımı bizi çelişkilere götürebilir, dolayısıyla çokluğu bir birlik, “tamamlanmış bir nesne” olarak kavramak olanaksızlaşır. Böyle çokluklara *mutlak sonsuz* veya *savunulamaz çokluklar* diyorum.

Herkesin kolayca göreceği gibi “tüm düşünülebilinenlerin topluluğu” böyle bir çokluktur³⁹. İleride başka örneklerle de karşılaşacağız.

Buna karşılık bir çokluğa, öğelerinin hepsi çelişkisiz biçimde “birlikte olarak” düşünülebiliyor, dolayısıyla “*bir* nesne”ye derlenebilirlikleri olanaklı ise *savunulabilir çokluk* veya *küme* diyoruz...

İki eşgüçlü çokluğun ya ikisi de kümedir ya da ikisi de savunulamazdır (A_4) .

Bir kümenin herhangi bir alt çokluğu da bir kümedir (A_5) .

³⁹Dedekind'in sonsuz çoklukların varlığının kanıtındaki yanlış tam da böyle bir sistemden yola çıkmasıdır.

Bir kümenin öğeleri de bir kümeysen, bunların öğelerine geçildiğinde yine bir küme elde edilir (kastedilen şudur: A bir küme ve her $x \in A$ de bir küme ise $\bigcup A$ da bir kümedir) (A_6). ... *Srs* çoklukluğunun savunulamaz olduğunu kanıtlar ([16]).”

Bu mektuptan çok net olarak iyi tanımlı olmak ve çelişkiye götürmenin farklı şeyler olduğunu öğreniyoruz. Cantor için iyi tanımlı iki tür çokluk vardır, kümeler ve savunulamaz çokluklar ki bunlara bugün sınıflar diyoruz. İyi tanımlı bu çokluklardan bazen “sınıf”, “sistem” veya çokluk diye söz etmiştir. İyi tanımlı bu çoklukları elbette yok sayamayız! Onlar vardır ve çelişkiler ancak onlara küme dediğimizde vardır. Cantor tüm sıra sayılarının Ω sisteminden söz etmekten çekinmemiştir. Bu mektupta ayrıca $(\text{DerZ})=(A_5)$ ve $(\text{Bir})=(A_6)$ aksiyomlarını görüyoruz. Ayrıca bu mektuptaki aksiyomlar (Seç) ile birlikte (Yer) aksiyomunu da kapsar. Gerçekten de f tanım kümesi küme olan bir fonksiyon olsun. f birebirse $\text{tan}f$ ve $\text{res}f$ eşgüçlü çokluklar olacaklar, dolayısıyla (A_4)’e göre ya ikisi de küme, ya da ikisi de savunulamaz olacaklarından $\text{res}f$ de bir küme olacaktır. f birebir değilse $f : \text{tan}f \rightarrow \text{res}f$ örten olduğundan (Seç) yardımıyla birebir bir $g : \text{res}f \rightarrow \text{tan}f$ tanımlanır. $\text{res}g$ bir kümenin altkümeleri olarak bir kümedir; $\text{res}f = \text{tan}g$ ise $\text{res}g$ ile eşgüçlü bir çokluk olduğundan bir kümedir. Sonuçta f bir fonksiyon ve $\text{tan}f$ kümeysen $\text{res}f$ de bir kümedir.

28 Ağustos 1899 tarihli mektuptan:

“... Kendinelerine

$$\aleph_0, \aleph_1, \dots, \aleph_{\omega_0}, \dots, \aleph_{\omega_1}, \dots$$

çokluk sayılarını karşılık getirdiğim iyi sıralanmış çokluklar veya dizilerin açıklanmış anlamda “küme” olduklarını, yani “savunulabilir çokluklar” olduklarını nereden bildiğim sorusu ortaya atılmalıdır. Bu çoklukların “savunulamaz” oldukları ve “tüm öğeleri nin birlikteliği” varsayımının çelişkisinin *henüz kendisini açık etmediği* düşünülemez mi? Buna yanıtlım bu sorunun *aynı zamanda sonlu çokluklara da genişletilmesidir* ve daha ayrıntılı irdelemelerin şu sonuca götürdüğüdür: Sonlu çokluklar için bile “savunulabilirliklerinin” bir “kanıtı” *verilemez*. Başka sözlerle: Sonlu çoklukların “savunulabilirlikleri” basit, kanıtlanamaz bir gerçektir, o (kelimenin eski anlamında) “aritmetiğin **aksiyomudur**” (A_7). Ve aynı şekilde alefleri karşılık getirdiğim çoklukların “savunulabilirlikleri” “genişletilmiş sonluötesi aritmetiğin aksiyomudur” (A_8) [16].”

Dedekind gibi titiz ve parlak bir matematikçinin sonsuz kümelerin varlığını kanıtlamaya kalkıştığını düşünürsek bu mektuptan Cantor'un ne kadar titiz olduğunu daha iyi anlarız. Bu mektupta söylenenler elbette (Çift), (Soz) ve (Güç) aksiyomlarını kapsar. (Çift) doğrudan (A_7) 'nin bir sonucu iken (Soz) ile " $\aleph_0$ bir kümedir" önermeleri denktir. Sonlu kümelerin güç kümeleri de sonlu olduğundan, bunların küme olduğu (A_7) 'nin bir sonucudur. X bir sonsuz küme ve $\aleph X = \kappa$ ise $!2^\kappa$ bir $\aleph_\alpha$ olarak bir kümedir. $\mathcal{P}(X) \sim !2^\kappa = \aleph_\alpha$ olduğundan (A_4) ile $\mathcal{P}(X)$ de bir küme olur.

Ancak (A_7) ve (A_8) aksiyomları "sonlu" ve "çokluk sayısı" gibi kuramın ileri evrelerinde tartışılabilen kavramları içermektedirler. Dolayısıyla bir aksiyomatik kuramda başa aksiyom olarak alınmaya uygun değildir. Ancak bu bölümü bitirmiş ve kavramış biri için (A_7) , (A_8) aksiyomlarının $(A_1), \dots, (A_6)$, (Çift), (Soz) ve (Güç) aksiyomlarından kazanılabileceğini görmek son derece kolaydır.

31 Ağustos 1899 tarihli mektuptan:

"...Eşgüçlü kümelere bir ve aynı güç *sınıfını*, eşgüçlü olmayan kümelere farklı sınıfları karşılık getirip *tüm düşünülebilir sınıfların* S sistemini inceleyeceğiz.

$\mathfrak{a}$ 'dan aynı zamanda, söz konusu sınıfındaki tüm kümeler için aynı olan, bu sınıfın kümelerinin gücünü veya çokluk sayısını anlayacağım. $\mathfrak{a}$ sınıfından herhangi bir küme $M_{\mathfrak{a}}$ olsun.

Tümüyle belirli, iyi tanımlı S sisteminin bir "*küme*" *olmadığını* savunuyorum.

Kanıt: S bir küme olsaydı tüm sınıflar üzerinden alınan

$$T = \bigcup M_{\mathfrak{a}}$$

birleşimi de bir *küme* olurdu; dolayısıyla belli bir sınıfa, diyelim ki $\mathfrak{a}_0$ sınıfına ait olurdu. Fakat aşağıdaki teorem geçerlidir:

" M " gücü $\mathfrak{a}$ olan bir kümeysse kendisinde gücü $\mathfrak{a}' > \mathfrak{a}$ olan bir başka M' kümesi elde edilebilir.".....

Dolayısıyla $\mathfrak{a}'_0$, $\mathfrak{a}_0$ 'dan büyük herhangi bir çokluk sayısı olsun. Dolayısıyla gücü $\mathfrak{a}_0$ olan T kümesi, $\mathfrak{a}'_0$ gücü daha büyük olan $M_{\mathfrak{a}'_0}$ kümesini altküme olarak içerir; bu ise bir çelişkidir. Bu nedenle T sistemi ve onunla birlikte S sistemi *küme değildirler*. *Dolayısıyla* belirli ancak *aynı zamanda birlik olmayan* çokluklar, dd. "tüm öğelerinin gerçek birlikteliği" *mümkün olmayan* çokluklar *vardır*. "Savunulamaz çokluklar" dediklerim işte bunlardır, diğerlerine "küme" diyorum [16]."

Her κ çokluk sayısı için κ ile eşgüçlü bir $\aleph_{A_\kappa}$ kümesi alır ve $\bigcup_{\kappa} A_\kappa$ çokluğunun savunulamaz olduğunu kanıtlar. A_κ olarak elbette κ alınabilir.

Demek ki $\bigcup \mathcal{C}ks$ savunulamaz. Dolayısıyla, $\bigcup \mathcal{C}ks \subseteq \mathcal{U}$ olduğundan $\mathcal{U}$ savunulamaz. Bu durumda elbette $\bigcup \mathcal{U}$ da savunulamaz olacaktır. Bu son mektuptan yeni bir aksiom çıkarmıyoruz ancak Cantor'un "Tümüyle belirli, iyi tanımlı küme olmayan sistemlerin" bilincinde olduğunu bir kez daha vurgulamış oluyoruz.

Sonuçta Cantor aksiyomları ZFC ve NBG kuramının aksiyomlarının (Tem) aksiyomu dışında tümünü kapsar. Ancak (Tem) kümeler kuramının olmazsa olmazı değildir ve bu bir eksiklik değildir. Geriye dönüp baktığımızda Cantor'dan sonra gelenlerin kümeler kuramına aksiyomatik bağlamda yaptıkları en önemli katkı, Fraenkel ve Skolem'in çalışmalarıyla "iyi tanımlı küme" kavramının netleştirilmesidir.

Cantor Kümeler Kuramına verilen isim genelde "Naive set theory" dir. Bundan kastedilen aslında biçimsel olmayan kümeler kuramı demektir [46]. Böyle anlaşıldığında bir sorun yoktur. Ancak "naive = saf; safdil; bön", burada en iyi anlamında "yeterince eleştirel olmayan" anlamında olsun, pek de iyi şeyler çağrıştırmıyor. Bu nedenle yaşamında yeterince haksızlığa uğramış bir insana, ölümünden sonra da, asla kastedilmese bile haksızlığı yaklaştırmamak için kitabımıza geleneğe uymayarak, daha tarafsız ve yanıltmayan "Cantor Kümeler Kuramı" demeyi yeğledik.



3

UYGULAMALAR

Bu bölümde önce genel olarak bir topoloji dersinde yer bulmayan bazı topolojik gerçeğe yer vereceğiz. Cantor'un bugün Cantor kümesi olarak bilinen kümeyi elde ederken kullandığı *ağaç yöntemi*, ondan yola çıkılarak elde edilen *ağaç* kavramını tanıyacak ve bunlar yardımıyla bazı gerçeğe ulaşacağız. $\mathbb{R}^n$ uzayının her kapalı altkümesinin sayılabilir veya gücünün $\mathfrak{c}$ olduğunu, yine her kusursuz altkümesinin gücünün $\mathfrak{c}$ olduğunu öğreneceğiz. Ayrıca bazı karşıt örnekler için oldukça elverişli olan $\aleph_1$ ve $\aleph_1 + 1$ topolojik uzaylarının bazı özelliklerini tanıyacağız. Kısaca ölçülere, ölçü problemine ve Borel kümelerine de değineceğiz.

3.1 ÇARPIM UZAYLARI VE METRİK UZAYLAR

$(X, \mathcal{T})$ ve $(X', \mathcal{T}')$ iki topolojik uzay olsun. Bir $f : X \rightleftharpoons X'$ dönüşümü $\mathcal{T}$ - $\mathcal{T}'$ sürekli tameşleme ve f^{-1} de $\mathcal{T}'$ - $\mathcal{T}$ sürekli ise f dönüşümü bu topolojik uzaylar arasında bir **eşyapı** veya **topolojik dönüşümdür** ve bu uzaylar **topolojik eşyapılıdır** denir ve bu kısaca $(X, \mathcal{T}) \cong (X', \mathcal{T}')$ ile veya söz konusu topolojiler belli ise kısaca $X \stackrel{top}{=} X'$ ile gösterilir. $f : X \rightarrow X'$ birebir dönüşümü $(X, \mathcal{T})$ ve $(f(X), \mathcal{T}'|f(X))$ uzayları arasında bir topolojik dönüşümse f dönüşümü bir **gömmedir** denir.

X herhangi bir küme ve $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{T}'$ bu kümede iki topoloji olsunlar. $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ ise $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ 'den **daha kabadır** veya $\mathcal{T}'$, $\mathcal{T}$ 'den **daha incedir** denir. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ keyfi verilsin. X üzerinde $\mathcal{A}$ 'yı içeren topolojiler vardır, örneğin $\mathcal{P}(X)$. X kümesindeki $\mathcal{A}$ ailesini içeren topolojilerin arakesiti yine bir topolojidir,

üstelik X üzerinde $\mathcal{A}$ 'yı içeren en kaba topolojidir. $\mathcal{A}$ bu topolojinin bir altbazı iken $\mathcal{B} := \{\bigcap \mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A} \text{ ve } \mathcal{S} \text{ sonlu}\}$ ise bu topolojinin bir bazıdır.

Tanım 3.1.1 $I \neq \emptyset$ bir küme, her $i \in I$ için $(X_i, \mathcal{T}_i)$ bir topolojik uzay, $X := \prod_{i \in I} X_i$ ve her $j \in I$ için $p_j : X \rightarrow X_j$ ($x = (x_i)_{i \in I} \rightsquigarrow x_j$) dönüşümü j . izdüşüm fonksiyonu olsun. X üzerinde her p_j fonksiyonunu sürekli kılan en kaba topolojiye bu topolojilerin çarpımı denir; bu topolojiyi $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{T}_i$ ile gösterelim. $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{T}_i$ 'ye bu uzayların **çarpım topolojisi** denir. Her $i \in I$ için $X_i = X$ ve $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}$ özel durumunda ise çarpım uzayını $(X^I, \bigotimes \mathcal{T}^I)$ veya kısaca X^I ile gösterelim.

$$\mathcal{A} := \bigcup \{p_i^{-1}(U_i) \mid i \in I \wedge U_i \in \mathcal{T}_i\}$$

çarpım topolojisinin bir altbazıdır. Her $i \in I$ için $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{T}_i$ bir baz olmak üzere $\mathcal{A}$ ailesinin tanımında U_i kümelerini $\mathcal{B}_i$ 'lerden seçmek yeterlidir. $p_i^{-1}(U_i)$ yerine $\underline{U}_i = U_i \times \prod_{j \neq i} X_j$ ve $\emptyset \neq S \subset I$ için kısaca

$$\underline{U}_S := \bigcap_{i \in S} p_i^{-1}(U_i) =: \prod_{i \in S} U_i \times \prod_{i \in I \setminus S} X_i$$

de yazalım. U_i ve $\underline{U}_S$ kümelerine sırasıyla çarpım uzayımızın U_i ve U_S tabanlı **silindirleri** denir. $\underline{U}_i = \underline{U}_{\{i\}}$ olduğu gözönünde tutulursa

$$\mathcal{B} := \{\underline{U}_S \mid \emptyset \neq S \subseteq I \wedge \aleph S < \omega\} \quad (3.1)$$

çarpım topolojisinin bir bazıdır. Başka bir şey söylenmediği sürece çarpım uzayları daima çarpım topolojisiyle ele alınacaktır.

Her $i \in I$ için $X_i \neq \emptyset$ ve $a = (a_i)_{i \in I} \in X$ ise her $i \in I$ için

$$g_i^a : X_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_i \quad (x_i \rightsquigarrow (y_i)_{i \in I}, y_i = x_i, j \neq i \implies y_j = a_j)$$

dönüşümleri birer gömmedirler. Buna X_i uzayının a seviyesinden **gömme**si diyelim.

Önerme 3.1.2 $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve I, J eşgüçlü iki küme olsunlar. Bu koşullarda $(X^I, \bigotimes \mathcal{T}^I) \cong (X^J, \bigotimes \mathcal{T}^J)$, dd. $X^I \stackrel{top}{=} X^J$.

Kanıt. Her $f : I \rightleftarrows J$ tameşlemesi doğal biçimde bir $F : X^I \rightleftarrows X^J$ tameşlemesi tanımlar ve bunun bir topolojik dönüşüm olduğu doğrudan çarpım topolojisinin tanımından çıkar. ■

Teorem 3.1.3 Birleşme Özelliği. $I \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere her $i \in I$ için $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topolojik uzayları verilsin ve $\{I_k\}_{k \in K}$ ise I kümesinin bir parçalanışı olsun. Her $k \in K$ için

$$Y_k := \prod_{i \in I_k} X_i \text{ ve } \mathcal{T}_k := \bigotimes_{i \in I_k} \mathcal{T}_i$$

olmak üzere $\prod_{i \in I} X_i \stackrel{\text{top}}{=} \prod_{k \in K} Y_k$, dd.

$$\left(\prod_{i \in I} X_i, \bigotimes_{i \in I} \mathcal{T}_i \right) \cong \left(\prod_{k \in K} \left(\prod_{i \in I_k} X_i \right), \bigotimes_{k \in K} \left(\bigotimes_{i \in I_k} \mathcal{T}_i \right) \right).$$

Kanıt. Ödev(bkz. [3]). ■

Teorem 3.1.4 $(X, \mathcal{T})$ herhangi bir topolojik uzay ve $\kappa \geq \aleph_0$ herhangi bir sonluötesi çokluk sayısı olsun. $Y := X^\kappa$ olmak üzere her $1 \leq \mu \leq \kappa$ çokluk sayısı için $Y \stackrel{\text{top}}{=} Y^\mu$, dd.

$$(X^\kappa, \bigotimes \mathcal{T}^\kappa) \cong ((X^\kappa)^\mu, \bigotimes (\bigotimes \mathcal{T}^\kappa)^\mu).$$

Kanıt. $\mathcal{T}_Y := \bigotimes \mathcal{T}^\kappa$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (Y^\mu, \bigotimes \mathcal{T}_Y^\mu) &= ((X^\kappa)^\mu, \bigotimes (\bigotimes \mathcal{T}^\kappa)^\mu) \\ &\stackrel{(3.1.3)}{\cong} (X^{\kappa * \mu}, \bigotimes \mathcal{T}^{\kappa * \mu}) \stackrel{(3.1.2)}{\cong} (X^\kappa, \bigotimes \mathcal{T}^\kappa) = (Y, \mathcal{T}_Y). \end{aligned}$$

■

Tanım 3.1.5 X küme ve $d : X \times X \rightarrow R$ olsun. Her $x, y, z \in X$ için

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$, ve
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
sağlanıyorsa d fonksiyonu X kümesinde bir **metriktir** ve (X, d) i-
kilisine ise bir **metrik uzay** denir.

$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\|x - y\| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \text{ ve } d(x, y) := \|x - y\|$$

sırasıyla $\mathbb{R}^n$ uzayının **Öklid normu** ve **Öklid metriği** olarak adlandırılırlar. Bunların gerçekten de birer norm ve metrik tanımladıklarını mutlaka

Doğrusal Cebir veya Analiz derslerinde öğrenmiş veya kanıtlamışsızdır. Her X kümesinde her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

ile bir metrik tanımlanır. Bu metriğe **ayrık metrik** denir .

Şimdi (X, d) bir metrik uzay, $a \in X$ ve $r > 0$ bir gerçekte sayı olsun.

$$B_r^d(a) := \{x \in X \mid d(x, a) < r\}, \quad \overline{B}_r^d(a) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) \leq r\}$$

kümeleri sırasıyla **a merkezli r yarıçaplı açık** ve **kapalı toplar** olarak adlandırılırlar. Genelde belli bir metrik uzay söz konusu olduğunda $B_r^d(a)$ ve $\overline{B}_r^d(a)$ yerine daha yalın olarak $B_r(a)$ ve $\overline{B}_r(a)$ yazacağız. X uzayımızı bu metriğin ürettiği $\mathcal{T}_d$ topolojisiyle ele alacağız. Tanım gereği bu topolojide bir $A \subseteq X$ için:

$$A \in \mathcal{T}_d, \text{ dd. } A \text{ kümesi } (X, \mathcal{T}_d) \text{ 'de } \mathbf{a\acute{c}ıktır} : \Longleftrightarrow \forall a \in A \exists B_r^d(a) \subseteq A.$$

Bu tanımla $B_r^d(a)$ açık topları gerçekten açık kümelerken $\overline{B}_r^d(a)$ kapalı topları ise kapalı kümelerdir. *Farklı metrikler aynı topolojiyi açıklayabilirler.* Örneğin X kümesinde bir d metriği verildiğinde $d' := d/(d+1)$ de X üzerinde bir metriktir ve aynı topolojiyi tanımlar, dd. $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.

X üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisi verildiğinde yine X üzerinde bir d metriği $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ olacak biçimde bulunabiliyorsa $\mathcal{T}$ topolojisi **metriklenebilir** ve $\mathcal{T}$ topolojisiyle d metriği **uyumludur** denir. Örneğin her X kümesindeki ayrık topoloji ayrık metrikle açıklanan topolojidir, dolayısıyla metriklenebilir.

Metrik uzaylar bir çok güzel topolojik özelliğe sahiptirler. Biz salt bizi ilgilendiren birkaç özelliği ile ilgileneceğiz. Metrik uzaylar Hausdorff uzaylarıdır. Eğer $p \in X$ noktası X metrik uzayının bir ayrık noktası değilse p noktasının her komşuluğunda uzayımızın sonsuz noktası vardır. Gerçekten de p noktası ayrık nokta değilse $B_1(p)$ topunda p noktasından farklı bir x_0 noktası vardır. $r_1 := \min\{1/2^1, d(x_0, p)\}$ olmak üzere $B_{r_1}(p)$ topunda p noktasından farklı bir x_1 noktası vardır. x_0, x_1 noktaları hem p noktasından hem de birbirlerinden farklıdır. Tekrarlı seçmeyle her $n < \omega$ için p noktasından ve $x_0, \dots, x_{n-1}$ noktalarından farklı x_n noktası $d(x_n, p) < 1/2^n$ olarak seçilir. p noktasının her komşuluğunda bu x_n noktalarından sonsuz tanesinin bulunduğu apaçıktır.

Her $n < \omega$ için (X_n, d_n) metrik uzayları verilsin. $X := \prod_{n < \omega} X_n$ ve $\mathcal{T} := \bigotimes_{n < \omega} \mathcal{T}_n$ olmak üzere $\mathcal{T}$ topolojisi $x = (x_n)_{n < \omega}, y = (y_n)_{n < \omega} \in X$ olmak üzere

$$d(x, y) := \sum_{n < \omega} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

metriği ile metriklenebilir, dd. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Önerme 3.1.6 $A \neq \emptyset$ kümesi ayrık topolojiyle alınsın. Bu durumda $A^{\mathbb{N}}$ çarpım uzayının topolojisi her $a = (a_n)_{n < \omega}, b = (b_n)_{n < \omega} \in A^{\mathbb{N}}$ için

$$d(a, b) =: \begin{cases} 0 & a = b \\ \frac{1}{n+1} & n = \min\{k \mid a_k \neq b_k\} =: \Delta(a, b) \end{cases}$$

ile tanımlanan metrikle uyumludur.

Kanıt. A uzayı ayrık topolojiyle alındığından $\{\{a\} \mid a \in A\}$ bu topolojinin bir bazıdır. Dolayısıyla (3.1)'den dolayı $S \subseteq \mathbb{N}$ sonlu altkümeler olmak üzere

$$(*) \quad \prod_{n < \omega} U_n, \quad (\forall n \in \mathbb{N} \setminus S (U_n = A) \wedge \forall n \in S \exists a_n \in A (U_n = \{a_n\}))$$

tipindeki silindirler çarpım uzayımızın bir bazını oluşturular. Diğer yandan $n := \max\{m \mid a_m \in S\}$ olmak üzere her $k \in n+1 \setminus S$ için bir $a_k \in A$ seçerek bir $s = (a_0, \dots, a_n) \in A^{n+1}$ dizisi oluşturursak (*) ile verilen silindir yine baza ait olan

$$\underline{s} := \{a_0\} \times \dots \times \{a_n\} \times \prod_{n+1 \leq m < \omega} A$$

silindirini içerir. Sonuç olarak $\mathcal{B} := \{\underline{s} \mid s \in A^{<\omega}\}$ çarpım topolojisinin bir bazıdır. Diğer yandan d metriğimizin tanımladığı $\mathcal{T}_d$ topolojisinin bir bazı

$$\mathcal{B}^d = \{B_{1/(n+1)}^d(x) \mid x \in A^{\mathbb{N}} \wedge n < \omega\}$$

ailesidir. Ancak

$$\begin{aligned} d(x, y) < \frac{1}{n+1} & \iff x = y \vee \Delta(x, y) \geq n+1 \\ & \iff x_k = y_k, 0 \leq k \leq n \iff y \in \underline{x|n+1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

olduğundan

$$B_{1/(n+1)}^d(x) = \underline{x|n+1}$$

dolayısıyla $\mathcal{B} = \mathcal{B}^d$ olur ve işimiz biter. ■

$s = (a_0, \dots, a_n) \in A^{n+1}$ ve $x = (x_n)_{n < \omega} \in A^{\mathbb{N}}$ olsun. Bu iki fonksiyon için $s \subseteq x$ olması tam da $a_i = x_i, 0 \leq i \leq n+1$ demektir. Bu durumda

$$\underline{s} := \{a_0\} \times \dots \times \{a_n\} \times \prod_{n+1 \leq m < \omega} A = \{x \in A^{\mathbb{N}} \mid s \subseteq x\}$$

olduğuna dikkat edelim.

(X, d) metrik uzayımızda bir $(x_n)_{n < \omega}$ dizisi ve bir $a \in X$ noktası verilsin. Bu dizinin d metriğine göre a noktasına yakınsamasından anlaşılabilecek olan bu dizinin $\mathcal{T}_d$ topolojisinde a noktasına yakınsak olması demektir. Açarsak her $B_r(a)$ açık topunun dışında dizimizin en fazla sonlu sayıda x_m terimi varsa dizimiz a **noktasına** (d metriğine göre) **yakınsaktır** denir ve bu $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ veya $\lim x_n = a$ veya $x_n \rightarrow a$ ile gösterilir. Böylece

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \in \omega (n \geq n_0 \implies d(x_n, a) < \varepsilon). \\ &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0. \end{aligned}$$

Burada n_0 doğal sayısı elbette ε sayısına bağlıdır, dd. $n_0 = n_0(\varepsilon)$. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \omega$ doğal sayısı her $m, n \geq n_0$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak biçimde bulunabiliyorsa $(x_n)_{n < \omega}$ dizimiz bir **d-Cauchy dizisidir** denir. Cauchy dizisi bir topolojik kavram değildir ve seçilen metriğe bağlıdır: X kümesi üzerinde d ve d' metrikleri aynı topolojiyi tanımlayabilir, yinede bu kümede verilen bir dizi metriklerin birine göre bir Cauchy dizisi iken diğerine göre bir Cauchy dizisi olmayabilir (az ileride bir örneğin ipucunu vereceğiz). (X, d) metrik uzayında her d-Cauchy dizisi yakınsaksa bu uzay **tamdır** denir. Bir $A \subseteq X$ altkümesi için $\bar{A} = X$ ise A kümesi X 'te **yoğundur** denir. Sayılabilir yoğun altkümesi olan uzaylara **ayrılabilir** uzaylar denir. Ayrılabilir metrik uzayların **ikinci sayılabilir**, dd. topolojilerinin sayılabilir bir bazının olduğunu görmek gerçekten kolaydır: $S \subseteq X$ sayılabilir ve yoğunsa, $\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} | x > 0\}$ olmak üzere

$$\{B_r(a) \mid a \in S \wedge 0 \neq r \in \mathbb{Q}^+\} \quad (3.3)$$

sayılabilir ailesi metrik uzayımızın bir bazıdır. Tersine uzayımız ikinci sayılabilirse ayrılabilir. Gerçekten de $\{A_n\}_{n < \omega}$ uzayımızın sayılabilir bir bazı olsun. Her n için $A_n \neq \emptyset$ varsayabiliriz ve her A_n kümesinden rastgele bir a_n noktası seçersek elde edeceğimiz sayılabilir $\{a_n\}_{n < \omega}$ altkümemiz uzayımızda aynı zamanda yoğundur.

Önce bir tanım vereceğiz. (X, d) herhangi bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ ise

$$d(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

sayısına, supremum $[-\infty, +\infty]$ 'da alınmak üzere, A altkümesinin **çapı** denir. Her A altkümesi için açıkça $d(\bar{A}) = d(A)$ (ödev).

Teorem 3.1.7 Cantor. *Bir (X, d) metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n) = 0$ koşulunu sağlayan, boştan farklı kapalı kümelerin her daralan $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ dizisinin $A := \bigcap_{n < \omega} A_n$ arakesitinin tek bir nokta içermesidir.*

Kanıt. 1. Uzayımız tam olsun ve $(A_n)_{n<\omega}$ dizisi teoremin koşullarını sağlasın. Her A_n kümesinden bir a_n seçersek $(a_n)_{n<\omega}$ bir Cauchy dizisi olur ve uzay tam olduğundan bir a noktasına yakınsar. A_n kümeleri kapalı olduklarından her n için $a \in A_n$, dolayısıyla $a \in A$ olur. A kümesinin bir başka nokta içermesi $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n) = 0$ ile çelişir.

2. Ölçüt sağlansın. Uzayımızda bir $(x_n)_{n<\omega}$ Cauchy dizisi verilsin. Her $n < \omega$ için $B_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ ve $K_n = \overline{B_n}$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(K_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(B_n) = 0$$

olduğundan bir $x \in X$ ile $\bigcap_{n<\omega} K_n = \{x\}$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. ■

Not 3.1.8 Bu teorem yardımıyla $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere $[a, b]$ aralığındaki gerçekte sayıların sayılamayacağını şöyle de görebiliriz: Bu aralığın herhangi bir sayılabilir A altkümesi verildiğinde $[a, b] \setminus A$ kümesinde bir r gerçekte sayısı bulabilirsek işimiz biter. Önce A kümemizin öğelerini $a_1, a_2, a_3, \dots$ olarak sıralayalım. Şimdi $c_k := a + k \frac{b-a}{3}$, $k = 0, 1, 2, 3$ noktaları yardımıyla aralığımızı eşit uzunluklu $[c_0, c_1], [c_1, c_2], [c_2, c_3]$ aralıklarına bölelim. Bunlardan en az bir tanesi a_1 öğesini içermez. Böyle bir aralığı seçip ona I_1 diyelim. Aynı işlemi şimdi I_1 aralığıyla yapıp a_2 öğesini içermeyen bir I_2 aralığı elde edelim. Bu işlemi sürdürürsek içiçe $[a, b] \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ kapalı aralıklar dizisi elde ederiz. $\lim d(I_n) = 0$ olduğundan $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ arakesiti bir tek p noktası içerir ve açıkça her n için $a_n \neq p$! □

$\mathbb{R}^n$ uzayımızı yalnızca d Öklid metriğiyle ele alacağız. Bu uzayda açık ve kapalı toplarımızın her metrik uzayda olması gerekmeyen iki ayrı özelliği vardır: Her $a \in \mathbb{R}^n$ ve farklı pozitif r, r' gerçekte sayıları için $B_r(a) \neq B_{r'}(a)$ ve $\overline{B_r}(a) = \overline{B_{r'}}(a)$. Dolayısıyla $\mathcal{B}(a) := \{B_r(a) \mid r \in \mathbb{R}^*\}$ olmak üzere $\mathfrak{B}(a) = \mathfrak{c}$. $\mathbb{R}^n$ uzayımızda her Cauchy dizisi yakınsaktır, dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ tamdır. $\mathbb{R}^n$ uzayımızın sayılabilir ve yoğun olan bir altkümesi vardır: Örneğin $\mathbb{Q}^n$, dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ ayrılabilir bir metrik uzaydır.

$$\mathcal{B} := \{B_r(a) \mid a \in \mathbb{Q}^n \wedge r \in \mathbb{Q}^+\}$$

ise doğal topolojimizin sayılabilir bir bazıdır. $\mathcal{B}$ bazımızı $(B_n)_{n<\omega}$ olarak iyi sıralayalım. Bu bölümde $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n<\omega}$ ile bu özel sayılabilir baz kastedilmektedir.

$(\mathbb{R}^n, d)$ bir tam metrik uzaydır. Bu uzayda herhangi bir $B_r(a)$ açık topunu yine d ile göstereceğimiz Öklid metriğiyle ele aldığımızda $(B_r(a), d)$ bir tam metrik uzay değildir. Okuyucu örnek 2.5.13'te tanımlanan tüm g_r, t_a ve b tamsayımalarının topolojik dönüşümler olduğunu kolayca görebilir. Dolayısıyla $\mathbb{R}^n \stackrel{top}{=} B_r(a)$. Herhangi bir

$$f : \mathbb{R}^n \rightleftharpoons B_r(a)$$

tameşlemesi yardımıyla $\mathbb{R}^n$ uzayındaki d Öklid metriğini

$$d^*(f(x), f(y)) := d(x, y)$$

metriği olarak $B_r(a)$ açık topuna taşırsak elbette $(B_r(a), d^*)$ bir tam metrik uzaydır. d ve d^* metrikleri $B_r(a)$ açık topunda aynı topolojiyi tanımlarlar ancak $(B_r(a), d^*)$ tamken $(B_r(a), d)$ tam değildir.

Tanım 3.1.9 $(X, \mathcal{T})$ herhangi bir topolojik uzay olsun. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ ve $\bigcup \mathcal{U} = X$ ise $\mathcal{U}$ uzayımızın bir **açık örtüsüdür** denir. $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ ve $\bigcup \mathcal{V} = X$ koşulunu sağlayan $\mathcal{V}$ 'lere ise $\mathcal{U}$ 'nın **altörtüleri** denir. Topolojik uzayımızın her açık örtüsünün sonlu bir altörtüsü varsa uzayımıza **kompakttır** denir. Her ögesi hem açık hem de kapalı olan bir bazı sahip topolojik uzaylara **0-boyutlu** uzaylar denir.

Önerme 3.1.10 A ayrık topolojik uzaysa $A^{\mathbb{N}}$ tam metriklenebilir. Ayrıca A sayılabilirse $A^{\mathbb{N}}$ ayrılabilir. $\mathcal{B} := \{\underline{s} \mid s \in A^{<\omega}\}$ bazının her $\underline{s}$ ögesi hem açık hem kapalıdır. Dolayısıyla $A^{\mathbb{N}}$ 0-boyutludur. A kümesi sonsuzsa $A^{\mathbb{N}}$ uzayı kompakt değildir.

Kanıt. d ile (3.1.6)'da $A^{\mathbb{N}}$ üzerinde açıkladığımız metriği gösterelim. $A^{\mathbb{N}}$ uzayımızda bu metriğe göre bir $(x_n)_{n < \omega}$ Cauchy dizisi verilsin. Bu dizinin yakınsak olduğunu kanıtlamak için yakınsak bir alt dizisini bulmak yeterlidir (ödev). Tekrarlı tanımlamayla n_k doğal sayılarını $n_k < n_{k+1}$ ve her $m, n \geq n_k$ için $d(x_m, x_n) \leq 1/(k+1)$ olacak biçimde seçelim. $s_k := x_{n_k} \mid (k+1)$ olsun. $(n_k)_{k < \omega}$ kesin artan bir dizi olduğundan (3.2) ile her $k < l$ için $s_k \subseteq s_l$ olur. Dolayısıyla $x := \bigcup_{k < \omega} s_k \in A^{\mathbb{N}}$ ve açıkça $\lim x_{n_k} = x$, dolayısıyla $\lim x_n = x$.

$A \neq \emptyset$ ve sayılabilir olsun. Bir $a \in A$ ögesini keyfi seçelim. Topolojik uzayımızın bir bazının $\mathcal{B} := \{\underline{s} \mid s \in A^{<\omega}\}$ olduğunu biliyoruz. Her $s = (s_0, \dots, s_{n-1}) \in A^n$ için

$$s_a := (s_0, \dots, s_{n-1}, a, a, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$$

bu dizinin sabit a değeri ile genişletilmesi olsun. Elbette $s_a \in \underline{s}$, dolayısıyla $\{s_a \mid s \in A^{<\mathbb{N}}\}$ kümesi uzayımızın sayılabilir ve yoğun bir altkümesidir.

Bazımızdan bir $\underline{s}$ ögesi alalım. Bunun kapalı olduğunu göstereceğiz. $|s| > 0$, $s = (s_0, \dots, s_{n-1})$ ve $a = (a_n)_{n < \omega} \notin \underline{s}$ olsun. En az bir $0 \leq k \leq n-1$ için $a_k \neq s_k$ olacaktır. Bu durumda $a \mid n$ bir yandan a noktasının bir komşuluğudur, diğer yandan $a \mid n \cap \underline{s} = \emptyset$, dolayısıyla $\underline{s}$ kümesinin tümleyi, her a noktasıyla birlikte bunun bir komşuluğunu içerir, bu nedenle açıktır.

Şimdi A kümesi sonsuz olsun. $a^1 := (a) \in A^1$ olmak üzere $\{\underline{a^1} \mid a \in A\}$ ailesi $A^{\mathbb{N}}$ uzayımızın bir açık örtüsüdür. Ancak bu ailenin hiçbir sonlu alt ailesi uzayımızı örtemez! ■

3.2 AĞAÇLAR VE POLONYA UZAYLARI

Tanım 3.2.1 $\mathcal{T} = (T, <)$ kısmi sıralanmış kümesine her $x \in T$ için $T_x = \{t \in T \mid t < x\}$ olmak üzere $(T_x, <)$ iyi sıralanmış ve T 'nin bir en küçük ögesi¹ varsa bir **ağaç** diyeceğiz. $\alpha := srs(T_x, <)$ sıra sayısına x 'in **yüksekliği** denir ve bunu $yk(x)$ ile göstereceğiz. $T_\alpha := \{t \in T \mid yk(t) = \alpha\}$ kümesine ise ağacımızın α . **seviyesi** denir. T ağacının ögelerine bu ağacın **dallanma noktaları** veya **düğümeleri** denir. T ağacının bir D **dalından** $\subseteq$ bağıntısına göre maksimal olan bir $D \subseteq T$ zincirini anlayacağız, dd. $(D, <)$ doğrusal sıralanmıştır ve bu tip altkümeler arasında $\subseteq$ bağıntısına göre maksimaldir. Her $x \in T$ ögesinin dolaysız ardılları sonlu ise, dd.

$$\forall x \in T (\alpha = yk(x) \implies \aleph\{y \in T_{\alpha+1} \mid x < y\} < \omega)$$

ise $\mathcal{T}$ ağacı **sonlu dallanmıştır** denir.

Bu tanımda $<$ bağıntısı yerine elbette $\leq$ bağıntısından da yola çıkılabilir. $t_0 := \min T$ ise t_0 ağacımızın köküdür ve ağacımız yukarıya doğru dallanarak büyür. T bir küme olduğundan her α için $T_\alpha \neq \emptyset$ olamaz!

$$\lambda := \min\{\alpha \mid T_\alpha = \emptyset\}$$

sayısına ağacımızın **yüksekliği** denir ve bunu $yk(\mathcal{T})$ ile göstereceğiz. $T_\alpha \neq \emptyset$ ise her $\beta < \alpha$ için $T_\beta \neq \emptyset$ ve ayrıca her $x \in T_\alpha$ için $y < x$ olan bir tek $y \in T_\beta$ vardır. Dallar ise tamı tamına öncüllere göre kapalı olan zincirlerdir.

Teorem 3.2.2 König, D. *Sonlu dallanan sonsuz bir ağacın en az bir sonsuz dalı vardır*².

Kanıt. Her $x \in T$ için $T^x = \{t \in T \mid x < t\}$ ile x ögesinin T 'deki ardıllarının kümesini göstermiştik. Tekrarlı tanımlamayla her $n \in \omega$ için $x_n \in T_n$ ögelerini $x_0 = \min T$, $x_n < x_{n+1}$ ve T^{x_n} sonsuz olacak biçimde tanımlayacağız. Bu durumda $D := \{x_n \mid n < \omega\}$ bir sonsuz dal olur.

$x_0 := \min T$ olsun. Ağacımız sonlu dallandığından T_1 sonludur, dolayısıyla $T^{(1)} := T \setminus (T_0 \cup T_1)$ sonsuzdur. $T^{(1)} = \bigsqcup_{x \in T_1} T^x$ olduğundan çekmece ilkesine göre en az bir $x_1 \in T_1$ için T^{x_1} sonsuzdur. Olay anlaşılmıştır. $x_n \in T_n$ ögesi T^{x_n} sonsuz olacak biçimde seçilmiş olsun. $U_{n+1} := T_{n+1} \cap T^{x_n}$ sonlu olduğundan $T^{(n+1)} := T^{x_n} \setminus U_{n+1}$ sonsuzdur. $T^{(n+1)} = \bigsqcup_{x \in U_{n+1}} T^x$

¹Bazı yazarlar “en küçük ögenin” varlığını istemez. O zaman biz ona **orman** demeyi yeğleyeceğiz. Bir orman bizim ağaçlarımızdan birden fazlasını içerebilir. Biz her ağacın *bir kökünün* (en küçük ögemiz) olmasını yeğliyoruz.

²D. König, J. König'in oğludur.

olduğundan yine çekmece ilkesinden en az bir $x_{n+1} \in U_{n+1}$ için $T^{x_{n+1}}$ sonsuz olur, işimiz biter. ■

Özel Ağaçlar: $A \neq \emptyset$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $A^n = \{s \mid s : n \rightarrow A\}$ ve $A^{<\omega} = \bigcup_{n < \omega} A^n$ olduğunu biliyoruz. Burada $A^0 = \{\emptyset\}$ olduğunu anımsatalım. $s \in A^n$ öğesine (A 'nın öğelerinin) bir sonlu dizisi demiş ve her $i < n$ için $s_i := s(i)$ olmak üzere bu diziyi $s = (s_0, \dots, s_{n-1})$ olarak da göstermiştik. $|s| := n$ doğal sayısına bu dizinin **uzunluğu** denir. $A^{\mathbb{N}} = \{s \mid s : \mathbb{N} \rightarrow A\}$ kümesinin öğelerine ise (A 'nın öğelerinin) bir sonsuz dizisi denir. $s \in A^{\mathbb{N}}$ için $|s| := \omega$ olarak açıklanır. $A^{<\omega}$ kümesinde bir $\leq$ kısmi sıralaması her $s, t \in A^{<\omega}$ için

$$s \leq t \iff s \subseteq t \iff |s| \leq |t| \wedge \forall i < |s| \ s(i) = t(i) \iff s = t \upharpoonright |s| \quad (3.4)$$

ile tanımlanır. $s \leq t$ tam da s dizisinin t 'de bir *başlangıç* olması demektir. Her $k < |s|$ için $s \upharpoonright k \leq s$ olduğu apaçıktır.

$$s = (s_0, \dots, s_{n-1}), t = (t_0, \dots, t_{m-1}) \in A^{<\omega}$$

olmak üzere s 'ye t 'nin **eklenmişinden** $t = \emptyset$ ise $s^\wedge t = s$, $s = \emptyset$ ise $s^\wedge t = t$ ve $s \neq \emptyset \wedge t \neq \emptyset$ ise

$$s^\wedge t := (s_0, \dots, s_{n-1}, t_0, \dots, t_{m-1}) \in A^{<\omega}$$

dizisini anlayacağız. Eğer $|t| = 1$ ve $t = (n)$ ise $s^\wedge t$ yerine $s^\wedge n$ yazacağız. Sonsuz çoklukta $d_i \in A^{<\mathbb{N}}$ dizilerini de birbirine $d_0^\wedge d_1^\wedge \dots$ olarak ekleyebiliriz. $d_0^\wedge d_1^\wedge \dots \in A^{<\omega}$ olması için gvyk. bir n_0 doğal sayısının her $n \geq n_0$ için $d_n = \emptyset$ olacak biçimde bulunmasıdır. Aksi durumda elbette $d_0^\wedge d_1^\wedge \dots \in A^{\mathbb{N}}$ olur. Özellikle $d_0 \leq d_1 \leq \dots$ ise $d := \bigcup_{i < \omega} d_i$ dizisini oluşturabiliriz.

Tanım 3.2.3 $A \neq \emptyset$ kümesinde bir $\mathcal{T} = (T, <)$ **ağacı** $T \subseteq A^{<\omega}$ ve $< = \subset$ olan bir ağaçtır, dd. $\mathcal{T} = (T, <)$ 'nin A 'da bir **ağaç** olması için gvyk.

$$T \subseteq A^{<\omega} \wedge \forall s, t \in T \ (s < t \iff s \subset t) \wedge \forall s \in T \ \forall n < |s| \ (s \upharpoonright n \in T)$$

olmasıdır. Bir $s \in A^{\mathbb{N}}$ sonsuz dizisine her $n < \omega$ için $s \upharpoonright n \in T$ ise T ağacının bir **sonsuz dalıdır** denir. T ağacının sonsuz dallarının kümesi $[T]$ ile gösterilir. T ağacındaki tüm maksimal zincirler bir sonsuz dalsa T ağacı (tüm kısa dalları kesilmiş anlamında) **budanmıştır** denir. s ve t kıyaslanamıyorsa bunu kısaca $s \parallel t$ ile göstereceğiz, dd. $s \parallel t \iff \neg(s \leq t) \wedge \neg(t \leq s)$.

Not 3.2.4 Bir A kümesindeki ağaç söz konusu olduğunda $<$ (veya $\leq$) sıralaması $\subset$ (veya $\subseteq$) olduğundan bunu artık belirtmeden $\mathcal{T}$ ağacı yerine T ağacından söz edeceğiz. Bizi özellikle $2^{<\mathbb{N}}$ ve $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ağaçları ilgilendirecektir. Bu ağaçlar için $[2^{<\mathbb{N}}] = 2^{\mathbb{N}}$ ve $[\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}] = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ olduğu apaçıktır ve her iki ağaçta budanmıştır. $2^{<\mathbb{N}}$ sonlu dallanmıştır, ancak $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ sonlu dallanmamıştır. $\square$

Tanım 3.2.5 Bir $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayına X kümesinde bir d metriği $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ ve (X, d) tam metrik uzay olacak biçimde bulunabiliyorsa **tam metriklenabilir** denir. Tam metriklenebilen ayrılabilir topolojik uzaylara **Polonya uzayları** denir.

Not 3.2.6 $\mathbb{R}^n$ ve bu uzaydaki her açık ve her kapalı top Polonya uzaylarıdır. Bunlar bağlantılı uzaylardır. $\mathbb{R}^n$ ve açık topumuz kompakt değilken kapalı topumuz kompakttır. A kümesi ayrık topolojiyle alınmış sayılabilir bir küme ise $A^{\mathbb{N}}$ bir Polonya uzayıdır ve tümüyle bağlantısızdır. Polonya uzaylarının kapalı $A \neq \emptyset$ kümeleri aynı metrikle yine Polonya uzaylarıdır. Polonya uzaylarının sayılabilir çarpımları da çarpım topolojisiyle yine Polonya uzaylarıdır. $\square$

Tanım 3.2.7 $\mathbb{B} := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ uzayına **Baire uzayı**, $\mathcal{C} := 2^{\mathbb{N}}$ uzayına ise **Cantor uzayı** denir. Burada $\mathbb{N}$ ve 2 ayrık topolojiyle alınmışlardır.

Herhangi bir κ çokluk sayısı ayrık topolojiyle alındığında bu uzay $D(\kappa)$ ile de gösterilir. Bu durumda $\mathbb{B} = D(\aleph_0)^{\mathbb{N}}$ ve $\mathcal{C} = D(2)^{\mathbb{N}}$ olur.

Önerme 3.2.8 $C \subset [0, 1]$ Cantor kümesi görelî topolojiyle alındığında $C \stackrel{top}{=} \mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}}$.

Kanıt.

$$f : \mathcal{C} \longrightarrow C \left(x = (x_n)_{n < \omega} \rightsquigarrow y = \sum_{n < \omega} \frac{2x_n}{3^{n+1}} \right)$$

dönüşümünün bir tameşleme olduğu apaçıktır. Diğer yandan $x \in \mathcal{C}$ noktasının bir komşuluk bazı $\{x|n+1 \mid n < \omega\}$ ve

$$y \in x|n+1 \iff x_k = y_k, 0 \leq k \leq n \iff |f(y) - f(x)| < \frac{1}{3^{n+1}}$$

olduğundan f fonksiyonunun bir topolojik dönüşüm olduğu hemen görülür. Böylece $\mathcal{C} \stackrel{top}{=} C$. ■

$\mathbb{I} \stackrel{top}{=} \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ olduğunu kanıtlayacağımız sıradaki teoremin kanıtının ana felsefesini şimdiden belirtmekte yarar vardır. Her şeyden önce $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \stackrel{top}{=} \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ olduğu açıktır. Bu nedenle $\mathbb{I} \stackrel{top}{=} \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $[\mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}] = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$

olduğunu biliyoruz. $\mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}$ ağacı kökünde $\emptyset$ ile başlar ve yukarı tırmandıkça dallanma noktaları daha uzun $s \in \mathbb{Z}^n$ dizilerinden oluşur. Her s dallanma noktasından sayılabilir sonsuz $s^\wedge k$ ($k \in \mathbb{Z}$) dalı çıkar. Bu ağacımıza ait iki $x, y \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ sonsuz dalı aldığımızda bu dalların birbirine eşit olduğu başlangıç ne kadar uzunsa $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ uzayının metriğinde bu iki sonsuz dal birbirine o kadar yakındır. Biz bu ağaçla (kısımlı sıralanmış kümeler olarak) eşyapılı ikinci bir ağaç oluşturacağız. $\mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}$ ağacının her s dallanma noktasına yeni ağacımızın I_s nesnesi karşılık geritilecektir. I_s uç noktaları rasyonel sayılar olan $\mathbb{R}$ 'de bir $I_s = (a_s, b_s)$ açık aralığı olacaktır. Burada $\pm\infty$ nesnelere de rasyonel sayı dememize izin verilsin. Yeni ağacın kökünde $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ açık aralığı bulunacaktır. Yeni ağacımızın her $I_s = (a_s, b_s)$ dallanma noktasından sayılabilir sonsuz dal çıkıp $I_{s^\wedge k}$ ($k \in \mathbb{Z}$) dallanma noktalarına ulaşacaktır ve her bir $I_{s^\wedge k}$ yine uç noktaları rasyonel sayılar olan ve tümüyle I_s aralığının içine düşen ayrık, ancak birbirine komşu açık aralıklar olacaktır. Komşuluktan anladığımız ise $I_{s^\wedge k}$ aralığının başlangıç noktasının solundaki ilk açık aralığın bitiş noktası, $I_{s^\wedge k}$ aralığının bitiş noktasının ise sağındaki ilk açık aralığın başlangıç noktası olması demektir. Ayrıca I_s bir sonlu aralıksa her bir $I_{s^\wedge k}$ aralığının uzunluğu I_s aralığının uzunluğunun yarısında küçük olacaktır. Her $x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ sonsuz dalına yeni ağacın bir sonsuz dalı karşılık gelir ve yeni ağacın x sonsuz dalına karşılık gelen sonsuz dalı üzerindeki daralan açık aralıkların arakesiti bir tek r_x irrasyonel sayıdan oluşacaktır. Farklı $x, y \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ dizilerine farklı öğeler karşılık getireceğiz. $x, y \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ dizilerinin birbirine eşit olduğu başlangıç ne kadar uzunsa bu uzayın metriğinde bu iki dizi birbirine o kadar yakındır ve onlara karşılık gelen r_x, r_y irrasyonel sayıları da Öklid metriğinde birbirine o oranda yakın olacaklardır.

Teorem 3.2.9 $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrasyonel sayılar kümemiz $\mathbb{R}$ 'deki göreceli topolojiyle alındığında $\mathbb{I} \stackrel{top}{=} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathbb{B}$.

Kanıt. Her şeyden önce A herhangi bir sayılabilir sonsuz ayrık uzay olmak üzere $\mathbb{B} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \stackrel{top}{=} A^{\mathbb{N}}$ olduğu aşıkardır. Bu nedenle biz $\mathbb{I} \stackrel{top}{=} \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ olduğunu göstereceğiz. Her şeyden önce $\mathfrak{c} = \mathfrak{h}\mathbb{I} = \mathfrak{h}\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.

Tekrarlı tanımlamayla $\mathbb{R}$ 'nin açık aralıklarından oluşan bir $\mathcal{I} = \{I_s \mid s \in \mathbb{Z}^{<\omega}\}$ ailesi tanımlayacağız; n . adımda $\mathcal{I}_n = \{I_s \mid s \in \mathbb{Z}^n\}$ ailesini tanımlayacağız. $I_\emptyset := \mathbb{R}$ olsun. $\mathcal{I}_n$ tanımlanmış olsun. $s \in \mathbb{Z}^n$ sabit seçilsin ve $I_s = (a_s, b_s)$, $-\infty \leq a_s < b_s \leq +\infty$ olsun. $s = \emptyset$ için $a_s = -\infty, b_s = +\infty$ ve $m_s = 0$ olmak üzere diğer durumlarda $m_s := a_s + (b_s - a_s)/2$ olarak açıklansın. $\psi : \mathbb{N} \rightleftharpoons \mathbb{Q}$ bir tameşleme ve her n için $q_n := \psi(n)$ olsun. I_s aralığında kesin artan $(x_k)_{k < \omega}$ ve kesin azalan $(y_k)_{k < \omega}$ dizileri

- (1) $x_0 = m_s$,
- (2) $x_1 = q_u, u := \min\{k \mid q_k \in (m_s, b_s)\}$,
- (3) $\forall k \geq 2 (x_k \in \mathbb{Q})$,
- (4) $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = b_s$,

ve

- (1) $y_0 = m_s$,
- (2) $y_1 = q_v, v := \min\{k \mid q_k \in (a_s, m_s)\}$,
- (3) $\forall k \geq 2 (y_k \in \mathbb{Q})$,
- (4) $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = a_s$

olacak biçimde seçilsinler. Bu durumda $k \in \mathbb{Z}$ için $k \geq 0$ ise $I_{s \wedge k} := (x_k, x_{k+1})$ ve $k < 0$ içinse $I_{s \wedge k} := (y_k, y_{k+1})$ olarak tanımlansın. $\mathcal{I}_{n+1} := \{I_{s \wedge k} \mid s \in \mathbb{Z}^n \wedge k \in \mathbb{Z}\}$.

$l(I_s)$ ile I_s aralığının uzunluğunu gösterelim. $|s|$ üzerinden tümevarımla

(i) $\forall |s| \geq 1 (a_s, b_s \in \mathbb{Q})$.

(ii) $\forall k \in \mathbb{Z} \overline{I_{s \wedge k}} \subseteq I_s$.

(iii) $l(I_{s \wedge k}) < \frac{1}{2}l(I_s)$.

olduğu kolayca görülür.

Biz şimdi $\mathbb{Q} = \{a_s, b_s \mid \emptyset \neq s \in \mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}\}$ olduğunu savunuyoruz. Tersini varsayalım ve $q \in \mathbb{Q} \setminus \{a_s, b_s \mid \emptyset \neq s \in \mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}\}$ olsun. Tek olarak belirli bir m ile $q = q_m$ olacaktır. Her $n \geq 1$ için tek olarak belirli bir $s(q, n)$ ile $q \in I_{s(q, n)}$ olacaktır. Böylece kesin daralan bir

$$I_{s(q, 1)} \supset I_{s(q, 2)} \supset I_{s(q, 3)} \supset \dots$$

dizisi elde ederiz. Tanım gereği $I_{s(q, n+1)}$ aralığının $I_{s(q, n)}$ aralığında ve bu aralığın $m_{s(q, n)}$ orta noktasının ya sağında ya da solunda yer aldığını biliyoruz. Bunun için tekrarlı tanımlama sırasında $I_{s(q, n)}$ aralığında $(x_k)_{k < \omega}$ ve $(y_k)_{k < \omega}$ dizileri seçmiştik. Özellikle

$$u(n) := \min\{k \mid q_k \in (m_{s(q, n)}, b_{s(q, n)})\}$$

ve

$$v(n) := \min\{k \mid q_k \in (a_{s(q, n)}, m_{s(q, n)})\}$$

olmak üzere $x_1 = u(n)$ ve $y_1 = v(n)$ seçmiştik. $u(n)$ ve $v(n)$ açıkça birebir fonksiyonlardır. $I_{s(q, n+1)}$ aralığı $m_{s(q, n)}$ orta noktasının solunda ise $v(n) < m$, sağında ise $u(n) < m$ olacaktır. $I_{s(q, n+1)}$ aralığı $m_{s(q, n)}$ orta noktasının ya sonsuz kez solundadır, bu ise sonsuz çoklukta n için $v(n) < m$ demektir ve bir çelişkidir; ya da sonsuz kez sağındadır ve bu sonsuz çoklukta n için $u(n) < m$ olması demektir ki yine bir çelişkidir.

Şimdi bir $h : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{I}$ dönüşümü tanımlayacağız. $x \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ise

$$I_{\emptyset} \supseteq I_{x|1} \supseteq I_{x|2} \supseteq \cdots,$$

ayrıca $I_{x|n} \supseteq \overline{I_{x|n+1}}$ ve bu aralıkların uzunlukları sıfıra gittiğinden, arakesitleri bir tek r_x gerçek sayısı içerir. Rasyonel sayılarımızı aralıklarımızın uç noktalarına harcadığımızdan $r_x \in \mathbb{I}$, dolayısıyla $h(x) := r_x$ ile tanımlanan fonksiyon için $h : \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{I}$.

Önce h fonksiyonunun birebir olduğunu gösterelim. $x, y \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ve $x \neq y$ olsun. $n := \Delta(x, y)$ olmak üzere $s := x|n$ sonlu dizisi x ve y sonsuz dizilerinin birbirine eşit oldukları maksimal başlangıçtır. $h(x) \in I_{s \wedge x(n)}$, $h(y) \in I_{s \wedge y(n)}$ ve $x(n) \neq y(n)$ olduğundan $I_{s \wedge x(n)} \cap I_{s \wedge y(n)} = \emptyset$, dolayısıyla $h(x) \neq h(y)$.

Şimdi $r \in \mathbb{I}$ keyfi verilsin. Her $n < \omega$ için $r \in I_{s(r,n)}$ olacak biçimde tek olarak belirli bir $s(r, n) \in \mathbb{Z}^n$ vardır. Her n için $s(r, n) \leq s(r, n+1)$ olduğundan

$$x := \bigcup_{n < \omega} s(r, n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$$

ve $h(x) = r$. Dolayısıyla h örtendir.

Şimdi h dönüşümünün sürekli ve açık olduğunu göstereceğiz. Her $s \in \mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}$ için $h[s] = I_s \setminus \mathbb{Q} = I_s \cap \mathbb{I}$. $\{s \mid s \in \mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}\}$ ailesi $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ topolojik uzayının bir bazı olduğundan $\{I_s \cap \mathbb{I} \mid s \in \mathbb{Z}^{<\mathbb{N}}\}$ ailesinin $\mathbb{I}$ 'nin topolojisinin bir bazı olduğunu görmek yeterlidir. $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1 < r_2$ koşulunu sağlayan herhangi iki gerçek sayı ve r ise $r_1 < r < r_2$ koşulunu sağlayan bir irrasyonel sayı olsun. $\{r\} = \bigcap_{n < \omega} I_{s(r,n)}$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{s(r,n)} = r = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{s(r,n)}$. Bu nedenle yeterince büyük bir n için $r \in I_{s(r,n)} \cap \mathbb{I} \subseteq (r_1, r_2) \cap \mathbb{I}$ ve işimiz biter. ■

Not 3.2.10 Her $1 \leq \mu \leq \aleph_0$ için (3.1.4) ile $\mathcal{C} \stackrel{top}{=} C^\mu$ ve $\mathbb{B} \stackrel{top}{=} \mathbb{B}^\mu$ dolayısıyla

$$C \stackrel{top}{=} C^\mu \text{ ve } \mathbb{I} \stackrel{top}{=} \mathbb{I}^\mu$$

elde edilir. □

Teorem 3.2.11 Her P Polonya uzayı Baire uzayının sürekli resmidir, dd. örten ve sürekli bir $f : \mathbb{B} \twoheadrightarrow P$ fonksiyonu vardır.

Kanıt. P Polonya uzayımızda sayılabilir yoğun bir $D = \{p_\alpha\}_{\alpha < \omega}$ kümesini alalım. Her $s = (s(n))_{n < \omega} \in \mathbb{B} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ için $(x_n^s)_{n < \omega}$ dizisini

$$x_0^s := p_0,$$

$$x_{n+1}^s := \begin{cases} p_{s(n+1)} & , d(x_n^s, p_{s(n+1)}) < \frac{1}{2^n} \text{ ise} \\ x_n^s & , \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $(x_n^s)_{n<\omega}$ bir Cauchy dizisidir. P uzayımız tam olduğundan bu dizi tek olarak belirli bir noktaya yakınsar ve biz

$$f(s) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^s$$

olarak tanımlıyoruz. f fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermeyi ödev olarak bırakıyoruz. Örtten olduğunu görelim. $x \in P$ keyfi olarak verilsin.

$$s(n) := \min \left\{ k \mid d(p_k, x) < \frac{1}{2^{n+1}} \right\}$$

olarak tanımlanırsa $s = (s(n))_{n<\omega}$ için $f(s) = x$ olur. ■

Şimdi $(X, \mathcal{T})$ herhangi bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Daha önce (II.11)'de yığılma noktalarını tanımlamış, bir A kümesinin yığılma noktalarının kümesini A' ile göstermiş ve $\overline{A} = A \cup A'$ olduğunu belirtmiştik. Son bağıntıdan dolayı bir A kümesinin kapalı olması $A' \subseteq A$ olmasıyla eş değerlidir. Eğer A kümesi *kapalı ise* A' kümesi A kümesinden ayrık noktaları atılarak elde edilir. Her A kümesi için A' kümesinin kapalı olduğu kolayca görülür. Bir x noktasının her komşuluğunda A kümesinin sayılamaz çoklukta noktası varsa x noktası A kümesinin bir **yoğunlaşma noktasıdır** denir. Elbette her yoğunlaşma noktası bir yığılma noktasıdır, ancak tersi doğru değildir. Örneğin $\mathbb{R}$ 'de 0 noktası $\{\frac{1}{n} \mid 1 \leq n \in \omega\}$ kümesinin bir yığılma noktasıdır, ancak bir yoğunlaşma noktası değildir. A kümesinin yoğunlaşma noktalarının kümesini $A^\star$ ile gösterelim. A kümesi kapalı ve ayrık noktaları yoksa **kusursuzdur** denir. $\mathcal{T}^C$ ile kapalı kümelerimizin kümesini gösterelim.

Sıradaki teoremden her kusursuz Polonya uzayının Cantor uzayının bir kopyasını içerdiğini kanıtlayacağız, dd. P kusursuz bir Polonya uzayı ise bir $g : \mathcal{C} \rightarrow P$ gömmesinin varlığını kanıtlayacağız. $\mathcal{C} = C$ kompakt ve P bir Hausdorff uzayı olduğundan her sürekli $f : \mathcal{C} \rightarrow P$ dönüşümü kapalıdır, dd. kapalı kümeleri kapalı kümelere resmeder (ödev). Bu nedenle her birebir ve sürekli $g : \mathcal{C} \rightarrow P$ dönüşümü kendiliğinden bir gömmedir. Böyle bir dönüşümün varlığını kanıtlayacağız.

Kanıtın ana felsefesi artık tanındıktır. $A = \{A_s \mid s \in 2^{<\omega}\}$ olmak üzere $(2^{<\omega}, <)$ ile eşyapılı bir $\mathcal{A} = (A, \subset)$ ağacı tanımlayacağız. Her $s \in 2^{<\omega}$ için $A_s \subseteq P$ olacak ve her A_s dallanma noktası $A_{s \wedge 0} \cap A_{s \wedge 1} = \emptyset$ ve $A_{s \wedge 0}, A_{s \wedge 1} \subset A_s$ olmak üzere iki ayrı koldan büyümeye devam edecektir. Her $x \in \mathcal{C} = 2^\omega$ için $\bigcap_{n<\omega} A_{x|n}$ arakesitinin bir tek noktadan oluşmasını ayarlayacağız ve bu tek noktayı $g(x)$ olarak açıklayacağız.

Teorem 3.2.12 *Her kusursuz P Polonya uzayı $\mathcal{C}$ Cantor uzayının bir kopyasını içerir, dd. bir $g : \mathcal{C} \rightarrow P$ gömme fonksiyonu vardır.*

Kanıt. d, P uzayımızın topolojisini veren bir tam metrik olsun. Bir $Q \subseteq P$ yoğun altkümesi yardımıyla bir $\mathcal{B} = \{B_r(q) \mid q \in Q \wedge r \in \mathbb{Q}^+\}$ bazını seçelim ve bir $\psi : \mathbb{N} \rightleftharpoons \mathcal{B}$ tameşlemesiyle $\mathcal{B}$ 'nin öğelerini $(B_n)_{n < \omega}$ olarak iyi sıralayalım ve $r(B_n)$ ile B_n topunun yarıçapını gösterelim. $|s|$ uzunluğu üzerinden tümevarımla bir $\sigma : 2^{<\omega} \rightarrow \omega$ fonksiyonunu

- (i) $\forall s, t \in 2^{<\omega} (s < t \implies \overline{B_{\sigma(s)}} \subset B_{\sigma(t)}),$
- (ii) $\forall s \in 2^{<\omega} (|s| = n \implies r(B_{\sigma(s)}) \leq 2^{-n}),$
- (iii) $\forall s, t \in 2^{<\omega} (s || t \implies B_{\sigma(s)} \cap B_{\sigma(t)} = \emptyset),$

koşullarını sağlayacak biçimde tanımlayacağız.

$\sigma(\emptyset) := \min\{n \mid r(B_n) \leq 1\}$ olsun. Uzunluğu $\leq n$ olan her s için $\sigma(s)$ (i)-(iii) sağlanacak biçimde tanımlanmış olsun. Şimdi $t = (t_0, \dots, t_n) \in 2^{<\omega}$ uzunluğu $n+1$ olan bir dizi olsun ve $s := t|n = (t_0, \dots, t_{n-1})$ olsun. Uzayımız kusursuz olduğundan ayrık noktaları yoktur, dolayısıyla $B_{\sigma(s)}$ topunda uzayımızın sonsuz çoklukta noktası vardır. Bu toptan birbirinden farklı iki x, y noktalarıyla bunların bu topun içine düşen ayrık açık U_x ve U_y komşuluklarını seçelim. Kapanışları bu açık kümeler içine düşen ve yarıçapları $\leq 2^{-(n+1)}$ olan bazımıza ait topların varlığını görmeyi basit bir ödev olarak bırakıyoruz. $t = s^\wedge 0 \vee t = s^\wedge 1$.

$$\begin{aligned} \sigma(s^\wedge 0) &:= \min\{m \in \omega \mid \overline{B_m} \subseteq U_x \wedge r(B_m) \leq 2^{-(n+1)}\} \text{ ve} \\ \sigma(s^\wedge 1) &:= \min\{m \in \omega \mid \overline{B_m} \subseteq U_y \wedge r(B_m) \leq 2^{-(n+1)}\} \end{aligned}$$

olsun. Böylece $\sigma(t)$ de koşullar sağlanacak biçimde tanımlanmış olur.

Şimdi her $s \in 2^{<\omega}$ için $A_s := \overline{B_{\sigma(s)}}$ olsun. Herhangi bir $x \in 2^\omega$ için $(A_{x|n})_{n < \omega}$, kapalı kümelerin kesin daralan ve $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_{x|n}) = 0$ koşulunu sağlayan bir dizisidir ve (P, d) tam metrik uzay olduğundan, $\bigcap_{n < \omega} A_{x|n}$ arakesiti $g(x)$ ile göstereceğimiz bir tek noktadan oluşur. $x, y \in 2^\omega$ ve $x \neq y$ ise

$$m := \min\{k < \omega \mid x_k \neq y_k\}$$

olsun. Bu durumda $A_{x|m+1} \cap A_{y|m+1} = \emptyset$ olacağından $g(x) \neq g(y)$ olur. Dolayısıyla g birebirdir. Diğer yandan g fonksiyonunun sürekliliği kolayca görülür. $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. $\exists n \in \omega \ 2^{-(n-1)} < \varepsilon$. x noktasının $\mathcal{C}$ uzayındaki $x|n$ komşuluğundaki her y noktası için $y|n = x|n$ olduğundan $g(x), g(y) \in \overline{B_{\sigma(x|n)}}$ olur ve buradan (ii) ile

$$d(g(x), g(y)) \leq 2^{-n} + 2^{-n} = 2^{-(n-1)} < \varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla g süreklidir ve teoremin ifadesinden önce söylenenlerle işimiz biter. ■

3.3 BAZI ÇOKLUK TEOREMLERİ

Önerme 3.3.1 X ayrılabilir bir metrik uzaysa $\mathfrak{h}X \leq \mathfrak{c}$.

Kanıt. $S \subseteq X$ sayılabilir yoğun bir altküme ise her $x \in X$ noktası S kümesindeki bir $(x_n)_{n < \omega}$ dizisinin limitidir. Demek ki X kümesinin noktaları en fazla S 'deki diziler kadardır. Dolayısıyla $\mathfrak{h}X \leq \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. ■

Önerme 3.3.2 X ayrılabilir bir metrik uzaysa $\mathfrak{h}\mathcal{T} \leq \mathfrak{c} \wedge \mathfrak{h}\mathcal{T}^C \leq \mathfrak{c}$. X uzayımız $\mathbb{R}^n$ ise $\mathfrak{h}\mathcal{T} = \mathfrak{h}\mathcal{T}^C = \mathfrak{c}$.

Kanıt. Uzayımızın sayılabilir bir bazı $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n < \omega}$ ise her açık kümemiz bu A_n kümelerinin bir kısmının birleşimi olduğundan açık kümelelerimiz en fazla öğeleri $\mathcal{A}$ kümesinden seçilen diziler kadardır. Dolayısıyla $\mathfrak{h}\mathcal{T} \leq \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

$$f : \mathcal{T} \rightleftharpoons \mathcal{T}^C (A \rightsquigarrow X \setminus A)$$

bir tamesleme olduğundan $\mathfrak{h}\mathcal{T}^C \leq \mathfrak{c}$.

$\mathbb{R}^n$ uzayında ise ayrıca $\mathfrak{c} = \mathfrak{h}\{B_r(a) \mid 0 < r \in \mathbb{R}\} \leq \mathfrak{h}\mathcal{T}$ olduğundan $\mathfrak{h}\mathcal{T} = \mathcal{T}^C = \mathfrak{c}$ olur. ■

Önerme 3.3.3 $(X, \mathcal{T})$ ikinci sayılabilir ve $A \subseteq X$ olsun. $A \setminus A^\star$ sayılabilir; özellikle A kümesinin ayrık noktalarının kümesi sayılabilir.

Kanıt. $\{T_n\}_{n < \omega}$ uzayımızın bir bazı olsun. Her $x \in A \setminus A^\star$ için $A \cap T_{n(x)}$ sayılabilir olacak biçimde bir $T_{n(x)}$ vardır. $M := \{n(x) \mid x \in A \setminus A^\star\}$ olsun.

$$\bigcup_{x \in A \setminus A^\star} (A \cap T_{n(x)})$$

kümesi sayılabilir çoklukta sayılabilir kümenin birleşimi olarak sayılabilir, dolayısıyla onun altkümesi olarak $A \setminus A^\star$ kümesi sayılabilir. $A^\star \subseteq A'$ olduğundan $A \setminus A' \subseteq A \setminus A^\star$, dolayısıyla $A \setminus A'$ kümesi de sayılabilir. ■

Önerme 3.3.4 $\mathbb{R}^n$ uzayımızın kusursuz altkümelerinin kümesinin gücü $\mathfrak{c}'$ -dir.

Kanıt. Uzayımızın kusursuz altkümelerinin kümesini $\mathcal{K}$ ile gösterelim. $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{T}^C$ olduğundan $\mathfrak{h}\mathcal{K} \leq \mathfrak{h}\mathcal{T}^C \leq \mathfrak{c}$. Diğer yandan her $\overline{B}_r(a)$ kapalı topu bir kusursuz kümedir ve a merkezli farklı yarı çaplı kapalı toplar farklı kümeler olduğundan $\mathfrak{h}\mathcal{K} \geq \mathfrak{c}$. Sonuçta $\mathfrak{h}\mathcal{K} = \mathfrak{c}$. ■

α bir sıra sayısı olmak üzere X kümesinin altkümelerinden oluşan bir $(A_\xi)_{\xi < \alpha}$ dizisi verilsin. Her $\xi < \eta < \alpha$ için $A_\xi \subseteq A_\eta$ ise dizimize **artan**, eğer $A_\xi \subset A_\eta$ ise **kesin artan** diyeceğiz. Her $\xi < \eta < \alpha$ için $A_\xi \supseteq A_\eta$

ise dizimize **azalan**, eğer $A_\xi \supset A_\eta$ ise **kesin azalan** diyeceğiz. Artan veya azalan dizilere kısaca **tekdüze (monoton)**, kesin azalan veya kesin artan dizilere ise **kesin tekdüze** diyeceğiz.

Teorem 3.3.5 Cantor . $(A_\xi)_{\xi < \alpha}$ dizisi X ayrılabilir metrik uzayımızın salt açık veya salt kapalı altkümelerinden oluşan kesin tekdüze bir dizi ise α sayılabilir.

Kanıt. $\{T_n\}_{n < \omega}$ uzayımızın bir bazı olsun. Biz herhangi bir α sıra sayısının tek olarak belirli bir λ limit sıra sayısı ve tek olarak belirli bir n doğal sayısı ile $\alpha = \lambda + n$ olarak yazılabileceğini biliyoruz. Bu durumda λ sayılabilirse elbette $\lambda + n$ de sayılabilir. Bu nedenle α 'nın bir limit sıra sayısı olması durumunu irdelemek yeterlidir. α bir limit sıra sayısı olsun.

$$(1) \quad A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_\xi \supset \cdots \quad (\xi < \alpha)$$

açık kümelerin kesin azalan bir dizisi olsun. Her $\xi < \alpha$ için $A_\xi \setminus A_{\xi+1} \neq \emptyset$ olduğundan bir $x_\xi \in A_\xi \setminus A_{\xi+1}$ seçebiliriz. Bazımızın $x_\xi \in T_n \subseteq A_\xi$ koşulunu sağlayan T_n öğeleri vardır. Dolayısıyla

$$N_\xi := \{n \in \omega \mid T_n \subseteq A_\xi \wedge T_n \setminus A_{\xi+1} \neq \emptyset\} \neq \emptyset.$$

$n(\xi) := \min N_\xi$ olsun. Böylece tanımlanan $n : \alpha \rightarrow \omega$ dönüşümünün birebir olduğunu gösterirsek α sayılabilir olur. Gerçekten de $\xi < \eta$ için tanım gereği bir yandan $T_{n(\eta)} \subseteq A_\eta \subseteq A_{\xi+1}$, diğer yandan yine tanım gereği $T_{n(\xi)} \not\subseteq A_{\xi+1}$, dolayısıyla $n(\xi) \neq n(\eta)$.

$$(2) \quad K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_\xi \supset \cdots \quad (\xi < \alpha)$$

kapalı kümelerin kesin azalan bir dizisi olsun. Her $\xi < \alpha$ için $K_\xi \setminus K_{\xi+1} \neq \emptyset$ olduğundan bir $x_\xi \in K_\xi \setminus K_{\xi+1}$ seçebiliriz. $K_{\xi+1}$ kümesinin tümleyeni açık olduğundan bazımızın

$$(*) \quad T_n \cap K_\xi \neq \emptyset \text{ ve } T_n \cap K_{\xi+1} = \emptyset$$

koşulunu sağlayan T_n öğeleri vardır. Yine $m(\xi)$, $(*)$ koşulunu sağlayan n doğal sayılarının en küçüğü olsun. $\xi < \eta$ için $K_\eta \subseteq K_{\xi+1}$ olduğundan $T_{m(\eta)} \cap K_{\xi+1} \neq \emptyset$, dolayısıyla $(*)$ ile $m(\eta) \neq m(\xi)$ olur. Böylece $m : \alpha \rightarrow \omega$ birebirdir, dolayısıyla α sayılabilir.

Kesin artan ve salt açık (kapalı) kümelerden oluşan bir dizide tümleyenlere geçtiğimizde kesin azalan ve salt kapalı(açık) kümelerden oluşan diziler elde ederiz. Bunların sayılabilirliğini ise kanıtladık. ■

Not 3.3.6 $\mathbb{R}$ gerçek sayıların bir $A \subseteq \mathbb{R}$ altkümesi, $\mathbb{R}$ 'deki $<$ doğal sıralmasına göre $(a_\xi)_{\xi < \alpha}$ olarak iyi sıralanmış, dd.

$$a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_\xi < \cdots \quad (\xi < \alpha)$$

olsun. $K_\xi := (-\infty, x_\xi]$ olmak üzere $(K_\xi)_{\xi < \alpha}$ salt kapalı kümelerin kesin artan bir dizisidir ve zorunlu olarak α , dolayısıyla A sayılabilir. Bu bilgiye daha önce de ulaştığımız. $\square$

Tanım 3.3.7 X herhangi bir topolojik uzay olsun. Tekrarlı teoremden her α sıra sayısı için tek olarak belirli $X^{(\alpha)} \subseteq X$ alt kümelerinin

$$\begin{aligned} X^{(0)} &= X, \\ X^{(\alpha+1)} &= (X^{(\alpha)})' \\ X^{(\lambda)} &= \bigcap_{\alpha < \lambda} X^{(\alpha)}, \quad \lambda \in \text{Lim} \end{aligned}$$

olacak biçimde varlıkları görülür. Bunlara X kümesinin **Cantor-Bendixon türevleri** denir.

Sonluötesi tümevarımla her α için $X^{(\alpha)}$ 'nın kapalı olduğu kolayca görülür. Gerçekten de $X^{(0)} = X$ kapalıdır. Yine $X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})'$ kapalıdır. λ bir limit sıra sayısı ve her $\alpha < \lambda$ için $X^{(\alpha)}$ kümesi kapalı ise $X^{(\lambda)}$ kümesi kapalı kümelerin arakesiti olarak kapalıdır. $X^{(\alpha+1)}$ kümesi $X^{(\alpha)}$ kümesinden bu kümenin ayrık noktaları atılarak elde edilir. Bu nedenle $(X^{(\alpha)})_{\alpha \in Srs}$ salt kapalı kümelerin bir azalan dizisidir. Artık aşağıdaki teoremi kanıtlamak kolaydır.

Teorem 3.3.8 Cantor-Bendixon. X ayrılabilir bir metrik uzay ve $Y \subseteq X$ kapalı bir altküme olsun

1. $\exists \alpha$ (α sayılabilir ve $\forall \beta \geq \alpha$ $X^{(\beta)} = X^{(\alpha)}$).
2. $\aleph X > \aleph_0 \implies \exists S, K$ (S sayılabilir, K kusursuz, $S \cap K = \emptyset$ ve $X = S \sqcup K$).
3. $\aleph Y > \aleph_0 \implies \exists S, K$ (S sayılabilir, K kusursuz, $S \cap K = \emptyset$ ve $Y = S \sqcup K$).

Kanıt. 1. Bir α için $X^{(\alpha+1)} = X^{(\alpha)}$ ise her $\beta \geq \alpha$ için $X^{(\beta)} = X^{(\alpha)}$ olacağı aşıkardır. Diğer yandan Srs bir öz sınıf ancak X bir küme olduğundan bu dizi durağanlaşmak zorundadır. $\alpha := \min\{\beta \mid X^{(\beta)} = X^{(\beta+1)}\}$ olsun. Bu durumda $(X^{(\xi)})_{\xi < \alpha+1}$ kapalı kümeleri kesin azalan bir dizisi olur ve (3.3.5)'ten α sayılabilirdir.

2. α az önce tanımladığımız sıra sayısı olmak üzere $K := X^{(\alpha)}$ ve $S := \bigcup_{\xi < \alpha} X^{(\xi)} \setminus X^{(\xi+1)}$ olsun. S sayılabilir çoklukta sayılabilir kümenin birleşimi olarak sayılabilir ve açıkça $K \cap S = \emptyset$ ve $X = S \sqcup K$. $\aleph X > \aleph S$ olduğundan $K \neq \emptyset$, K kapalı ve $K' = K$, dolayısıyla K kusursuzdur.

3. Y altuzay olarak ayrılabilir bir metrik uzay olarak istenilen türden bir parçalanmaya sahiptir. Y kapalı bir altküme olduğundan $(Y, d|_Y \times Y)$ uzayının kapalı kümeleri aynı zamanda X uzayında da kapalıdır. ■

Not 3.3.9 X herhangi bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ ise yine $A^{(0)} := A$, $A^{(\alpha+1)} = (A^{(\alpha)})'$ ve A kapalı olmayabileceğinden λ limit sıra sayısı için $A^{(\lambda)} := \bigcap_{1 \leq \alpha < \lambda} A^{(\alpha)}$ olarak tanımlarsak yine $A^{(1)} \supseteq A^{(2)} \supseteq A^{(3)} \supseteq \dots$ azalan kapalı kümeler dizisini elde ederiz. Elbette yine sayılabilir bir α ile her $\beta \geq \alpha$ için $A^{(\beta)} = A^{(\alpha)}$ olur. □

Teorem 3.3.10 $\mathbb{R}^n$ uzayında her kusursuz altkümenin gücü $\mathfrak{c}$ 'dir. Dolayısıyla $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı ise ya $\aleph K \leq \aleph_0$ ya da $\aleph K = \mathfrak{c}$.

Kanıt. $\mathbb{R}^n$ Polonya uzayı olduğundan her P kusursuz altkümesi kapalı bir altküme olarak yine bir Polonya uzayıdır. Dolayısıyla $\mathcal{C}$ Cantor uzayının bir kopyasını içerir. Bu nedenle $\aleph P \geq \mathfrak{c}$, diğer yandan $P \subseteq \mathbb{R}^n$ olduğundan $\aleph P \leq \mathfrak{c}$, sonuçta $\aleph P = \mathfrak{c}$ olur.

Şimdi $K \subseteq \mathbb{R}^n$ bir kapalı küme olsun. $\aleph K > \aleph_0$ ise Cantor-Bendixon Teoremi'nden dolayı $K = S \sqcup P$, S sayılabilir ve P kusursuz. Dolayısıyla $\aleph K = \aleph S + \aleph P = \aleph S + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. ■

3.4 CANTOR KÜMESİ

Cantor kümesini Örnek 2.5.12'te

$$C := \left\{ \sum_{n < \omega} \frac{x(n)}{3^{n+1}} \mid x \in {}^\omega \{0, 2\} \right\}$$

olarak tanımlamıştık. Şimdi Cantor kümesini ağaç yöntemiyle de elde edeceğiz. Bu yaklaşım bize bu küme hakkında daha ayrıntılı bilgiler verecektir. Kapalı aralıklardan oluşacak $\{I_s \mid s \in 2^{<\omega}\}$ ağacımızı yine $|s|$ uzunluğu üzerinden tümevarımla tanımlayacağız. Ağacımızın kökü $I_0 := [0, 1]$ kapalı aralığı olacaktır. I_s tanımlanmış ve $I_s = [a_s, b_s]$ olsun. Bu aralığı üç eşit aralığa bölüp ortadaki açık aralığı attıktan sonra kalan aralıklardan soldakini I_{s0} sağdakini I_{s1} olarak açıklayacağız, dd.

$$I_{s0} := [a_s, a_s + (b_s - a_s) \setminus 3]$$

ve

$$I_{s1} := [b_s - (b_s - a_s)/3, b_s].$$

$|s| = n$ olan tam 2^n tane I_s aralığımız olduğunu görmek kolaydır. Her $n < \omega$ için

$$C_n := \bigcup \{I_s \mid |s| = n\} \neq \emptyset$$

bir kompakt kümedir ve bunlar kesin azalan bir $C_0 \supset C_1 \supset \dots$ dizisi oluşturular.

$$C = \bigcap_{n < \omega} C_n$$

olduğunu görmeyi ödev olarak bırakıyoruz. Yine de ana fikri söyleyelim. Örneğin ilk adımda $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ açık aralığını atarız. Bu aralıktaki herhangi bir x gerçekte sayısının 3 tabanına göre açılımı *zorunlu olarak* $\frac{1}{3} + \text{diğer terimler}$ şeklindedir. İkinci adımda $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ ve $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ açık aralıklarını atarız. Bunların ilkindeki bir gerçekte sayı üçlü tabana göre yazılımda $\frac{1}{9} + \dots$, ikincisindeki ise $\frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \dots$ biçiminde *olmak zorundadır*. Tümevarımla üçlü tabana göre açılımlarında 1 kullanmak zorunda olduğumuz gerçekte sayıları attığımızı görmek kolaydır. Buna karşın Cantor kümemizin bir ögesi olan $\frac{7}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}$ sayısı $\frac{2}{3} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots$ olarak da yazılabilir.

$n \geq 1$ olmak üzere n . adımda uzunluğu $1/3^n$ olan 2^{n-1} ayırık açık aralık atarız. Bu nedenle attığımız açık aralıkların uzunlukları toplamı

$$\sum_{1 \leq n < \omega} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$$

olur. Atılan sayılabilir çoklukta ayırık açık aralıkların birleşimine A dersek bu Lebesgue ölçülebilir ve ölçüsü $\mu(A) = 1$ olduğundan

$$C = [0, 1] \setminus A \text{ kümesi de ölçülebilir ve ölçüsü } \mu(C) = 0 \text{ 'dır.}$$

Bunun bir sonucu ise Cantor kümesinin boştan farklı bir aralık içermeyeceğidir.

Tanım 3.4.1 $(X, \mathcal{T})$ herhangi bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $\partial A := \overline{A} \cap \overline{A}^c$ kümesine A kümesinin **sınırı** denir. $\overline{A}^c = X$ ise A bir **sınır kümesidir** ve $\overline{A}$ bir **sınır kümesi** ise A kümesi **hiçbir yerde yoğun değil** veya **her yerde seyrek** denir.

Tanım öncesi söylenenlerden dolayı

Cantor kümesi hiçbir yerde yoğun değildir.

Not 3.4.2 Bazı basit topolojik gerçekte ödev olarak bırakacağız.

$$\begin{aligned}
A \text{ bir sınır kümesidir} &\iff A^\circ = \emptyset \\
&\iff A \subseteq \partial A \iff A \subseteq \overline{A^c}.
\end{aligned}$$

Sınır kümelerinin altkümeleri de sınır kümeleridir. A her yerde seyrek $\iff (\overline{A})^\circ = \emptyset \iff$ Her açık U kümesi $A \cap U = \emptyset$ olacak biçimde bir açık $V \subseteq U$ kümesi içerir. Her yerde seyrek kümelerin altkümeleri de her yerde seyrek. A her yerde seyrekse $\overline{A}$ kümesi de her yerde seyrek. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ açık veya kapalı bir altkümeysen ∂A her yerde seyrek. $\mathbb{N}^n$ ve $\mathbb{Z}^n$ kümeleri ve sonlu altkümeler $\mathbb{R}^n$ 'de her yerde seyrek. $\square$

$\{I_s \mid s \in 2^{<\omega}\}$ ağacımızda kökten yukarı doğru tırmandığımızda boştan farklı kapalı aralıkların kesin azalan dizilerini elde ederiz. Sonsuz uzunlukta $\mathfrak{c}$ kadar tırmanış söz konusudur ve her farklı tırmanışla elde edilen kesin azalan kapalı aralıkların arakesitleri boştan farklı, birbirinden farklı ve $\subset C$ olduklarından bir kez de bu irdelemeyle $\mathfrak{h}C = \mathfrak{c}$ olduğu görülür.

Şimdiye kadar kapalı aralıklar, dolayısıyla bunların sonlu birleşimlerin kusursuz kümeler olduğunu öğrendik. Sıra ilk kez farklı tipten bir kusursuz küme tanımaya geldi:

C Cantor kümesi kusursuzdur.

$C \neq \emptyset$ ve kapalıdır. Geriye C kümesinin ayrık noktalarının olmadığını göstermek kalıyor. $C \stackrel{top}{=} \mathcal{C}$ olduğunu biliyoruz. Herhangi bir $x \in \mathcal{C}$ noktası için $\{x|n \mid n < \omega\}$ silindir ailesi x noktasının bir komşuluk bazıdır. Fakat her bir $x|n$ silindirinde $\mathcal{C}$ uzayımızın x 'ten farklı sonsuz tane noktası vardır. Dolayısıyla hiçbir x noktası ayrık olamaz.

$\mathcal{C}$ uzayına başvurmak istemezseniz bunu şöyle de görebilirsiniz. $c \in C$ keyfi verilsin. J ise c noktasını içeren herhangi bir açık aralık olsun. Eğer $(C \setminus \{c\}) \cap J \neq \emptyset$ olduğunu kanıtlarsak işimiz biter. Bir $s \in 2^{<\omega}$ 'yi $c \in I_s \subseteq J$ olacak biçimde seçebiliriz (ödev). I_{s0} ve I_{s1} dallarından biri ve ancak biri c ögesini içermez. c ögesini içermeyen daldan, buna I_{sj} diyelim, yukarı tırmanmaya devam edersek Cantor kümesinin J aralığında ve $\neq c$ olan noktalarına ulaşırız, dd. azalan ve boş olmayan kompakt kümelerin arakesiti olarak

$$C \cap I_{sj} = \bigcap_{n < \omega} (C_n \cap I_{sj}) \neq \emptyset,$$

dolayısıyla $C \cap J \neq \{c\}$.

$A, B \subseteq \mathbb{R}$ için

$$A + B := \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

$$A - B := \{a - b \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

olsun.

Önerme 3.4.3 $C + C = [0, 2]$ ve $C - C = [-1, 1]$.

Kanıt. Gerçekten de

$$\begin{aligned} C + C &= \left\{ \sum_{n < \omega} \frac{x(n)}{3^{n+1}} \mid x \in {}^\omega\{0, 2\} \right\} + \left\{ \sum_{n < \omega} \frac{y(n)}{3^{n+1}} \mid y \in {}^\omega\{0, 2\} \right\} \\ &= 2 \cdot \left\{ \sum_{n < \omega} \frac{1}{2} \frac{x(n) + y(n)}{3^{n+1}} \mid x, y \in {}^\omega\{0, 2\} \right\} \\ &= 2 \cdot \left\{ \sum_{n < \omega} \frac{z(n)}{3^{n+1}} \mid z \in {}^\omega\{0, 1, 2\} \right\} = 2 \cdot [0, 1] = [0, 2]. \end{aligned}$$

Diğer yandan kolayca görüleceği gibi $\sum_{n < \omega} \frac{2}{3^{n+1}} = 1$ olduğundan

$$1 - C = \left\{ \sum_{n < \omega} \frac{2 - x(n)}{3^{n+1}} \mid x \in {}^\omega\{0, 2\} \right\} = \left\{ \sum_{n < \omega} \frac{y(n)}{3^{n+1}} \mid y \in {}^\omega\{0, 2\} \right\} = C$$

olur. Böylece $C + C = C + (1 - C) = 1 + (C - C)$, dolayısıyla $C - C = -1 + (C + C) = -1 + [0, 2] = [-1, 1]$. ■

Önerme 3.4.4 $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ vektör uzayının $H \subseteq C$ koşulunu sağlayan bir Hamel bazı vardır. Elbette bu baz Lebesgue ölçülebilir ve ölçüsü sıfırdır.

Kanıt. $\mathcal{B} := \{B \subseteq C \mid B, \mathbb{Q}\text{-doğrusal bağımsız}\}$ kümesini $\subseteq$ ile kısmi sıralarsak Zorn Lemması'nın koşulları sağlanır. H bir maksimal öge olsun. $C \subseteq \langle H \rangle_{\mathbb{Q}}$ olduğunu savunuyoruz. $H \subseteq C$ olduğundan her $c \in C \setminus H$ için $c \in \langle H \rangle_{\mathbb{Q}}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $c \in C \setminus H$ keyfi verilsin. $H, \mathcal{B}$ 'de maksimal olduğundan $H \cup \{c\}$ doğrusal bağımlıdır. Bu durumda hepsi birden 0 olmayan $r_0, r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Q}$ ve $h_1, \dots, h_n \in H$ ögeleri

$$r_0 c + r_1 h_1 + \dots + r_n h_n = 0$$

olacak biçimde bulunabilir. $r_0 = 0$ olamaz; olsaydı $r_1 h_1 + \dots + r_n h_n = 0$ elde ederdik ve buradan da $h_1, \dots, h_n$ doğrusal bağımsız olduklarından $r_1 = \dots = r_n = 0$ elde ederdik ki bu çelişkidir! Öyleyse $r_0 \neq 0$ ve dolayısıyla

$$c = - \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{r_0} h_k \in \langle H \rangle_{\mathbb{Q}}$$

elde edilir. (3.4.3)'den dolayı her $x \in [-1, 1]$ için $x \in \langle H \rangle_{\mathbb{Q}}$ olur. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ için uygun bir $0 \neq n \in \mathbb{N}$ ile $\frac{1}{n}x \in [-1, 1]$ olacağından önce $\frac{1}{n}x \in \langle H \rangle_{\mathbb{Q}}$ ardından $x \in \langle H \rangle_{\mathbb{Q}}$ olur. Dolayısıyla $\mathbb{R} = \langle H \rangle_{\mathbb{Q}}$. ■

3.5 $\aleph_1$ VE $\aleph_1 + 1$ TOPOLOJİK UZAYLARI

Bazı beklenmedik topolojik gerçeklere örnek bulmakta oldukça işe yarayan bu iki uzayı biraz yakından tanıyacağız. Bu iki uzay da $\in$ bağıntısından kaynaklanan sıralama topolojisiyle ele alınacaklardır.

$(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathcal{T}^C$ bu uzayın kapalı kümelerinin kümesi, herhangi bir $x \in X$ içinse $\mathcal{K}_x$ bu noktanın komşuluklarının kümesi olmak üzere önce birkaç topolojik kavramı anımsatalım. Uzayımızın farklı x, y noktaları için daima *ayrık* açık U, V kümeleri $x \in U, y \in V$ olacak biçimde bulunabiliyorsa uzayımıza Hausdorff uzayı demiştik. Uzayımızın her kapalı K kümesini dışındaki herhangi bir $x \in X \setminus K$ noktasından **açık kümelerle ayırabiliyorsak**, dd. ayrık açık U, V kümeleri $K \subseteq U, x \in V$ olacak biçimde bulunabiliyorsa uzayımız **düzenlidir** diyeceğiz. Aşağıdaki önermelerin denkleğini göstermeyi ödev olarak bırakıyoruz:

1. X düzenlidir.
2. Her $x \in X$ ve $U \in \mathcal{K}_x$ için kapalı bir $V \in \mathcal{K}_x, V \subseteq U$ olacak biçimde vardır.
3. Her $x \in X$ noktasının kapalı komşuluklardan oluşan bir komşuluk bazı vardır.

Uzayımızda ayrık kapalı kümeleri açık kümelerle ayırabiliyorsak, dd. her ayrık $K, F \in \mathcal{T}^C$ için ayrık açık U, V kümeleri $K \subseteq U$ ve $F \subseteq V$ olacak biçimde bulunabiliyorsa uzayımız **normal** uzaydır denir. Her açık örtüsünün sayılabilir bir altörtüsü olan topolojik uzaylara **Lindelöf uzayları** denir. Önce her $\alpha \in Srs$ topolojik uzayı için geçerli iki önerme kanıtlayacağız.

Önerme 3.5.1 Her α topolojik uzayı 0-boyutlu Hausdorff uzaylarıdır. Özellikle her α uzayı düzenlidir.

Kanıt. $\xi, \eta \in \alpha, \xi \neq \eta$ ve $\xi < \eta$ olsun. $\xi \in (\leftarrow, \xi + 1) = (\leftarrow, \xi]$, $\eta \in (\xi, \rightarrow)$ ve $(\leftarrow, \xi] \cap (\xi, \rightarrow) = \emptyset$. Bu Hausdorffluğu kanıtlar. (II.11)'de her $\xi \in \alpha$ için $\{(\beta, \xi] \mid \beta < \xi\}$ ailesinin ξ için bir komşuluk bazı olduğunu görmüştük. $(\beta, \xi] = (\beta, \xi + 1)$ olduğundan $(\beta, \xi]$ açıktır. $\alpha \setminus (\beta, \xi] = (\leftarrow, \beta + 1) \cup (\xi, \alpha)$ kümesi de açıktır. Bu nedenle $\{(\beta, \xi] \mid \beta < \xi\}$ ailesi aynı anda açık ve kapalı olan kümelerden oluşan, ξ için, bir komşuluk bazıdır. Dolayısıyla α sıfır boyutludur. ■

Teorem 3.5.2 α uzayının kompakt olması için gerek ve yeter koşul α 'nın bir ardıl olmasıdır. Özellikle $\aleph_1 + 1$ kompakt ancak $\aleph_1$ kompakt değildir.

Kanıt. 1. α bir ardıl olsun. $\alpha < \omega$ ise kanıtlanacak bir şey yoktur; çünkü o zaman α sonlu bir ayrık uzay olarak kompakttır. Bu nedenle $\alpha \geq \omega$ olsun. Bu koşullarda (2.13.14)(5)'ten dolayı bir $0 < n < \omega$ ve bir λ limit sıra sayısı ile $\alpha = \lambda + n$ olur. α uzayımızın bir $\mathcal{U}$ açık örtüsü verilsin. Her $1 \leq k < n$ için $\lambda + k \in V_k$ olacak biçimde $V_k \in \mathcal{U}$ açık kümelerini seçelim. Şimdi

$$\beta_0 := \min\{\beta \mid \exists U_0 \in \mathcal{U} ((\beta, \lambda] \subseteq U_0)\}$$

olsun. $\beta_0 \neq 0$ ise

$$\beta_1 := \min\{\beta \mid \exists U_1 \in \mathcal{U} ((\beta, \beta_0] \subseteq U_1)\}$$

olsun. Bu işlem sonlu m adımda biter. Aksi halde kesin azalan bir $(\beta_n)_{n < \omega}$ dizisi elde ederdik ki bu olamaz! $\beta_m = 0$ olsun. Ayrıca bir $U_{m+1} \in \mathcal{U}$ açık kümesini $0 \in U_{m+1}$ olacak biçimde seçersek

$$\{U_0, \dots, U_{m+1}, V_1, \dots, V_{n-1}\}$$

sonlu bir altörtüdür. Sonuçta α kompakttır.

2. α bir limit sıra sayısı ve $\kappa := sd(\alpha)$ olsun. κ bir limit sıra sayısıdır ve $\kappa \geq \omega$. Şimdi α 'da kesin artan bir $(\alpha_\xi)_{\xi < \kappa}$ dizisini $\alpha = \sup \alpha_\xi$ olacak biçimde seçebiliriz

$$\mathcal{U} := \{(\alpha_\xi, \alpha_{\xi+1}] \mid \xi < \kappa\} \cup \{0\}$$

, α uzayımızın sonlu altörtüsü olmayan bir açık örtüsüdür. Dolayısıyla α kompakt değildir. ■

Önerme 3.5.3 *Topolojik uzaylarda sürekliliği belirlemek için ω -dizileri yetersizdir.*

Kanıt. Gerçekten de α , $sd(\alpha) > \omega$ olan herhangi bir sıra sayısı olsun. Örneğin $\alpha = \aleph_1$. Bu durumda $\alpha + 1$ uzayında bu uzayın $\alpha \in \alpha + 1$ noktasına yakınsayan hiçbir $(\beta_n)_{n < \omega}$ dizisinin olmadığını biliyoruz. Bu durumda α noktasında bir fonksiyonun sürekliliğini bu noktaya yakınsayan ω -dizileri ile belirlemek hiçbir anlam taşımaz. ■

Önerme 3.5.4 1. $\aleph_1$ birinci sayılabilir ancak ikinci sayılabilir değildir.

2. $\aleph_1 + 1$ ne birinci sayılabilir ne de ikinci!

3. α uzayının ayrılabilir olması için gerek ve yeter koşul sayılabilir olmasıdır.

Kanıt. 1. $\alpha \in \aleph_1$ keyfi verilsin. α sayılabilir ve $\{(\beta, \alpha] \mid \beta < \alpha\}$ ailesi α 'nın bir komşuluk bazı olduğundan $\aleph_1$ birinci sayılabilirdir. $\aleph_1$ sayılamaz çoklukta ayrık noktası olduğundan ikinci sayılabilir değildir.

2. $\aleph_1$ için söylenen aynı gerekçe ile $\aleph_1 + 1$ ikinci sayılabilir değildir. Şimdi ise bu uzayda $\aleph_1$ noktasının sayılabilir bir komşuluk bazı olmadığını göstereceğiz. $\aleph_1$ noktasının herhangi bir $\mathcal{B}$ komşuluk bazı verilsin. Genellikten bir şey kaybetmeden bu bazın başlangıç noktaları birbirinden farklı $(\beta, \aleph_1]$ tipinde aralıklardan oluştuğunu varsayabiliriz. Bu durumda $B = \{(\beta, \aleph_1] \mid (\beta, \aleph_1] \in \mathcal{B}\}$ dersek $\aleph_1 B = \mathcal{B}$ olur. Diğer yandan $\mathcal{B}$ baz olduğundan $\sup B = \aleph_1$ olmak zorundadır. Bu ise B kümesinin $\aleph_1$ 'de sondaş, dolayısıyla $\aleph_1 = sd(\aleph_1) \leq \aleph_1 B \leq \aleph_1$ olması demektir. Bu bize $\aleph_1 B = \aleph_1$ eşitliğini verir. $\aleph_1 + 1$ birinci sayılabilir değildir.

3. α sayılabilirse ayrılabilir olduğu apaçıktır. α sayılabilir değilse $\alpha \geq \aleph_1$ olacağından en az $\aleph_1$ ayrık noktası olacaktır. Her yoğun altküme ayrık noktalarıda içereceğinden gücü $\geq \aleph_1$, dolayısıyla sayılamaz olur. ■

Bazı topolojik gerçekleri kullanırsak işler kolaylaşır. Örneğin her kompakt Hausdorff uzayı normaldir, dolayısıyla ω ve $\aleph_1$ uzayları normaldir. Ancak bu bilgileri kullanmadan aşağıdaki teoremi kanıtlayacağız.

Theorem 3.5.5 $\omega, \aleph_1$ ve $\aleph_1 + 1$ uzayları normal uzaydırlar.

Kanıt. ω ayrık uzay olduğundan normaldir. $\Omega = \aleph_1$ veya $\Omega = \aleph_1 + 1$ olmak üzere $A, B \subseteq \Omega$ iki ayrık kapalı küme olsun. Bunlardan en az birinin sınırlı olduğunu savunuyoruz.

$\Omega = \aleph_1$ olsun. A, B kümelerinin her ikisi de sınırsız olsaydı bunlar kasız olacaklarından $A \cap B \neq \emptyset$ olurdu ki bu bu kümelerin ayrık olmalarıyla çelişir. Şimdi $\Omega = \aleph_1 + 1$ olsun. A, B kümelerinin her ikisi de $\aleph_1$ kümesini içeremez. $\aleph_1 \notin A$ ise A sınırlı olmak zorundadır, aksi halde $\sup A = \aleph_1$ ve A kapalı olduğundan $\aleph_1 \in A$ olurdu!

Sonuçta A, B kümelerinden en az biri, gbk. A kümesi sınırlıdır. $\alpha_0 := \sup A \in A$ olsun. $B^c = \Omega \setminus B$ açık ve $A \subseteq B^c$ olduğundan $(\xi, \alpha_0] \subseteq B^c$ olacak biçimde α_0 noktasının komşulukları vardır. Bu koşulu sağlayan $\xi \in A$ öğeleri yoksa bu $\alpha_0 = \min A$ ve $A = \{\alpha_0\}$ demektir ki bu durumda $U = A$ ve $V = A^c$ kümeleri A ve B kümelerini ayıran açık kümelerdir. Eğer $(\xi, \alpha_0] \subseteq B^c$ koşulunu sağlayan $\xi \in A$ öğeleri varsa α_1 bunların minimumu olsun. Benzer biçimde $(\xi, \alpha_1] \subseteq B^c$ koşulunu sağlayan $\xi \in A$ öğeleri varsa α_2 bunların minimumu olsun. Kesin azalan bir $(\alpha_n)_{n < \omega}$ dizisi olmayacağından sonlu adımda $\alpha_n = \min A$ öğesine ulaşırız. Bir $\lambda < \alpha_n$ sıra sayısı $(\lambda, \alpha_n] \subseteq B^c$ olacak biçide vardır. $(\xi, \eta]$ tipindeki aralıklar hem açık hem kapalı olduklarından

$$K := (\lambda, \alpha_n] \cup (\alpha_n, \alpha_{n-1}] \cup \dots \cup (\alpha_1, \alpha_0]$$

kümesi hem açık hem kapalıdır. K, K^c açık kümeleri A, B kümelerini ayırır.

■

Not 3.5.6 Topolojiyle ilgilenenler için iki not düşelim: $\aleph_1 \times (\aleph_1 + 1)$ çarpım uzayı normal değildir. Dolayısıyla normal uzayların çarpım uzaylarının normal olması gerekmez. Ayrıca $X := (\omega + 1) \times (\aleph_1 + 1)$ uzayı iki kompakt Hausdorff uzayının çarpım uzayı olarak normaldir. Ancak bu uzayın $Y := X \setminus \{(\omega, \aleph_1)\}$ altuzayı normal değildir. Dolayısıyla bir normal uzayın bir altuzayının normal olması gerekmez. □

Önerme 3.5.7 (X, d) bir metrik uzay olsun. Her sürekli $f : \aleph_1 + 1 \rightarrow X$ fonksiyonu sonunda sabittir, dd. $f|_{(\alpha, \aleph_1 + 1)}$ sabit olacak biçimde bir $\alpha < \aleph_1$ vardır. Dolayısıyla f en fazla sayılabilir farklı değerler alabilir.

Kamıt. f fonksiyonu $\aleph_1$ noktasında sürekli olduğundan her $n < \omega$ için bir $\alpha_n < \aleph_1$ sıra sayısı her $\xi \in (\alpha_n, \aleph_1 + 1)$ için $d(f(\xi), f(\aleph_1)) < 2^{-n}$ olacak biçimde bulunabilir. $\alpha := \sup_{n < \omega} \alpha_n$ olsun. $sd(\aleph_1) = \aleph_1$ olduğundan $\alpha < \aleph_1$. Şimdi $\alpha < \xi < \aleph_1 + 1$ keyfi verilsin. Her $n < \omega$ için $d(f(\xi), f(\aleph_1)) < 2^{-n}$ olduğundan $f(\xi) = f(\aleph_1)$ olur. Demek ki fonksiyonumuz $(\alpha, \aleph_1 + 1)$ aralığında sabit $f(\aleph_1)$ değerini alır. α sayılabilir olduğundan $f[\aleph_1 + 1] = f[\alpha] \cup \{f(\aleph_1)\}$ sayılabilir. ■

3.6 ÖLÇÜ UZAYLARI

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \leq b$ olmak üzere $I := \langle a, b \rangle$, $\mathbb{R}$ 'de uç noktaların dahil olması ve olmaması söz konusu olabilen dört farklı aralığın ortak gösterimi olsun. Öklid zamanında bile $I = \langle a, b \rangle$ doğru parçalarına uzunlukları dediğimiz bir $\mu_1(I) = b - a$ gerçekte sayı, düzlemdeki bazı A geometrik kümelerine alanları dediğimiz bir $\mu_2(A)$ gerçekte sayı, özellikle $D = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle$ dikdörtgenine $\mu_2(D) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$ gerçekte sayı ve $\mathbb{R}^3$ uzayımızda ise bazı geometrik V kümelerine hacimleri dediğimiz bir $\mu_3(V)$ gerçekte sayı, özellikle $K = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \langle a_3, b_3 \rangle$ kutusuna $\mu_3(K) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot (b_3 - a_3)$ sayısı karşılık getirilmiştir. Okulda öğrendiğimiz ve sağduyunun da istediği, herhangi iki şekli $\mathbb{R}$ 'de öteleme, düzlem ve uzayda ise öteleme ve döndürmelerle üst üste getirebiliyorsak bu şekillerin ölçülerinin birbirine eşit olması gerektiğidir. Ötelemelerin ve döndürmelerin ortak özelliği noktalar arasındaki uzaklıkları korumasıdır. Uzaklıklardan metrik uzaylarda söz edebildiğimiz için bu durumu bir kavramla adlandıralım.

Tanım 3.6.1 $(X, d), (X', d')$ iki metrik uzay ve $f : X \rightleftarrows X'$ bir tameşleme olsun. Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$ ise bu iki uzay **metrik-**

*sel eşyapılıdır (izometriktir) denir. f dönüşümüne ise bir **metriksel tameşlemedir** veya **izometridir** denir. Bu durumu $(X, d) \cong (X', d')$ veya kısaca $X \stackrel{m}{=} X'$ ile göstereyim.*

$X \stackrel{m}{=} X'$ durumunda bazen X, X' metrik uzayları **metriksel eşittir** diyeceğiz.

Tanım 3.6.2 $(X, d), (X', d')$ iki metrik uzay ve $2 \leq n < \omega$ olsun. Aşağıdaki koşul sağlandığında bu iki uzay **n parçalı metriksel eşittir (izometriktir)** diyecek ve budurumu $X \stackrel{m,n}{=} X'$ ile göstereceğiz:

X uzayının $\{X_1, \dots, X_n\}$ ve X' uzayının $\{X'_1, \dots, X'_n\}$ parçalanışları

$$X_1 \stackrel{m}{=} X'_1, \dots, X_n \stackrel{m}{=} X'_n$$

olacak biçimde vardır.

Not 3.6.3 Parçalı eşitlik kavramının eşitliğin bütün özelliklerini sağlaması gerekmez. Örneğin $\stackrel{m,2}{=}$ geçişli değildir. Öklid metriğiyle alınan $\mathbb{R}$ metrik uzayımızın $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 2, 5, 6\}$ ve $C = \{1, 5, 9, 13\}$ kümeleri için $A = \{1, 2\} \sqcup \{3, 4\}$ ve $B = \{1, 2\} \sqcup \{5, 6\}$ parçalanışlarından dolayı $A \stackrel{m,2}{=} B$, $B = \{1, 5\} \sqcup \{2, 6\}$ ve $C = \{1, 5\} \sqcup \{9, 13\}$ parçalanışlarından dolayı $B \stackrel{m,2}{=} C$. Ancak $A \stackrel{m,2}{=} C$ olmadığı gibi $A \stackrel{m,3}{=} C$ de değildir. Örneğin Sierpinski [53] söz konusu kümeler en az 8 ögeli olmak koşuluyla aşağıdaki problemin çözümünü bilmediğini ve zor olduğunu belirtmektedir: $\mathbb{R}$ 'de A ve C kümeleri $A \stackrel{m,3}{=} C$ olarak verildiğinde daima bir B kümesi $A \stackrel{m,2}{=} B$ ve $B \stackrel{m,2}{=} C$ olacak biçimde var mıdır? $\square$

İntegrasyon kuramı yardımıyla basit geometrik kümeler dışında mümkün olduğu kadar çok A kümesine bir $\mu(A)$ ölçüsü karşılık getirilmeye çalışıldı. Yukarıda belirtilenler dışında bir ölçüden beklenen, $A_1, \dots, A_n$ ölçüleri olan ayrık kümelerse $A = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$ kümesinin de ölçülebilir ve $\mu(A) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$ olmasıdır. Sonradan yetersiz bulunan Riemann integral kavramını genelleştirirken Lebesgue bu son adımı sonlu toplamsallıktan sayılabilir toplamsallığa aktarmıştır. Lebesgue'in çözülmek üzere ortaya koyduğu **ölçü problemi** şudur:

1. Her sınırlı $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesine bir $\mu_n(A) \geq 0$ gerçek sayısı karşılık getirilecektir.
2. $\{A_k\}_{k < \omega}$ sınırlı altkümelerin, birleşimleri de sınırlı olan ayrık ailesi ise

$$\mu_n\left(\bigsqcup_{k < \omega} A_k\right) = \sum_{k < \omega} \mu_n(A_k).$$

3. $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ sınırlı ve $A \stackrel{m}{=} B$ ise $\mu_n(A) = \mu_n(B)$.

4. $I = \langle 0, 1 \rangle$ ise $\mu_n(I^n) = 1$.

Hausdorff'u [30] izleyerek bu problemin hiçbir n için çözümünün olmadığını göstereceğiz. Bu koşullar altında sınırlı $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ kümeleri için $A \stackrel{m,k}{=} B$ ise $\mu_n(A) = \mu_n(B)$ olduğu aşıkardır. Diğer yandan problemimizin ilk üç koşulunu sağlayan μ_n verildiğinde her pozitif p gerçekte sayı için $p\mu_n$ de problemin ilk üç koşulunu sağlar. Bundan kurtulmak için bir normlama koşulu olarak (4) getirilmiştir.

Teorem 3.6.4 (Hausdorff [30]). *Ölçü probleminin hiçbir n için çözümü yoktur.*

Kanıt. 1. $n \geq 2$ olsun. Önce ölçü probleminin n için çözümü varsa $n - 1$ için de çözümü olduğunu görelim. μ_n problemimizin $\mathbb{R}^n$ için çözümü olsun. Her sınırlı $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ kümesi için $A \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^n$ silindiri de sınırlıdır ve

$$\mu_{n-1}(A) := \mu_n(A \times [0, 1])$$

ile tanımlanan μ_{n-1} ise problemimizin $\mathbb{R}^{n-1}$ için çözümüdür (ödev). Böylece sonlu adımda problemin bir $n \geq 2$ için çözümü varsa $n = 1$ için de çözümü olduğuna ulaşırız. Dolayısıyla savımızı kanıtlamak için problemin $n = 1$ için çözümü olmadığını göstermek yeterlidir.

2. Her $x \in \mathbb{R}$ için $I = [0, 1)$ aralığında *tek* olarak belirli bir $x^* \in I$ sayısı $x - x^* \in \mathbb{Z}$ olacak biçimde vardır. Her $A \subseteq \mathbb{R}$ için

$$A^* := \{x^* \in I \mid \exists x \in A (x - x^* \in \mathbb{Z})\}$$

olsun. I 'da bir toplama işlemini $x \oplus y := (x + y)^*$ olarak açıklayalım. Daha açık bir yazılımla

$$x \oplus y := \begin{cases} x + y, & x + y < 1. \\ x + y - 1, & x + y \geq 1. \end{cases}$$

Şimdi $X \subseteq I$ herhangi bir altküme ve α ise $0 < \alpha < 1$ olan bir irrasyonel sayı olsun. $X_1 = X \cap [0, 1 - \alpha)$ ve $X_2 := X \cap [1 - \alpha, 1)$ olsun. $X = X_1 \sqcup X_2$ bir ayrık birleşimdir. $Y := \alpha \oplus X$ olsun.

$$Y_1 := \alpha \oplus X_1 = \alpha + X_1 = Y \cap [\alpha, 1) \text{ ve}$$

$$Y_2 := \alpha \oplus X_2 = \alpha - 1 + X_2$$

olmak üzere $Y = Y_1 \sqcup Y_2$ bir ayrık birleşimdir. Y_k 'ler X_k 'lerden öteleme-
lerle elde edildiklerinden $X_k \stackrel{m}{=} Y_k, k = 1, 2$. Dolayısıyla $X \stackrel{m,2}{=} Y$, bu-
nun doğrudan sonucu olarak, eğer ölçü problemimizin $\mathbb{R}$ 'de μ_1 gibi bir
çözümü varsa

$$\mu_1(X) = \mu_1(Y) = \mu_1(\alpha \oplus X)$$

olur. Toparlarsak aşağıdaki önermeyi kanıtladık:

$$(m, 2) \quad \forall X \subseteq I \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad (0 < \alpha < 1 \implies X \stackrel{m,2}{=} \alpha \oplus X)$$

Şimdi $\mathbb{R}$ 'de bir denklik bağıntısını her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$x \stackrel{\alpha}{\sim} y : \iff x - y \in \alpha\mathbb{Z} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = y + \alpha k$$

olarak açıklayalım. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ ögesinin denklik sınıfı

$$P_x := x + \alpha\mathbb{Z} = \{x + \alpha k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

'tir. Seçme Aksiyomuna göre her denklik sınıfından tek bir öge içeren bir
 $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesi vardır. Elbette $\{P_x \mid x \in A\}$ ailesi $\mathbb{R}$ 'nin bir parçasıdır.
 $A_0 := A^* \subseteq I$ ve her $k \in \mathbb{Z}$ için $A_k := \alpha k \oplus A_0$ olsun. $(m, 2)$ 'den hemen

$$\dots \stackrel{m,2}{=} A_{-1} \stackrel{m,2}{=} A_0 \stackrel{m,2}{=} A_1 \stackrel{m,2}{=} \dots$$

elde edilir. Bu nedenle her $k \in \mathbb{Z}$ için $\mu_1(A_k) = \mu_1(A_0) =: p$ elde edilir.

Tanım gereği her $k \in \mathbb{Z}$ için $A_k \subseteq I$. $\{A_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ayrıktır. Gerçekten de
 $z \in A_i \cap A_j$ ve $i \neq j$ olsun. Dolayısıyla $x, y \in A$ ögeleri $x + \alpha i = z = y + \alpha j$
olacak biçimde vardır. Buradan $x - y = \alpha(j - i)$ olacağından $x \stackrel{\alpha}{\sim} y$ olur ki
bu olamaz! Çünkü A kümesi her denklik sınıfından bir aday içermektedir.
Diğer yandan $I = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_k$. Gerçekten de $u \in I$ keyfi verilsin. $\exists! x (u \in P_x)$.
 $A \cap P_x = \{w\}$ ise bir $k \in \mathbb{Z}$ ile $u = w + \alpha k$ olacağından $u \in A_k$ olur.

Şimdi μ_1 ölçü problemimizin $\mathbb{R}$ 'de bir çözümü olsun. Her $k \in \mathbb{Z}$ için
 $\mu_1(A_k) = p \in [0, +\infty)$ ve (4)'ten dolayı ise

$$1 = \mu_1(I) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p$$

olması gerekir ki bu olamaz. ■

Not 3.6.5 Düzlemde herhangi bir çember sayılabilir sonsuz çoklukta
metriksel eşit parçalara ayrılabilir. Savımızı bir tek çember için kanıtlamak
yeterlidir. Kanıtın ana düşüncesi çok basittir: Merkezi $(0, 1/2\pi)$ ve yarı
çapı $1/2\pi$ olan C çemberini alalım. Bu çemberin çevre uzunluğu $= 1$
olur. Şimdi x -ekseni olan $\mathbb{R}$ doğrumuzu bu çembere, pozitif eksen saatin

ters, negatif eksen saat yönünde olmak üzere saracağız. $\alpha \in \mathbb{R}$ irrasyonel, $0 < \alpha < 1$ ve P_x kanıttaki küme olsun. Bu sarma işleminde $x \in \mathbb{R}$ sayısı çember üzerinde p_x noktasına giderse, $0 < \alpha < 1$ irrasyonel olduğundan, P_x denklik sınıfının öğeleri çember üzerinde birbirinden farklı ve p_x noktasının sürekli α yayı kadar ötelenmesiyle elde edilen noktalara gider. A kümesi kanıttaki küme olmak üzere $A_k := \alpha k + A (k \in \mathbb{Z})$ kümeleri çember üzerinde sayılabilir çoklukta metriksel eşit ayrık kümelerdir. Çemberin özel geometrik yapısından dolayı kolayca elde ettiğimiz bu parçalanışın benzerini aralıklar için elde etmek oldukça zordur. Teoremimizde $[0, 1]$ aralığı sayılabilir çoklukta $\stackrel{m,2}{=}$ olan parçalara ayrılmışlardır. Herhangi bir $\langle a, b \rangle$ aralığını sayılabilir çoklukta metriksel eşit ayrık parçalara bölme problemi Neumann [45]'te çözmüştür. $\square$

Ölçü problemi bu şekliyle bir çözüme sahip olmadığına göre problemi değiştirmek gerekecektir. Önce ölçü probleminde (1), (3), (4) koşullarını koruyup (2) koşulunu zayıflatalım:

$$(2)^* \quad A, B \subseteq \mathbb{R}^n \text{ sınırlı ve ayrık} \text{ sâlar } \mu_n(A \sqcup B) = \mu_n(A) + \mu_n(B)$$

olsun. Yeni ölçü problemimiz (1), (2)*, (3), (4) olacaktır. Bu problemin de bir $n > 1$ için çözümü varsa, daha önce verdiğimiz gerekçelerle $n - 1$ için de çözümü vardır. Tersten okursak bu problemin bir m için çözümü yoksa her $n \geq m$ için çözümü yoktur. Bu problemin $n \geq 3$ için çözümü olmadığını [30]'de Hausdorff kanıtladı. Bunun için problemin $\mathbb{R}^3$ 'te çözümü olmadığını göstermek yeterlidir. Önce $\mathbb{R}^3$ 'te ölçü probleminin çözümü varsa $S^3 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ 'de

$$(4)^* \quad \mu_3(S) = p > 0$$

olmak üzere (1), (2)*, (3), (4)* probleminin bir çözümü olduğunu görmek kolaydır. Öyleyse (1), (2)*, (3), (4)* probleminin bir çözümü olmadığını göstermek yeterlidir. Hausdorff S^3 küre yüzeyinden sayılabilir bir Q kümesi çıkardıktan sonra kalan kısmı A, B, C gibi üç ayrık parçaya böldü, öyle ki bir yandan bunlar birbirine metriksel eşitken aynı zamanda $A \stackrel{m}{=} B \sqcup C$. Bu durumda S^3 uzayının ölçüsü $p > 0$ olaksa A kümesinin ölçüsü bir yandan $p/3$ diğer yandan $2p/3$ olmalıdır. Bu olamaz! Banach ve Tarski yeni ölçü probleminin $n = 1, 2$ için bir çözümü olduğunu kanıtladılar. Ayrıca

$$n \geq 3; A, B \subseteq \mathbb{R}^n \text{ sınırlı ve } A^\circ \neq \emptyset, B^\circ \neq \emptyset \text{ ise bir } k \in \mathbb{N} \text{ ile } A \stackrel{m,k}{=} B$$

olduğunu kanıtladılar [1]. Bu ise iç nokta içeren herhangi iki sınırlı kümenin problemimizi çözen her μ_n ölçüsüne göre aynı ölçüye sahip olmaları, dd. $\mu_n(A) = \mu_n(B)$ olması demektir. Diğer yandan elbette bu kümeler ayrık

olsun olmasın $\mu_n(A \cup B) = \mu_n(A)$, eğer ayrıca ayrıksalar

$$\mu_n(A) = \mu_n(A \sqcup B) = \mu_n(A) + \mu_n(B) = 2\mu_n(A).$$

Eğer (4)'ten vazgeçersek yegâne çözüm $\mu_n = 0$ olur. (4)'ten vazgeçmezsek çözüm yoktur. Bu sonuç $n = 3$ 'ten başlamak üzere Öklid uzayının karakterinin tümüyle değiştiği gibi algılanabilir. Ancak burada bir gariplik olmadığını, bunun nedeninin $\mathbb{R}^n$ uzayının, uzaklıkları koruyan dönüşümlerinin O^n grubunun cebirsel yapısından kaynakladığını Neumann [47]'te kanıtlamıştır. Tüm olay $n \geq 3$ için O^n grubunun iki öge tarafından üretilmiş bir serbest alt grubunun olmasından kaynaklanmaktadır.

Eğer $\mathbb{R}^n$ 'de çalışıyorsak (2), (3) ve (4)'ten vazgeçmek istemeyiz. Öyleyse (1)'i değiştirmek zorundayız; tüm sınırlı kümelerin ölçülebilir olması isteginden vazgeçmeliyiz. (2)'nin kısıntısız geçerli olması için ölçülebilir kümelerimizin sayılabilir birleşimlerinin de ölçülebilir olmasını isteyeceğiz. Ayrıca bazı büyük kümelerin de ölçülebilir ve ölçülerinin de $+\infty$ olmasına izin vereceğiz. Herhangi bir X kümesinde çalışmak istiyorsak (3) ve (4) koşullarından vazgeçmeliyiz. Son olarak bir $A \subseteq X$ ölçülebilirse A^c tümleyeninin de ölçülebilir olmasını istiyoruz. Bu bizi aşağıdaki kavrama götürür.

Tanım 3.6.6 $X \neq \emptyset$ ve $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ olmak üzere

1. $\forall A \in \mathcal{A} \quad A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$ ve
2. $\forall \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \quad (\aleph \mathcal{B} \leq \omega \implies \bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A})$

ise $\mathcal{A}$, X 'te bir σ -**cebiri**dir denir.

Not 3.6.7 X üzerinde bir σ -cebiri $\mathcal{A}$ verilsin.

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$. Gerçekten de $\emptyset = \bigcup \emptyset \in \mathcal{A}$ ve $X = \emptyset^c \in \mathcal{A}$.
2. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ için $\aleph \mathcal{B} \leq \omega$ ise $\bigcap \mathcal{B} \in \mathcal{A}$. Gerçekten de $\mathcal{B}^C = \{B^c \mid B \in \mathcal{B}\}$ olmak üzere $\mathcal{B}^C \subseteq \mathcal{A}$ ve $\bigcap \mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}^C \in \mathcal{A}$.
3. $A, B \in \mathcal{A}$ ise $A \setminus B \in \mathcal{A}$. $A, B^c \in \mathcal{A}$ olduğundan ikinci notumuzla $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.
4. Her $X \neq \emptyset$ için $\mathcal{P}(X)$, X üzerinde bir σ -cebiri.
5. X sayılamaz bir küme ise

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq X \mid \aleph A \leq \omega \vee \aleph A^c \leq \omega\}$$

X üzerinde bir σ -cebiri.

6. Herhangi bir $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ailesi verildiğinde X üzerinde $\mathcal{A}$ ailesini içeren σ -cebirlerinin arakesiti $\sigma(\mathcal{A})$ ile göstereceğimiz bir σ -cebiridir. Buna **$\mathcal{A}$ 'nın ürettiği σ -cebiri** denir.
7. $X := \aleph_1 + 1$ ve $\mathcal{K} := \{K \mid K \text{ kasız}\}$ olsun. (2.18.14)'da sayılabilir çoklukta kasızın arakesitinin de bir kasız olduğunu öğrendik. Şimdi

$$\mathcal{M} := \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \exists K \in \mathcal{K} (K \subseteq A \vee K \subseteq A^c)\}$$

olsun. $\mathcal{M}$ 'nin X üzerinde bir σ -cebiri olduğunu savunuyoruz. Her A için $(A^c)^c = A$ olduğundan $A \in \mathcal{M} \iff A^c \in \mathcal{M}$. Şimdi $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ ve $\aleph \mathcal{N} \leq \omega$ olsun. İki durum söz konusudur: a) $\exists N \in \mathcal{N} \exists K \in \mathcal{K} (K \subseteq N)$. Bu durumda $K \subseteq \bigcup \mathcal{N}$ olacağından tanım gereği $\bigcup \mathcal{N} \in \mathcal{M}$ olur. b) $\forall N \in \mathcal{N} \exists K_N \in \mathcal{K} (K_N \subseteq N^c)$. Bu durumda $\bigcap \{K_N \mid N \in \mathcal{N}\} \subseteq \bigcap \mathcal{N}^c = \bigcup \mathcal{N}$ olur. $\bigcap \{K_N \mid N \in \mathcal{N}\} \in \mathcal{K}$ olduğundan $\bigcup \mathcal{N} \in \mathcal{M}$ olur. $\square$

Tanım 3.6.8 $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayı verildiğinde $\sigma(\mathcal{T})$ 'ye bu topolojik uzayın **Borel cebiri** denir ve $\mathfrak{B}\mathfrak{r}(\mathcal{T})$ veya $\mathfrak{B}\mathfrak{r}(X)$ ile gösterilir. Bu σ -cebirinin öğelerine bu topolojik uzayın **Borel kümeleri** denir. $\mathbb{R}^n$ doğal topolojiyle alındığında Borel cebirini kısaca $\mathfrak{B}\mathfrak{r}^n$ ile göstereceğiz.

6. notta bir $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ailesinin ürettiği $\sigma(\mathcal{A})$ cebirinin

$$\sigma(\mathcal{A}) := \bigcap \{\mathcal{C} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} \text{ ve } \mathcal{C}, X\text{'te bir } \sigma\text{-cebiri}\}$$

olarak tanımlandığını anımsatalım. Bu $\sigma(\mathcal{A})$ 'nın bir dışsal tanımıdır, $\sigma(\mathcal{A})$ 'nin öğelerinin neler olduğunu ve $\mathcal{A}$ 'nın öğelerinden nasıl kazanıldığını söylemez. Bir sonraki teoremimizde $\sigma(\mathcal{A})$ 'nın içsel belirlemesi verilecektir.

$(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayı verildiğinde elbette açık ve kapalı kümeler Borel kümeleri olacaktır. Kapalı kümelerin sayılabilir birleşimleri, bu tip kümelere **F_σ kümeleri** denir, Borel kümeleri olduğu gibi, sayılabilir çoklukta açık kümelerin arakesitleri de, bu tip kümelere **G_δ kümeleri** denir, Borel kümeleridir. Bu işlemleri sürdürüp örneğin sayılabilir çoklukta F_σ kümelerinin arakesitlerini alarak elde edilen **$F_{\sigma\delta}$ kümeleri**, sayılabilir çoklukta G_δ kümelerinin birleşimini alarak elde edilen **$G_{\delta\sigma}$ kümeleri** hep Borel kümeleridir. Benzeri işlemlerin devam edeceği apaçıktır. Olaya genel durumda bakalım.

Şimdi $X \neq \emptyset$ ve $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ verilsin. X üzerindeki herhangi bir $\mathcal{R}$ σ -cebiri $\mathcal{A}$ 'yı içerirse elbette $\mathcal{A}^C$ 'yi de içerir. $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^C$ olsun. $\mathcal{R}$ aynı zamanda $\mathcal{A}_0$ 'ın sayılabilir çoklukta öğelerinin birleşimlerini ve onların tümleyenlerini de içerir. Bu kümelerin ailesini $\mathcal{A}_1$ ile gösterelim. Bu biçimde $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_\alpha, \dots$ tekrarlı tanımlamayla tanımlanacaklardır.

Bir $X \neq \emptyset$ kümesi ve bir $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ailesi verilsin. Her α sıra sayısı için tekrarlı tanımlamayla $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \mathcal{P}(X)$ aileleri aşağıdaki gibi tanımlanabilirler:

1. $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^C$.
2. $\mathcal{A}_{\alpha+1} = \{\bigcup \mathcal{B} \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_\alpha \wedge \mathfrak{h}\mathcal{B} \leq \omega\} \cup \{(\bigcup \mathcal{B})^c \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_\alpha \wedge \mathfrak{h}\mathcal{B} \leq \omega\}$.
3. $\mathcal{A}_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{A}_\alpha$, $\lambda \in \text{Lim}$.

$(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in Srs}$ artan bir dizidir. Her α için $\mathcal{A}_\alpha \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. Srs bir öz sınıf ve $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ bir küme olduğundan $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in Srs}$ dizisi kesin artan olamaz. Bir α için $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}_{\alpha+1}$ ise tanımlardan dolayı her $\beta \geq \alpha$ için $\mathcal{A}_\beta = \mathcal{A}_\alpha$ olduğu aşıkardır. Bu tanımlarla X kümesi ve $\mathcal{A}$ ailesi nasıl verilirse verilsin $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in Srs}$ dizisinin en geç $\aleph_1$ 'den itibaren durağanlaştığını kanıtlayacağız.

Teorem 3.6.9 $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup_{\alpha < \aleph_1} \mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}_{\aleph_1}$.

Kanıt. $\mathcal{A}_* := \bigcup_{\alpha < \aleph_1} \mathcal{A}_\alpha$ diyelim. Savunduğumuz $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_*$ olduğudur.

1. $\mathcal{A}_* \subseteq \sigma(\mathcal{A})$: Sonluötesi tümevarımla her $\alpha < \aleph_1$ için $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ olduğunu göstereceğiz. $\mathcal{A}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ olduğu apaçıktır. Şimdi her $\beta < \alpha$ için $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ kanıtlanmış olsun. α bir limit sıra sayısıysa tanım gereği $\mathcal{A}_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{A}_\beta \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ olur. α bir ardılsa, örneğin $\alpha = \beta + 1$ ise $\mathcal{A}_\beta \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ olduğundan $\mathcal{A}_\beta$ 'nin öğelerinin sayılabilir birleşimleriyle bunların tümleyenleri de $\sigma(\mathcal{A})$ 'da olacağından $\mathcal{A}_\alpha \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ olur. Sonuçta $\mathcal{A}_* \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ elde edilir.

2. $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}_*$: Bunun içinse $\mathcal{A}_*$ 'ın X üzerinde bir σ -cebiri olduğunu kanıtlamak yeterlidir. $A \in \mathcal{A}_*$ ise bir $\alpha < \aleph_1$ ile $A \in \mathcal{A}_\alpha$, dolayısıyla önce $A^c \in \mathcal{A}_\alpha$ ardından $A^c \in \mathcal{A}_*$ olur. Her $n < \omega$ için $A_n \in \mathcal{A}_*$ kümeleri verilsinler. Her $n < \omega$ için $A_n \in \mathcal{A}_{\alpha(n)}$ olacak biçimde bir $\alpha(n)$ sıra sayısı vardır. $\beta := \sup_{n < \omega} \alpha(n)$ olsun. $\beta < \aleph_1$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda $\beta + 1 < \aleph_1$ ve $\bigcup_{n < \omega} A_n \in \mathcal{A}_{\beta+1}$, dolayısıyla $\bigcup_{n < \omega} A_n \in \mathcal{A}_*$ ve işimiz biter. ■

Teorem 3.6.10 Her $1 \leq n < \omega$ için $\mathfrak{h}\mathfrak{B}\mathfrak{r}^n = \mathfrak{c}$. Bunun sonucu olarak $\mathbb{R}^n$ uzayında Borel kümesi olmayan kümeler vardır; hem de $!2^{\mathfrak{c}}$ kadar.

Kanıt. $\mathbb{R}^n$ uzayımızın topolojisi $\mathcal{T}$ olmak üzere (3.3.2)'den $\mathfrak{h}\mathcal{T} = \mathfrak{h}\mathcal{T}^C = \mathfrak{c}$. Bir önceki teoremde $\mathcal{A}$ olarak $\mathcal{T}$ alacağız. Sonluötesi tümevarımla her $\alpha < \aleph_1$ için $\mathfrak{h}\mathcal{A}_\alpha = \mathfrak{c}$ olduğunu göstereceğiz. $\mathfrak{h}\mathcal{A}_0 = \mathfrak{c}$ aşıkardır. Şimdi $\alpha < \aleph_1$ ve her $\beta < \alpha$ için $\mathfrak{h}\mathcal{A}_\beta = \mathfrak{c}$ kanıtlanmış olsun. α bir limit sıra sayısı ise

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{h}\mathcal{A}_0 \leq \mathfrak{h}\mathcal{A}_\alpha = \mathfrak{h}\left(\bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{A}_\beta\right) \leq \mathfrak{h}\alpha * \mathfrak{c} \leq \aleph_0 * \mathfrak{c} = \mathfrak{c}.$$

Şimdi α bir ardıl örneğin $\alpha = \beta + 1$ olsun. $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}\mathcal{A}_\beta \leq \mathfrak{d}\mathcal{A}_\alpha$ ve $\mathcal{A}_\alpha$ 'nın tanımından $\mathfrak{d}\mathcal{A}_\alpha \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} \dot{+} \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c} \dot{+} \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ olduğundan $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}\mathcal{A}_\alpha$ olur. $\aleph_1 \leq \mathfrak{c}$ olduğundan

$$\mathfrak{c} \leq \mathfrak{d}\mathcal{A}_* = \mathfrak{d}\left(\bigcup_{\alpha < \aleph_1} \mathcal{A}_\alpha\right) \leq \aleph_1 * \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

olur ve işimiz biter. ■

Tanım 3.6.11 (X, d) metrik uzayının bir A altkümesi sayılabilir çoklukta her yerde seyrek kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa **birinci kategoriden** (veya **cılız**), aksi halde **ikinci kategoriden** (veya **dolgun**) denir. X uzayının cılız kümelerinin kümesini $\mathcal{M}$, eğer $X = \mathbb{R}^n$ ise $\mathcal{M}^n$ ile gösterelim.

Tanım gereği cılız kümelerin altkümeleri de cılızdır. Diğer yandan sayılabilir çoklukta cılız kümenin birleşimi de cılızdır. $\mathcal{M}$ neredeyse bir σ -tam idealdir. Ancak biz öz ideallerle çalışıyoruz, dd. $X \notin \mathcal{M}$ olmalı. Bunu herhangi bir metrik uzayda bekleyemeyiz. Ancak tam metrik uzaylarda doğrudur.

Teorem 3.6.12 Baire . (X, d) boştan farklı bir tam metrik uzay olsun.

1. Her cılız Y altkümesi bir sınır kümesidir, dd. Y^c , X 'te yoğundur.
2. $\emptyset \neq Y \subseteq X$ ve Y açıksa cılız değildir.
3. Her $n < \omega$ için Y_n açık ve yoğun ise $\bigcap_{n < \omega} Y_n$ de yoğundur.
4. Her $n < \omega$ için K_n kapalı ve $K_n^\circ = \emptyset$ ise $(\bigcup_{n < \omega} K_n)^\circ = \emptyset$.

Sonuç: Boştan farklı tam metrik uzaylar cılız değildirler, dd. ikinci kategoridendirler.

Kanıt. 1. Her $n < \omega$ için S_n bir seyrek küme ve $Y = \bigcup_{n < \omega} S_n$ olsun. $Y^\circ = \emptyset$ olduğunu görmeliyiz. Bunun için Y kümesinin hiçbir açık topu içermeyeceğini göstermek yeterlidir. Her açık top bir kapalı top içerdiğinden hiçbir kapalı B topunu içermeyeceğini, dd. $B \setminus Y \neq \emptyset$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$B_0 = B$ uzayımızda herhangi bir kapalı top olsun. Tekrarlı tanımlamayla azalan bir $(B_n)_{n < \omega}$ kapalı toplar dizisi tanımlayacağız. B_n tanımlanmış olsun. S_{n+1} her yerde seyrek olduğundan bir kapalı B_{n+1} topu

$$B_{n+1} \subseteq B_n \setminus S_{n+1} \text{ ve } d(B_{n+1}) < 1/(n+1)$$

olacak biçimde bulunabilir. (3.1.7)'den dolayı $\exists p \in \bigcap_{n < \omega} B_n$.

$$\bigcap_{n < \omega} B_n \subseteq \bigcap_{1 \leq n < \omega} S_n^c = \left(\bigcup_{1 \leq n < \omega} S_n \right)^c = Y^c$$

olduğundan $p \in B_0 \setminus Y$. Sonuç hemen buradan çıkar: Her cıız kümenin tümleyeni X 'te yoğun olduğundan, boştan farklı tam metrik uzaylar cıız olamaz!

2. Boştan farklı bir açık küme cıız olsaydı içerisine düşen kapalı toplar da cıız olurdu. Ancak her kapalı top da bir tam metrik uzay olduğundan bu (1) ile çelişir.

3. Y_n açık ve yoğun ise $S_n := Y_n^c$ kapalı ve her yerde seyrek.

$$\bigcap_{n < \omega} Y_n = \bigcap_{n < \omega} S_n^c = \left(\bigcup_{n < \omega} S_n \right)^c$$

olduğundan $\bigcap_{n < \omega} Y_n$ arakesiti bir cıız kümenin tümleyeni olarak (1)'den dolayı yoğundur.

4. Her n için K_n kapalı ve $K_n^\circ = \emptyset$ ise K_n her yerde seyrek olduğundan $C := \bigcup_{n < \omega} K_n$ cıız ve (1)'den dolayı C bir sınır kümesi ve $C^\circ = \emptyset$. ■

$\mathbb{R}^n$ tam metrik uzay olduğundan cıız değildir, dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ uzayının $\mathcal{M}^n$ cıız kümeleri bir σ -tam idealdir. Bu idealin yanısıra $\mathbb{R}^n$ uzayında bir başka ideal, Lebesgue anlamından sıfır ölçülü kümelerin $\mathcal{S}^n$ ideali de çok önemlidir. $\mathbb{R}^n$ uzayında yarıçapı 1 olan bir topun hacmine b_n dersek yarıçapı r olan bir topun hacmi $= b_n r^n$. Ara bilgi olarak sunulan bu bilgi aşağıdaki tanımı anlamak için önemlidir, artık onu unutabiliriz.

Tanım 3.6.13 $N \subseteq \mathbb{R}^n$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık N kümesinin açık toplardan oluşan sayılabilir bir $\{B_{r_k}(x_k)\}$ örtüsü

$$\sum_{k < \omega} r_k^n < \varepsilon$$

olacak biçimde bulunabiliyorsa N (**Lebesgue**) **sıfır kümesidir** denir. $\mathbb{R}^n$ uzayındaki Lebesgue anlamında sıfır kümelerinin kümesini $\mathcal{S}^n$ ile gösterebiliriz.

Bir b_n faktörü o kadar önemli olmadığından tanım öncesi yapılan açıklamayla N kümesinin sıfır kümesi olması için gvyk. her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bu kümeyi hacimleri toplamı $< \varepsilon$ olan sayılabilir açık topla örtebilmektir. Tanım gereği bir sıfır kümesinin altkümeleri de sıfır kümesidir. Ayrıca sayılabilir çoklukta sıfır kümelerinin birleşimi de bir sıfır kümesidir. Diğer yandan $\mathbb{R}^n$ kesinlikle sıfır kümesi değildir. Bu nedenle $\mathcal{S}^n$ bir σ -tam idealdir. $\mathcal{M}^n$ ve $\mathcal{S}^n$ σ -tam idealler olduklarından $A \in \mathcal{S}^n \implies A^c \notin \mathcal{S}^n$ ve $B \in \mathcal{M}^n \implies B^c \notin \mathcal{M}^n$.

Her sayılabilir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi $\mathcal{M}^n \cap \mathcal{S}^n$ 'dedir. Yine C Cantor kümesinin de $\mathcal{M}^n \cap \mathcal{S}^n$ 'de olduğunu öğrendik. Ancak bu genel durum değildir.

Teorem 3.6.14 $\mathbb{R}^n$ uzayında yoğun bir G_δ kümesi olan bir G kümesi $G \in \mathcal{S}^n$ ve $G^c \in \mathcal{M}^n$ olacak biçimde bulunabilir.

Kanıt. $\mathbb{Q}^n$ kümesi sayılabilir ve $\mathbb{R}^n$ 'de yoğundur. $\mathbb{Q}^n$ kümesini $\{q_k \mid k < \omega\}$ olarak iyi sıralayalım. Her $m < \omega$ için B_{mk} ile q_k merkezli ve $r_{mk} = 2^{-(m+k)/n}$ yarıçaplı açık topu gösterelim.

$$G_m := \bigcup_{k < \omega} B_{mk} \quad \text{ve} \quad G := \bigcap_{m < \omega} G_m$$

olsun. Her G_m bir açık küme olduğundan G bir G_δ kümesidir. $\mathbb{Q}^n \subseteq G$ olduğundan G yoğundur.

$G \in \mathcal{S}^n$: Gerçekten de $\varepsilon > 0$ keyfi verilsin. m doğal sayısını $2^{-(m-1)} < \varepsilon$ olacak biçimde seçelim. $G \subseteq G_m$ ve

$$\sum_{k < \omega} r_{mk}^n = 2^{-(m-1)} < \varepsilon.$$

Dolayısıyla $G \in \mathcal{S}^n$.

G_m kümesi açık ve yoğun olduğundan G_m^c kümesi kapalı ve her yerde seyrektir. Dolayısıyla $G^c = \bigcup_{m < \omega} G_m^c$ bir cılız kümedir. ■

Tanım 3.6.15 1. $\mathcal{L}^n := \sigma(\mathfrak{B}^n \cup \mathcal{S}^n)$ 'ye $\mathbb{R}^n$ 'de **Lebesgue ölçülebilir** kümelerin σ -cebiri,

2. $\mathcal{BR}^n := \sigma(\mathfrak{B}^n \cup \mathcal{M}^n)$ 'ye $\mathbb{R}^n$ 'de **Baire özellikli** kümelerin σ -cebiri denir.

Şimdi kanıtsız olarak üç teorem vereceğiz. İlk ikisi tanım ve küme işlemleri dışında hiçbir bilgi gerektirmedigi için kanıtlarını ödev olarak bırakacağız. Üçüncü teoremi ise Gerçek Analiz kitaplarından ödünç alacağız.

Teorem 3.6.16 $\mathcal{L}^n$ ve $\mathcal{BR}^n$ aşağıdaki gibi de kazanılabilir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n &= \{A \Delta N \mid A \in \mathfrak{B}^n \wedge N \in \mathcal{S}^n\}. \\ \mathcal{BR}^n &= \{A \Delta C \mid A \in \mathfrak{B}^n \wedge C \in \mathcal{M}^n\}. \end{aligned}$$

Teorem 3.6.17 $\mathcal{BR}^n = \{A \Delta C \mid A, \mathbb{R}^n \text{ 'de açık ve } C \in \mathcal{M}^n\}$.

Teorem 3.6.18 Her $A \in \mathcal{L}^n$ için sırasıyla F_σ ve G_δ kümeleri olan F ve G kümeleri $F \subseteq A \subseteq G$ ve $G \setminus A \in \mathcal{S}^n$ olacak biçimde bulunabilir. Özellikle

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n &= \{G \Delta N \mid G \subseteq \mathbb{R}^n \text{ bir } G_\delta \text{ kümesi ve } N \in \mathcal{S}^n\}. \\ &= \{F \Delta N \mid F \subseteq \mathbb{R}^n \text{ bir } F_\sigma \text{ kümesi ve } N \in \mathcal{S}^n\}. \end{aligned}$$

Teorem 3.6.19 $A \in \mathcal{L}^n \setminus \mathcal{S}^n$ veya $A \in \mathcal{BR}^n \setminus \mathcal{M}^n$ ise $K \subseteq A$ olacak biçimde bir kusursuz K kümesi vardır.

Kanıt. 1. $A \in \mathcal{L}^n \setminus \mathcal{S}^n$ olsun. Bir önceki teoremden bir F_σ kümesi olan F kümesi $F \subseteq A$ ve $A \setminus F \in \mathcal{S}^n$ olacak biçimde seçilebilir. $F \notin \mathcal{S}^n$, aksi halde $F \cup A \setminus F = A \in \mathcal{S}^n$ olurdu! $\mathbb{R}^n$ 'de kapalı F_n kümeleri $F = \bigcup_{n < \omega} F_n$ olacak biçimde seçilsinler. Bu F_n kümelerinden en az biri sayılamaz olmak zorundadır. Aksi halde F sayılabilir ve dolayısıyla bir sıfır kümesi olurdu. F_n sayılamazsa (3.3.8)'den F_n kusursuz bir K kümesi içerir. Böylece $K \subseteq F_n \subseteq F \subseteq A$.

Şimdi $A \in \mathcal{BR}^n \setminus \mathcal{M}^n$ verilsin. (3.6.17)'den bir açık U ve cılız C ile $A = U \setminus C$ olur. C cılız kümesi S_n seyrek kümelerinin $C = \bigcup_{n < \omega} S_n$ birleşimi olsun. Yine ağaç yöntemiyle boştan farklı açık kümelerin bir $\{U_s \subseteq U \mid s \in 2^{<\omega}\}$ ailesini tanımlayacağız.

$U_\emptyset \subseteq U$ açık kümesini $\overline{U_\emptyset} \subseteq U \setminus S_0$ olacak biçimde seçelim. Tekrarlı tanımlamada her $s \in 2^{<\mathbb{N}}$ için seçilecek $U_{s \wedge 0}, U_{s \wedge 1}$ açık kümelerinin açık toplar olmasını ve aşağıdaki koşulu sağlamasını isteyeceğiz

$$(T) \quad \overline{U_{s \wedge 0}} \cap \overline{U_{s \wedge 1}} = \emptyset, \text{ ve } \overline{U_{s \wedge 0}} \cup \overline{U_{s \wedge 1}} \subseteq U_s \setminus S_{|s|}.$$

Şimdi U_s tanımlanmış olsun. $\overline{S_n}$ kapalı ve U_s açık olduğundan (3.6.12)'den dolayı $U_s \setminus \overline{S_n} \neq \emptyset$ olduğundan (T) sağlanacak biçimde $U_{s \wedge 0}, U_{s \wedge 1}$ bulunabilir.

Her $F_n := \bigcup \{\overline{U_s} \mid |s| = n\}$, sonlu sayıda kompakt kümenin birleşimi olarak kompakttır ve $F := \bigcap_{n < \omega} F_n$ de kompakttır. Tanım gereği $F \subset U$ ve her $n < \omega$ için $F_n \cap S_n = \emptyset$. Böylece $F \subseteq U \setminus S \subseteq A$. Kanıtın ilk kısmında olduğu gibi F kümesinin sayılamaz olduğunu gösterirsek işimiz biter. Bunu ise defalarca yaptığımız gibi kolayca görürüz.

Her $x \in 2^{\mathbb{N}}$ için $F_x := \bigcap_{n < \omega} \overline{U_{x|n}}$ olsun. Şunları görmeyi ödev olarak bırakıyoruz: $F_x \neq \emptyset$, $\{F_x \mid x \in 2^{\mathbb{N}}\}$ ayrık ailedir, dolayısıyla herhangi bir $c : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow F$ ($x \rightsquigarrow c(x) \in F_x$) seçen fonksiyonu birebirdir. Bu nedenle $\mathfrak{c} = \aleph_2^{\mathbb{N}} \leq \aleph F$ ve işimiz biter. ■

Teorem 3.6.20 $\mathbb{R}^n$ uzayında, ne kendisinin ne de tümleyeninin kusursuz altkümeleri olmayan altkümeler vardır.

Kanıt. Bu teorem Problem 4.0.32 olarak çözüldü. Bu tip kümelere **Bernstein kümeleri** denir. ■

Teorem 3.6.21 Bernstein kümeleri Lebesgue ölçülemezler ve Baire özelliğine de sahip değildirler.

Kanıt. $B \subseteq \mathbb{R}^n$ bir Bernstein kümesi olsun. B ve B^c kusursuz altkümeler içermezler. Şimdi $B \in \mathcal{L}^n$ olduğunu varsayalım. (3.6.19)'dan dolayı $B, B^c \in$

$\mathcal{S}^n$, dolayısıyla $B \cup B^c = \mathbb{R}^n \in \mathcal{S}^n$ olur ki bu bir çelişkidir. $B \in \mathcal{BR}^n$ olamayacağı benzer biçimde gösterilir. ■

Tanım 3.6.22 X kümesinde bir $\mathcal{A}$ σ -cebiri verilsin. Aşağıdaki koşullar sağlandığında $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0 + \infty]$ dönüşümüne bir **ölçü** ve $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne bir ölçü uzayı denir:

$$(1) \quad \mu(\emptyset) = 0.$$

$$(2) \quad \{A_n \mid n < \omega\} \subseteq \mathcal{A} \text{ bir ayrık aileyse } \mu(\bigcup_{n < \omega} A_n) = \sum_{n < \omega} \mu(A_n).$$

Eğer ayrıca X üzerinde bir $\mathcal{T}$ topolojisi verilmiş ve $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$ ise bu ölçünün $(X, \mathcal{T})$ uzayındaki **desteğinden (taşıyıcısından)** anlaşılan

$$des\mu := X \setminus \bigcup \{U \in \mathcal{T} \mid \mu(U) = 0\}$$

kapalı kümesidir.

Örnek 3.6.23 Dieudonné ölçüsü : Not 3.6.7(7)'de $X = \aleph_1 + 1$ topolojik uzayında, o zaman $\mathcal{M}$ ile gösterdiğimiz, şimdi $\mathcal{A}$ ile göstermeyi yeğleyeceğimiz bir

$$\mathcal{A} := \{A \mid \exists \text{ kasız } K (K \subseteq A \vee K \subseteq A^c)\}$$

σ -cebiri tanımlamıştık. Şimdi bir $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \{0, 1\}$ ölçüsü tanımlayacağız. Bir $A \in \mathcal{A}$ kümesi kasız bir $K \subseteq A$ içeriyorsa $\mu(A) = 1$, aksi halde $\mu(A) = 0$ olarak açıklansın. $\mu(\emptyset) = 0$ olduğu apaçıktır. Şimdi ayrık $\{A_n \mid n < \omega\} \subseteq \mathcal{A}$ ailesi verilsin. Hiçbir A_n bir kasız K içermezse tanım gereği her $n < \omega$ için A_n^c bir kasız K_n içerir ve $\mu(A_n) = 0$. (2.18.14)'ten dolayı $K^* := \bigcap_{n < \omega} K_n$ da kasızdır ve $(\bigcup_{n < \omega} A_n)^c \supseteq K^*$ olduğundan tanım gereği

$$\mu(\bigcup_{n < \omega} A_n) = 0 = \sum_{n < \omega} \mu(A_n)$$

olur. Şimdi en az bir n için A_n bir kasız K içersin. Bu durumda $m \neq n$ için A_m kasız C içeremez, aksi halde $A_m \cap A_n \neq \emptyset$ olurdu. Demek ki bu durumda her $m \neq n$ için $\mu(A_m) = 0$, $\mu(A_n) = 1$ ve böylece $K \subseteq \bigcup_{n < \omega} A_n$ olduğundan yine

$$\mu(\bigcup_{k < \omega} A_k) = 1 = \sum_{k < \omega} \mu(A_k)$$

olur. μ bir ölçüdür.

Şimdi $\mathfrak{B}\mathfrak{r} \subseteq \mathcal{A}$ olduğunu savunuyoruz. Aslında eşitlik söz konusudur, ancak bu bize gerekmiyor. Bunun için $\aleph_1 + 1$ 'nin her kapalı altkümesinin $\mathcal{A}$ 'da olduğunu görmek yeterlidir. $U(\aleph_1)$, $\aleph_1$ 'in herhangi bir komşuğu ise bir $\beta < \aleph_1$ ile $(\beta, \aleph_1] \subseteq U(\aleph_1)$ olacağından $U(\aleph_1), U^c(\aleph_1) \in \mathcal{A}$ olur. Şimdi

$K \subseteq \aleph_1 + 1$ kapalı bir altküme olsun. İki durum söz konusudur. i) $\aleph_1 \notin K$ veya $\aleph_1 \in K$, ancak ayrık noktadır. Bu durumda $\exists [\beta, \aleph_1) \subseteq K^c$ ve $[\beta, \aleph_1)$ kasız olduğundan $K \in \mathcal{A}$. ii) $\aleph_1 \in K$, K 'nin ayrık noktası değil. Bu durumda bir $\beta < \aleph_1$ ile $(\beta, \aleph_1] \subseteq K$, dolayısıyla $K \in \mathcal{A}$.

$des\mu = ?$ $\aleph_1$ noktasının ölçülebilir her komşuluğunun ölçüsü 1, ve $\aleph_1$ noktasının bir komşuluğunu içermeyen her kümenin ölçüsü ise 0 olduğundan $des\mu = \{\aleph_1\}$. Bu kümenin ölçüsü tanım gereği $\mu(des\mu) = \mu(\{\aleph_1\}) = 0$, dolayısıyla $\mu(X \setminus des\mu) = 1$ olur. Genelde herhangi bir ν ölçüsü için beklenen ve çoğu zaman doğru olan $\nu(X \setminus des\nu) = 0$ olmasıdır. Diedonné ölçüsü buna bir karşı örnek oluşturur. $\square$

Gerçek Analiz derslerinde bir $\mu_n : \mathcal{L}^n \rightarrow [0, +\infty]$ ölçüsünün

- (i) $\forall A \in \mathcal{L}^n \forall x \in \mathbb{R}^n \mu_n(x + A) = \mu_n(A)$.
- (ii) Her $-\infty < a_k \leq b_k < +\infty$ için

$$\mu_n\left(\prod_{k=1}^n \langle a_k, b_k \rangle\right) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k).$$

- (iii) $\forall A \in \mathcal{L}^n \mu_n(A) = 0 \iff A \in \mathcal{S}^n$.

olacak biçimde varlığı kanıtlanır. Bu kuşkusuz analizdeki en önemli ölçüdür ve **Lebesgue ölçüsü** olarak adlandırılır.

Önerme 3.6.24 $X \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue ölçülebilir ve $\mu_1(X) > 0$ ise X kümesinin Lebesgue ölçülemeyen bir altkümesi vardır.

Kanıt. 1. $\mathbb{R}$ 'de bir denklik bağıntısını her $x, y \in \mathbb{R}$ için $x \sim y :\iff x - y \in \mathbb{Q}$ olarak açıklayalım. 3.6.4 Hausdorff Teoremi'nin kanıtına benzer biçimde Seçme Aksiyomu yardımıyla her denklik sınıfından bir tek aday seçerek $A \subseteq [0, 1]$ kümesini oluşturalım. Kolayca görüleceği gibi her $p, q \in \mathbb{Q}$ için $p \neq q$ ise $(p + A) \cap (q + A) = \emptyset$ ve $\mathbb{R} = \coprod_{p \in \mathbb{Q}} (p + A)$. Biz A kümesinin Lebesgue ölçülemez olduğunu savunuyoruz. A kümesinin Lebesgue ölçülebilir olduğunu varsayalım. $A \subseteq [0, 1]$ olduğundan $0 \leq \mu_1(A) \leq 1$ olmalıdır. Önce $\mu_1(A) = 0$ olamayacağını görelim. Her $p \in \mathbb{Q}$ için $\mu_1(p + A) = \mu_1(A)$ olduğundan $\mu_1(A) = 0$ bağıntısı bize

$$\mu_1(\mathbb{R}) = \mu_1\left(\coprod_{p \in \mathbb{Q}} (p + A)\right) = \sum_{p \in \mathbb{Q}} \mu_1(p + A) = \sum_{p \in \mathbb{Q}} \mu_1(A) = 0$$

çelişkisini verir. $\sigma := \mu_1(A) > 0$ da olamaz. Olsaydı $\coprod_{p \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} (p + A) \subseteq [0, 2]$ bağıntısıyla

$$+\infty = \sum_{p \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} \sigma = \sum_{p \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} \mu_1(p + A) \leq 2$$

çelişkisi elde edilirdi. Sonuçta A kümesi Lebesgue ölçülemez.

2. A kümesi yukarıdaki Lebesgue ölçülemez kümemiz olmak üzere $p \in \mathbb{Q}$ için kısaca $A_p := p + A$ yazalım. X Lebesgue ölçülebilir kümemizi $X = \coprod_{p \in \mathbb{Q}} X \cap A_p$ ayrık birleşimi olarak yazalım. Biz $X \cap A_p$ kümelerinden en az birinin Lebesgue ölçülemez olduğunu savunuyoruz. Bir an için hepsinin Lebesgue ölçülebilir olduğunu varsayalım. $\mu_1(X) > 0$ olduğundan en az bir p_0 için $\mu_1(X \cap A_{p_0}) > 0$ olmalıdır. $\{A_p \mid p \in \mathbb{Q}\}$ ayrık aile ve $X \cap A_p \subseteq A_p$ olduğundan $\{p + X \cap A_{p_0} \mid p \in \mathbb{Q}\}$ ailesi de ayrıktır. Her $p \in \mathbb{Q}$ için $\mu_1(p + X \cap A_{p_0}) = \mu_1(X \cap A_{p_0})$ olduğundan

$$\begin{aligned} +\infty &= \sum_{p \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \mu_1(X \cap A_{p_0}) = \mu_1 \left(\coprod_{p \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} (p + X \cap A_{p_0}) \right) \leq \\ &\leq \mu_1 \left(\coprod_{p \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} (p + A_{p_0}) \right) = \mu_1 \left(\coprod_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} (q + A) \right) \leq \mu_1[0, 2] = 2 \end{aligned}$$

çelişkisini elde ederiz. ■

Teorem 3.6.25 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue ölçülebilir ve $\mu_n(X) > 0$ ise $\mathfrak{d}X = \mathfrak{c}$.

Kanıt. (3.6.18) ile F bir F_σ ve N bir sıfır kümesi olmak üzere $X = F \cup N$. Dolayısıyla $\mu_n(F) = \mu_n(X) > 0$. F kümesi sayılabilir çoklukta kapalı C_n kümelerin birleşimidir. $F_n := C_0 \cup \dots \cup C_n$ kümeleri de kapalı kümelerdir. $(F_n)_{n < \omega}$ artan bir dizi ve $F = \bigcup_{n < \omega} F_n$ olduğundan $\mu_n(F) = \lim_{m < \omega} \mu_n(F_m) > 0$.

m doğal sayısını $\mu_n(F_m) > 0$ olacak biçimde seçelim. (3.3.8)'den dolayı $F_m = P_m \sqcup S_m$, P_m kusursuz ve S_m sayılabilir. F_m ve S_m Lebesgue ölçülebilir olduklarından P_m de Lebesgue ölçülebilir ve $0 < \mu_n(F_m) = \mu_n(P_m) + \mu_n(S_m) = \mu_n(P_m)$. Dolayısıyla $P_m \neq \emptyset$ ve (3.3.4) ile $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}P_m \leq \mathfrak{d}F \leq \mathfrak{c}$ ve işimiz biter. ■



4

PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Problem 4.0.1 *Sonlu kümelerde olduğu gibi sonsuz kümeleri de, çoklukları üzerinden, anlamlı biçimde çift ve tek kümeler olarak sınıflandırabilir miyiz? Yanıtınızı gerekçelendiriniz.*

Yanıtımız “Hayır!”. Kümemiz X ve çokluğu κ olsun. Tek matematiksel tanım “Bir μ çokluk sayısı ile $\kappa = 2 * \mu$ ise çift, $\kappa = 2 * \mu + 1$ ise tektir.” olabildi. Ancak κ sonsuz olduğundan $\kappa = 2 * \mu$ ise aynı zamanda $\kappa = 2 * \mu + 1$ ve $\kappa = 2 * \mu + 1$ ise aynı zamanda $\kappa = 2 * \mu$ olur. Sonuç olarak sonsuz kümeler anlamlı biçimde tek ve çift olarak sınıflandırılmazlar. $\square$

Problem 4.0.2 1. X bir sonsuz küme, $\kappa = \aleph X$ ve μ , $1 \leq \mu \leq \kappa$ koşulunu sağlayan herhangi bir çokluk sayısı olmak üzere X kümesinin bir $\mathcal{P}$ parçalanışının her $A \in \mathcal{P}$ için $\aleph A = \mu$ olacak biçimde bulunabileceğini gösteriniz¹

2. $\aleph X \geq 2$ ise sabit noktası olmayan $f : X \rightleftharpoons X$ tameşlemelerinin varlığını kanıtlayınız.

3. $\aleph(X \setminus A) \geq 2$ koşulunu sağlayan her $A \subset X$ altkümesi için sabit noktalarının kümesi A olan bir $f : X \rightarrow X$ tameşlemesinin olduğunu kanıtlayınız.

¹Özellikle her sonsuz kümenin her bir parçası iki ögeli olan bir parçalanışı vardır. Şimdi bu basit gerçeği bile, kümeler kuramından bildiğimiz sıradan bilgilerle kanıtlayamayız.

1. $\mathfrak{h}(\mu \times X) = \mu * \kappa = \kappa$ olduğundan bir $f : \mu \times X \rightleftharpoons X$ tameşlemesi vardır. Her $x \in X$ için $A_x := f[\mu \times \{x\}]$ alırsak $\mathcal{P} := \{A_x \mid x \in X\}$ parçalanışı işimizi görür.

2. $n = \mathfrak{h}X \geq 2$ sonlu ise X kümesinin öğelerini $x_0, \dots, x_{n-1}$ olarak sıralayabiliriz. Bu durumda $x_i \rightsquigarrow x_{i+1}$ ($i = 0, \dots, n-2$) ve $x_{n-1} \rightsquigarrow x_0$ ile tanımlanan $f : X \rightarrow X$ bir tameşlemedir ve sabit noktası yoktur.

Şimdi $\kappa := \mathfrak{h}X \geq \aleph_0$ olsun.

Birinci Çözüm: $\kappa + \kappa = \kappa$ olduğundan bir $\psi : \kappa \times \{0\} \sqcup \kappa \times \{1\} \rightleftharpoons X$ tameşlemesi vardır. $Y := \psi[\kappa \times \{0\}]$ ve $Z := \psi[\kappa \times \{1\}]$ olsun. $X = Y \sqcup Z$ ve $\mathfrak{h}Y = \mathfrak{h}Z = \kappa$. $\exists g : Y \rightleftharpoons Z$ ve $\exists h : Z \rightleftharpoons Y$. $f := g \cup h : X \rightleftharpoons X$ sabit noktası olmayan bir tameşlemedir. $h = g^{-1}$ alabilirsiniz.

İkinci Çözüm: $n \geq 2$ bir doğal sayı olmak üzere X kümesinin her bir A parçasının gücü n olan bir $\mathcal{P}$ parçalanışını alalım. Her $A \in \mathcal{P}$ için $f_A : A \rightleftharpoons A$ sabit noktası olmayan bir tameşleme olmak üzere

$$f := \bigcup_{A \in \mathcal{P}} f_A : X \rightarrow X$$

sabit noktası olmayan bir tameşlemedir.

Üçüncü Çözüm: $\kappa = \mathfrak{h}X$ olmak üzere X kümesini $(x_\xi)_{\xi < \kappa}$ olarak iyi sıralayalım. Bir $f : X \rightarrow X$ dönüşümünü şöyle tanımlayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(2n) := 2n+1$ ve $f(2n+1) := 2n$ olsun. Biz her $\omega \leq \alpha < \kappa$ sayısının tek bir biçimde bir $\lambda < \kappa$ limit sıra sayısı ve bir m doğal sayısı ile $\alpha = \lambda + m$ olarak yazılabileceğini biliyoruz. Dolayısıyla $[\omega, \kappa)$ aralığında da f fonksiyonu her $\lambda < \kappa$ limit sıra sayısı ve her n doğal sayısı için $f(\lambda + 2n) := \lambda + 2n + 1$ ve $f(\lambda + 2n + 1) := \lambda + 2n$ olarak açıklansın. Elbette $f : X \rightarrow X$ sabit noktası olmayan bir tameşlemedir.

3. $A \subset X$ ve $\mathfrak{h}(X \setminus A) \geq 2$ ise (1)'den dolayı sabit noktası olmayan bir $g : X \setminus A \rightleftharpoons X \setminus A$ tameşlemesi vardır.

$$f(x) := \begin{cases} g(x) & , x \in X \setminus A \\ x & , x \in A \end{cases}$$

fonksiyonu sabit noktalarının kümesi A olan bir $f : X \rightleftharpoons X$ tameşlemesidir.

□

Problem 4.0.3 $\leq$ ile kısmi sıralanmış sonsuz bir X kümesi verildiğinde bu kümenin aynı $\leq$ bağıntısına göre bağlantılı, ya da mutlak bağlantısız olan sonsuz bir altkümesinin olduğunu gösteriniz (İstenen sonsuz bir $Y \subseteq X$ altkümesi, öyle ki $\forall a, b \in Y$ ($a \leq b \vee b \leq a$) veya $\forall a, b \in Y$ ($a \not\leq b \wedge b \not\leq a$)).

$[X]^2$ kümesini

$$P_0 := \{\{x, y\} \in [X]^2 \mid x \leq y \vee y \leq x\} \text{ ve}$$

$$P_1 := \{\{x, y\} \in [X]^2 \mid x \not\leq y \wedge y \not\leq x\}$$

olarak iki parçaya ayıralım. (2.17.19) Ramsey Teoremi'nden dolayı sonsuz bir $Y \subseteq X$ kümesi $[Y]^2 \subseteq P_0 \vee [Y]^2 \subseteq P_1$ olacak biçimde vardır. Böyle bir Y işimizi görür. $\square$

Problem 4.0.4 *Boş olmayan kümelerin herhangi bir sonsuz $\mathcal{A}$ ailesi verildiğinde bu ailenin sonsuz bir $\mathcal{B}$ alt ailesi ya $\mathcal{B}$ ayrık ya da birbirinden farklı herhangi iki $x, y \in \mathcal{B}$ için daima $x \cap y \neq \emptyset$ olacak biçimde bulunabilir.*

$[\mathcal{A}]^2$ kümesini

$$P_0 := \{\{x, y\} \in [\mathcal{A}]^2 \mid x \cap y = \emptyset\} \text{ ve}$$

$$P_1 := \{\{x, y\} \in [\mathcal{A}]^2 \mid x \cap y \neq \emptyset\}$$

olarak iki ayrık parçaya bölelim. Ramsey Teoremi'ne göre $[\mathcal{B}]^2 \subseteq P_0$ veya $[\mathcal{B}]^2 \subseteq P_1$ olacak biçimde sonsuz bir $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ vardır. $\square$

Problem 4.0.5 *Sayılabılır sonsuz X kümesinin sonsuz altkümelerinden oluşan sayılamaz çoklukta neredeyse ayrık bir $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ailesinin varlığını kanıtlayınız (**Sierpinski** [54]).*

Bu önermeyi herhangi bir sayılabılır sonsuz küme için kanıtlamak yeterlidir.

Birinci Çözüm: $X := \bigsqcup_{n < \omega} {}^n 2$ için (2.15.20) ile

$$\aleph X = \sum_{n < \omega} 2^n = \aleph_0 * \sup_{n < \omega} 2^n = \aleph_0 * \aleph_0 = \aleph_0$$

olduğundan $\mathcal{P}(X)$ 'te istenilen türden bir $\mathcal{A}$ ailesi bulmak yeterlidir. $a \in {}^n 2$ ve $x \in {}^\omega 2$ öğelerini $a = (a_k)_{k < n}$ ve $x = (x_n)_{n < \omega}$ gösterimleriyle alalım. Bir $f : {}^\omega 2 \rightarrow \mathcal{P}(X)$ fonksiyonunu $x = (x_n)_{n < \omega}$ için

$$f(x) := \{(x_k)_{k < n} \mid n < \omega\}$$

olarak tanımlayalım. Önce f fonksiyonunun birebir olduğunu görelim. Gerçekten de $x, y \in {}^\omega 2$ ve $x \neq y$ ise

$$M := \{m \in \omega \mid x_m \neq y_m\} \neq \emptyset.$$

$\exists m^* := \min M$ ve $(x_k)_{k < m^*+1} \in f(x)$, ancak $(x_k)_{k < m^*+1} \notin f(y)$, dolayısıyla $f(x) \neq f(y)$ ve f birebirdir. $\aleph {}^\omega 2 = \mathfrak{c}$ olduğundan $\mathcal{B} := \text{res } f \subseteq \mathcal{P}(X)$

ailesinin gücü de $\mathfrak{c}$ 'dir. Geriye $\mathcal{B}$ ailesinin neredeyse ayrık olduğunu görmek kalıyor. Ancak x, y ve m^* az önceki gibi olmak üzere

$$f(x) \cap f(y) = \{(x_k)_{k < n} \mid n < m^*\}$$

açıkça sonludur.

İkinci Çözüm. Problemi $X = \mathbb{N}$ için çözmek yeterlidir. $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, $I_r := I \cap \mathbb{Q}$ olsun. I_r sayılabilir, bu nedenle öğelerini $r_0, r_1, r_2, \dots$ olarak, $m \neq n$ için $r_m \neq r_n$ olacak biçimde numaralayabiliriz. I_r kümesi I 'da yoğun olduğundan her $t \in I$ için I_r kümesinde öğeleri birbirinden farklı olan bir $(t_n)_{n < \omega}$ dizisi $\lim t_n = t$ olacak biçimde bulunabilir. Şimdi

$$\mathbb{N}_t := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists t_m (t_m = r_n)\}$$

olsun. Tanım gereği her $\mathbb{N}_t$ sayılabilir sonsuzdur. $\mathcal{B} := \{\mathbb{N}_t \mid t \in I\}$ ailesi neredeyse ayrıktır. Gerçekten de $t, t' \in I$ ve $t \neq t'$ ise $\lim t_n = t$ ve $\lim t'_n = t'$ olduğundan ancak sonlu sayıda m için $t_m = t'_m$ olabilir. Bu nedenle $\mathbb{N}_t \cap \mathbb{N}_{t'}$ sonludur. Ayrıca kendileri sayılabilir sonsuz ancak arakesitleri sonlu olduğu içinse $\mathbb{N}_t \neq \mathbb{N}_{t'}$. Bu nedenle $\mathcal{B}$ ailesi sayılamaz çoklukta bir ailedir. $\square$

Problem 4.0.6 κ herhangi bir sonsuz çokluk sayısı, I ise gücü $\leq \kappa$ olan bir küme, $\{X_i\}_{i \in I}$ ise her bir X_i kümesinin gücünün yine κ olduğu bir kümeler ailesi olsun. Her bir $i \in I$ için gücü yine κ olan $Y_i \subseteq X_i$ altkümelerinin $\{Y_i\}_{i \in I}$ ayrık olacak biçimde bulunabileceğini gösteriniz.

Çözüme geçmeden önce önermenin gücünü hissetmek için bir özel durumu biraz düşünmekte yarar var. Örneğin $\mathbb{R}^3$ uzayımızı alalım. Uzayımızın sonlu veya sayılabilir sonsuz altkümelerinin kümesi S , doğrularının kümesi L ve düzlemlerinin kümesi ise D olsun. Bu üç kümenin güçleri uzayımızın gücüne eşittir, dd. $\mathfrak{c}$ 'dir. Damga kümemiz $I := S \cup L \cup D$ ve her $i \in I$ için $X_i := \mathbb{R}^3 \setminus i$ olsun. Böylece elde ettiğimiz $\{X_i\}_{i \in I}$ ailesi $\kappa = \mathfrak{c}$ ile önermemizin koşulların sağlar. Önermenin istediği türden ayrık $\{Y_i\}_{i \in I}$ ailesini bulmayı deneyelim. Çözüm ararken büyük bir olasılıkla $\mathbb{R}^3$ uzayımızın geometrisinden yararlanmaya çalışacağız. Yine de işimiz kolay gibi görünmüyor. Bizim sorumuzda söz konusu kümelerin hiç bir yapısal özellikleri verilmemiştir.

$\mathcal{X} = \{X_i\}_{i \in I}$ ailesinin öğelerini her bir X_i tam κ kez geçecek biçimde $\xi < \kappa$ olmak üzere

$$X_0, X_1, X_2, \dots, X_\xi, \dots \quad (\xi < \kappa)$$

olarak dizelim; bunu yapabileceğimizi örnek 2.15.15'de öğrendik. Şimdi tekrarlı seçmeyle bir $(x_a)_{a < \kappa}$ dizisi tanımlayacağız. x_0 öğesini X_0 kümesinden

rastgele seçelim. Şimdi $\alpha < \kappa$ olsun ve her $\beta < \alpha$ için x_β seçilmiş olsun. $\aleph_\beta < \kappa$ olduğundan $X_\alpha \setminus \{x_\beta \mid \beta < \alpha\} \neq \emptyset$ ve biz x_α ögesini bu kümeden seçiyoruz. Tanım gereği $\beta < \alpha < \kappa$ için daima $x_\beta \neq x_\alpha$. $Y_i := \{x_\alpha \mid x_\alpha \in X_i\}$ olsun. Tanım gereği $\{Y_i\}_{i \in I}$ ayrıktır, ayrıca her $i \in I$ için $Y_i \subseteq X_i$. Diğer yandan her bir X_i kümesi $(X_\xi)_{\xi < \kappa}$ dizimizde tam κ kez geçtiğinden $\aleph Y_i = \kappa$. $\square$

Not: κ herhangi bir sonsuz çokluk sayısı, X gücü κ olan herhangi bir küme ve $I = \kappa$ olmak üzere her $\xi \in \kappa$ için $X_\xi = X$ alalım. O zaman önermemiz bu X kümesini her birinin gücü κ olan κ ayrık parçaya ayırabileceğimizi söyler.

Problem 4.0.7 V sonsuz boyutlu bir vektör uzayı, $\dim V = \kappa$ ve $1 \leq \mu \leq \kappa$ olsun.

1. Birebir ancak örten olmayan doğrusal $f : V \longrightarrow V$ dönüşümlerinin varlığını kanıtlayınız.
2. Çekirdeğinin boyutu μ olan örten doğrusal $f : V \longrightarrow V$ dönüşümlerinin varlığını kanıtlayınız. Bu doğrusal dönüşümler elbette örten ancak birebir değildir.
3. Bir vektör uzayının sonsuz boyutlu olması için gerek ve yeter koşul bu vektör uzayının bir öz alt vektör uzayıyla eşyapılı olmasıdır, kanıtlayınız.

B uzayımızın bir bazı olsun. Her $x \in V$ vektörü tek biçimde $x = \sum_{b \in B} \lambda_b(x)b$ olarak yazılabilir. Burada $\lambda_b \in \mathbb{K}$ ve sonlu sayıda $\lambda_b(x) \neq 0$. Daha yalın olarak $x = \sum^s \lambda_b(x)b$ yazalım.

1. B kümesinin gücü yine κ olan bir C öz altkümesini alalım. $\exists f : B \rightleftharpoons C$. Bu fonksiyonu V uzayımıza doğrusal genişletelim, dd. her $x = \sum^s \lambda_b(x)b$ için $f(x) := \sum^s \lambda_b(x)f(b)$ olarak açıklansın. f birebirdir, ancak örten değildir. W ile $B \setminus C$ nin gerdiği alt vektör uzayını gösterirsek $\text{res } f \cap (W \setminus \{0\}) = \emptyset$.

2. $\mu + \kappa = \kappa$ olduğundan B kümesini $\aleph C = \mu$ ve $\aleph D = \kappa$ olacak biçimde iki ayrık parçaya bölebiliriz. $\exists \psi : D \rightleftharpoons B$. Her $x \in C$ için $\psi(x) := 0$ olarak tanımlayarak elde ettiğimiz $\psi : B \longrightarrow B$ dönüşümünü doğrusal olarak uzayımıza genişletelim, dd.

$$\psi \left(\sum^s \lambda_b(x)b \right) := \sum^s \lambda_b(x)\psi(b)$$

olarak açıklansın. Bu doğrusal dönüşüm örtendir ve çekirdeği μ boyutlu $\langle C \rangle$ alt vektör uzayıdır.

3. Bu önerme ile sonsuz kümeleri belirleyen (2.6.11)2. arasındaki benzerlik apaçık ortadadır. V vektör uzayımız ve B onun bir bazı olsun. Her $f : V \rightarrow V$ doğrusal dönüşüm $f|B$ ile belirlenmiştir.

(a) B sonsuz bir küme olsun. B kümesinin kendisiyle eşgüçlü bir C özaltkümelerini alalım ve $W = \langle C \rangle$ ise onun gerdiği öz alt vektör uzay olsun. Herhangi bir $\psi : B \rightleftharpoons C$ tameşlemesi bir $f : V \rightarrow W$ doğrusal dönüşüme genişletildiğinde bunun bir eşyapı dönüşümü olduğu apaçıktır.

(b) V vektör uzayı sonlu boyutlu ise hiçbir öz alt vektör uzayı ile eşyapılı olamayacağını Doğrusal Cebir derslerinde öğreniyoruz. Yine de kanıtlayalım: B uzayımızın bir bazı $W \subset V$ bir öz alt vektör uzayı ve $f : V \rightarrow W$ bir eşyapı dönüşümü olsun. $n := \dim V$ ve $m := \dim W$ olsun. $C := f[B]$ elbette W uzayımızın bir bazıdır. $n = \sharp B$, $m = \sharp C$ ve $f|B : B \rightleftharpoons C$ tameşleme olduğundan $n \sim m$, bu ise ancak $n = m$ ile doğrudur, dolayısıyla W öz alt vektör uzayı olamaz. $\square$

Problem 4.0.8 Her toplamsal $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun $\mathbb{Q}$ doğrusal olduğunu kanıtlayınız.

Her $x \in \mathbb{R}$ ve her $q \in \mathbb{Q}$ için $f(qx) = qf(x)$ olduğunu kanıtlayacağız. $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ olduğundan $f(0) = 0$. Toplamsallıktan $f(2x) = 2f(x)$. Bundan da yararlanarak tümevarımla kolayca her $x \in \mathbb{R}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f(nx) = nf(x)$ olduğu görülür. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$0 = f(0) = f(-x + x) = f(-x) + f(x)$$

eşitliğinden $f(-x) = -f(x)$ elde edilir. Artık her $x \in \mathbb{R}$ ve her $m \in \mathbb{Z}$ için $f(mx) = mf(x)$ olduğunu kolayca görebiliriz. Her $0 \neq n \in \mathbb{N}$ için

$$nf\left(\frac{1}{n}x\right) = f\left(n\frac{1}{n}x\right) = f(x)$$

bağıntısından

$$f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(x)$$

elde edilir. Her $q \in \mathbb{Q}$ sayısı $n > 0$ olmak üzere $m, n \in \mathbb{Z}$ ile $q = \frac{m}{n}$ olarak yazılabildiğinden

$$\forall q \in \mathbb{Q} \forall x \in \mathbb{R} f(qx) = f\left(m\frac{1}{n}x\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) = m\frac{1}{n}f(x) = qf(x). \square$$

Problem 4.0.9 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{Q}$ doğrusal ve sürekli ise $\mathbb{R}$ doğrusal olduğunu ve tek olarak belirli bir $a \in \mathbb{R}$ ile her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = ax$ olduğunu kanıtlayınız.

$r, x \in \mathbb{R}$ keyfi verilsinler. $\mathbb{Q}$ 'da bir $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini $r = \lim q_n$ olacak biçimde seçelim. f fonksiyonunun ve $\mathbb{R}$ 'deki çarpmanın sürekliliğinden

$$f(rx) = f(\lim q_n x) = \lim f(q_n x) = \lim q_n f(x) = r f(x)$$

elde edilir. Burada birinci ve sonuncu eşitlikte çarpmanın sürekliliği, ikinci eşitlikte f fonksiyonun sürekliliği, üçüncü eşitlikte ise f fonksiyonunun $\mathbb{Q}$ doğrusallığı kullanılmıştır. Böylece f fonksiyonu $\mathbb{R}$ doğrusaldır. $\{1\}$, $\mathbb{R}$ uzayımızın $\mathbb{R}$ üzerinden bir bazı olduğundan her $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ doğrusal dönüşümü $a := f(1)$ değeri ile *tek* olarak belirlidir. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f(x) = f(x1) = xf(1) = xa = ax$$

olur. $\square$

Problem 4.0.10 $\dim \mathbb{R}_{\mathbb{Q}} = \mathfrak{c}$, $\mathfrak{H}om_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathfrak{c}$ ve $\mathfrak{H}om_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = 2^{\mathfrak{c}}$ olduğunu gösteriniz.

Bunların ilki örnek 2.15.23'tür; diğerleri örnek 2.15.22'den çıkar.

$\dim \mathbb{R}_{\mathbb{Q}} = \mathfrak{c}$ olduğunu şöyle de görebiliriz: $B \subseteq \mathbb{R}$ herhangi bir altküme olmak üzere $\langle B \rangle_{\mathbb{Q}}$ sayılabilir bir $\mathcal{F}$ fonksiyon ailesinin etkisi altında B kümesinin kapanışdır. $\mathcal{F}$ ailesi $+: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}((x, y) \rightsquigarrow x + y)$ toplam fonksiyonu ve her $q \in \mathbb{Q}$ için $f_q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(x \rightsquigarrow qx)$ fonksiyonlarından oluşur. Şimdi B bir baz olacaksa Problem 4.0.39'dan

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{H}om_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathfrak{H}om_{\mathbb{Q}}(\langle B \rangle_{\mathbb{Q}}, \mathbb{R}) \leq \mathfrak{H}om_{\mathbb{Q}}(B, \mathbb{R}) \leq \mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c} \implies \mathfrak{H}om_{\mathbb{Q}}(B, \mathbb{R}) = \mathfrak{c}$$

elde edilir. $\square$

Problem 4.0.11 *Toplamsal ancak sürekli olmayan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının varlığını kanıtlayınız.*

Birinci Çözüm: Örnek 2.15.24.

İkinci Çözüm: $\pi \notin \mathbb{Q}$ olduğundan $\{1, \pi\}$ kümesi $\mathbb{Q}$ doğrusal bağımsızdır. Bu kümeyi bir H Hamel bazına tamamlayalım. Şimdi $f(1) := \pi, f(\pi) := 1$ ve her $h \in H \setminus \{1, \pi\}$ için $f(h) := h$ fonksiyonunu $\mathbb{Q}$ doğrusal olarak $\mathbb{R}$ uzayımıza genişletelim. Bizim fonksiyonumuz sürekli olsaydı Problem 4.0.10'da gösterildiği gibi her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = \pi x$ olmalıydı ki bu bizi $1 = f(\pi) = \pi^2$ çelişkisine götürür. Tanımladığımız bu süreksiz toplamsal fonksiyonun bir tameşleme olduğunu ayrıca belirtelim.

Üçüncü Çözüm: Bir H Hamel bazı ve bir $h \in H$ seçelim. Problem 4.0.7'de olduğu gibi çekirdeği $\langle h \rangle = \mathbb{Q}h$ olan *örten* bir $\mathbb{Q}$ doğrusal $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alalım. Şimdi $b \in \mathbb{R}$ keyfi verilsin. f örten olduğundan $f(a) = b$ olacak biçimde bir $a \in \mathbb{R}$ vardır. f toplamsal ve çekirdeği $\mathbb{Q}h$ olduğundan b değerini

aldığı noktaların kümesi $A_b := a + \mathbb{Q}h$ kümesidir. A_b kümesi $\mathbb{R}$ 'de yoğundur. Bu demektir ki fonksiyonumuz boştan farklı her açık aralıkta her değeri alır hem de *her değeri* $\aleph_0$ kez alır. Böyle bir fonksiyon, kolayca bulabileceğiniz değişik nedenlerle sürekli olamaz! $\square$

Problem 4.0.12 *Toplamsal ancak sürekli olmayan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının kümesinin çokluk sayısının $!2^{\mathfrak{c}}$ olduğunu gösteriniz.*

Birinci Çözüm: Örnek 2.15.24.

İkinci Çözüm: $B \subset \mathbb{R}$ bir Hamel bazı olsun. $\aleph B = \mathfrak{c}$ olduğundan (2.17.10) ile B kümesinin gücü $\mathfrak{c}$ olan öz altkümelerinin kümesi olan $[B]^{\mathfrak{c}}$ kümesinin gücü $!2^{\mathfrak{c}}$ 'dir. Her $C \in [B]^{\mathfrak{c}}$ için bir $f_C : C \rightleftharpoons B$ tameşlemesi alalım. Her $x \in B \setminus C$ içise $f_C(x) := 0$ olarak açıklayalım. Bu f_C fonksiyonunu $\mathbb{Q}$ -doğrusal olarak $\mathbb{R}$ uzayına genişletirsek çekirdeği $\langle B \setminus C \rangle_{\mathbb{Q}}$ olan örten ve doğrusal bir $g_C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü elde ederiz. Bir önceki problemin üçüncü çözümünde olduğu gibi g_C fonksiyonu $\mathbb{Q}$ -doğrusal, ancak sürekli değildir. Öyleyse en az $!2^{\mathfrak{c}}$ tane süreksiz $\mathbb{Q}$ -doğrusal g_C fonksiyonumuz var. Diğer yandan $\mathbb{R}$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye tüm fonksiyonlar zaten $!\mathfrak{c} = !2^{\mathfrak{c}}$ 'tanedir. İşimiz biter. $\square$

Problem 4.0.13 *Orta nokta dışbükey fonksiyonların dışbükey, dolayısıyla sürekli olması gerekmediğini kanıtlayınız.*

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli olmayan $\mathbb{Q}$ doğrusal bir fonksiyon olsun.

$$f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

olduğundan f orta nokta dışbükeydir. Ancak bu fonksiyon dışbükey olamaz, aksi halde sürekli olması gerekirdi². $\square$

Problem 4.0.14 (Vietoris [58]). $C, S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

1. $C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y)$
2. $S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y)$

denklem sisteminin tüm çözümlerini bulunuz.

Bu denklem sistemini Hamel baz kullanarak J.G. van der Corput [18]'de çözmüştür. Daha sonra farklı matematikçiler aynı problem için çözümler sunmuşlardır. Biz bunlardan Vietoris'in çözümünü vereceğiz.

²Bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun orta nokta dışbükey ve sürekli ise dış bükey olduğu analiz derslerinde ya kanıtlanır ya da problem olarak sorulur.

Önce C, S , (1),(2) denklem sisteminin çözümleri iseler

$$A := C + iS$$

ile tanımlanan $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun

$$(3) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad A(x+y) = A(x)A(y)$$

denklemini sağladığı görülür. Tersine $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu (3) denkleminin bir çözümü, $C := \operatorname{Re} A$ ve $S := \operatorname{Im} A$ ise C, S fonksiyonları (1),(2) denklem sisteminin çözümleridirler. Öyleyse (3) denkleminin tüm çözümlerini arayacağız.

$A(0) = A(0+0) = A(0)A(0)$ 'dan $A(0) = 0$ veya $A(0) = 1$ elde edilir. $A(0) = 0$ ise her $x \in \mathbb{R}$ için $A(x) = A(x+0) = A(x)A(0) = 0$ olur ve bu bizi (3) denkleminin $A = 0$ aşıkâr çözümüne götürür.

Şimdi $A(0) = 1$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için $1 = A(0) = A(x-x) = A(x)A(-x)$ bağıntısından $A(x) \neq 0$ ve $A(-x) = (A(x))^{-1}$ elde edilir.

$$r(x) := |A(x)| \text{ ve } E(x) := A(x)/r(x)$$

olmak üzere

$$(4) \quad A(x) = r(x)E(x), \quad r(x) := |A(x)| > 0 \text{ ve } |E(x)| = 1$$

olarak yazabiliriz. (3) ve (4)'ten

$$(5) \quad r : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty) \text{ ve } \forall x, y \in \mathbb{R} \quad r(x+y) = r(x)r(y) \text{ ve}$$

$$(6) \quad E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad E(x+y) = E(x)E(y), \quad |E(x)| = 1.$$

elde edilir. (3) denkleminin her çözümü için (4),(5),(6) sağlanır. Tersine, (4),(5),(6) sağlandığında A fonksiyonu (3) denkleminin bir çözümüdür. Problemi (5) ve (6) denklemlerinin çözümüne indirgemiş olduk.

Önce (5) denklemini çözelim. Her $x \in \mathbb{R}$ için *tek* olarak belirli bir $u(x) \in \mathbb{R}$ sayısı

$$r(x) =: e^{u(x)}$$

olacak biçimde vardır. Yine (5)'ten dolayı her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$u(x+y) = u(x) + u(y)$$

olur. Dolayısıyla $u \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Tersine, her $u \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ için $r(x) = e^{u(x)}$ fonksiyonu (5) denkleminin bir çözümüdür.

Son olarak (6) denkleminin çözümlerini bulalım. Bir $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ ile $E(x) =: e^{i\varphi(x)}$ olacağından (6)'dan

$$\varphi(x+y) \equiv \varphi(x) + \varphi(y) \pmod{2\pi}$$

denklemini elde edilir ve bu denklemin çözümü aranır. Bu denklemin Corput tarafından verilen çözümleri kullanılabilir. Biz burada başka bir yol izleyeceğiz.

H bir Hamel bazı olsun. Her şeyden önce (6)'dan sonlu sayıda $x_1, \dots, x_n$ için

$$(7) \quad E(x_1 + \dots + x_n) = E(x_1) \cdot \dots \cdot E(x_n)$$

elde edilir. Her $x \in \mathbb{R}$ tek biçimde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in H$ ve $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $x = r_1\alpha_1 + \dots + r_n\alpha_n$ olarak yazılabileceğinden

$$(8) \quad E(x) = E(r_1\alpha_1 + \dots + r_n\alpha_n) = E(r_1\alpha_1) \cdot \dots \cdot E(r_n\alpha_n)$$

olur. Bu nedenle E fonksiyonunu bilmek için her $\alpha \in H$ ve her $r \in \mathbb{Q}$ için $E(r\alpha)$ değerini bilmek yeterlidir ve bilindiği gibi bunlar aşağıdaki koşulları sağlarlar:

$$(9) \quad \forall \alpha \in H \forall r, s \in \mathbb{Q} E(r\alpha + s\alpha) = E(r\alpha)E(s\alpha) \text{ ve } |E(r\alpha)| = 1.$$

Tersine $\mathbb{Q}H = \{r\alpha \mid r \in \mathbb{Q} \wedge \alpha \in H\}$ kümesinde açıklanmış, (9) denklemini sağlayan herhangi bir E fonksiyonu (8) denklemini ile tüm $\mathbb{R}$ uzayına genişletilirse bize (6). denklemin bir çözümünü verir. Gerçekten de E fonksiyonu (9) denklemini sağlasın ve (8) ile $\mathbb{R}$ 'ye genişletilsin. $x, x' \in \mathbb{R}$ keyfi verildiğinde, gerekirse 0 katsayıları da katarak bu iki öge

$$x = \sum_{i=1}^n r_i \alpha_i, \quad x' = \sum_{i=1}^n r'_i \alpha_i, \quad r_i, r'_i \in \mathbb{Q}, \quad \alpha_i \in H, \quad i = 1, \dots, n$$

olarak yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} E(x + x') &= E\left(\sum_{i=1}^n (r_i + r'_i) \alpha_i\right) \stackrel{(8)}{=} \prod_{i=1}^n E((r_i + r'_i) \alpha_i) \\ &\stackrel{(9)}{=} \prod_{i=1}^n E(r_i \alpha_i) E(r'_i \alpha_i) = \prod_{i=1}^n E(r_i \alpha_i) \prod_{i=1}^n E(r'_i \alpha_i) = E(x) E(x'). \end{aligned}$$

Böylece (6) denkleminin çözümünü (9) denkleminin çözümüne indirgemiş olduk. Herhangi bir $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ gerçekte sayı H bazımızın ögesi ve $|\beta| = 1$ koşulunu sağlayan herhangi bir $\beta \in \mathbb{C}$ karmaşık sayı için $E(\alpha) = \beta$ olabilir. $S := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ birim çember olmak üzere, problemi şimdi şu şekilde indirgemiş oluruz: $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\beta \in \mathbb{C}$ sayıları $\alpha \neq 0$ ve $|\beta| = 1$ olacak biçimde keyfi verildiklerinde aşağıdaki koşulları sağlayan tüm E fonksiyonlarını bulunuz:

$$(6)^* \quad E : \mathbb{Q}\alpha \rightarrow S, \quad E(\alpha) = \beta \text{ ve } \forall r, s \in \mathbb{Q} E(r\alpha + s\alpha) = E(r\alpha)E(s\alpha).$$

(6)* denkleminin çözümlerini bulalım. Tümevarımla her $m \in \mathbb{N}$ için $E(m\alpha) = \beta^m$ ve buradan her $m, n \in \mathbb{N}$ ve $n \neq 0$ için

$$E\left(\frac{m}{n}\alpha\right) = \beta^{\frac{m}{n}}$$

olduğu görülür. Ancak $\mathbb{C}$ 'de $z^n = \beta^m$ denkleminin tam n farklı çözümü olduğunu biliyoruz. Amacımıza uygun bir gösterim seçeceğiz.

Önce basit bir tümevarım işi olarak aşağıdaki gerçeği ödev olarak bırakalım: $0, 1, \dots, n! - 1$ doğal sayıları tek bir biçimde

$$k_1 + 2!k_2 + \dots + (n-1)!k_{n-1}, \quad k_j = 0, 1, \dots, j; \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

olarak yazılabilirler.

Bir $\gamma \in \mathbb{R}$ sayısıyla $e^{i\alpha\gamma} = \beta$. Şimdi her $n \in \mathbb{N}^*$ için $\beta_1, \beta_2, \dots$ karmaşık sayılarını

$$\beta_1 = \beta \text{ ve } \beta_n^n = \beta_{n-1}, \text{ dolayısıyla } \beta_n^{n!} = \beta,$$

olacak biçimde seçeceğiz. Bu seçim

$$\omega_n = \gamma + \frac{2\pi}{\alpha}(k_1 + 2!k_2 + \dots + (n-1)!k_{n-1})$$

olmak üzere

$$\beta_n := e^{\frac{i\alpha}{n!}\omega_n}$$

şeklinde olacaktır. Burada k_j sayısının $0, 1, \dots, j$ değerlerinden herhangi birini alabileceğini son bir kez belirtelim. Şimdi her $m \in \mathbb{Z}$ tam sayısı için

$$E\left(\frac{m}{n!}\alpha\right) := \beta_n^m$$

olarak açıklıyoruz. Böylece $E(r\alpha)$ tüm $r \in \mathbb{Q}$ için açıklanmış olur. $r, s \in \mathbb{Q}$ herhangi iki rasyonel sayı ise $n \in \mathbb{N}^*$ doğal sayısı ve $R, S \in \mathbb{Z}$ tam sayıları $r = \frac{R}{n!}$ ve $S = \frac{S}{n!}$ olacak biçimde bulunabilirler. Böylece

$$E(r\alpha + s\alpha) = E\left(\frac{R+S}{n!}\alpha\right) = \beta_n^{R+S} = \beta_n^R \beta_n^S = E(r\alpha)E(s\alpha)$$

olur ve tanımladığımız fonksiyon gerçekten (6)*'nın bir çözümüdür. Ancak daha önce yaptığımız irdelemeden de çözümlerin yalnızca bunlar olacağı aşikardır. $\square$

Problem 4.0.15 *Bir önceki problemde sorulan denklem sisteminin tüm sürekli çözümlerini bulunuz.*

Tüm gösterimler bir önceki problem ve çözümündeki gibi olsunlar. $A = C + iS$ fonksiyonunun sürekli olması için gvyk. C ve S fonksiyonlarının sürekli olmasıdır. Diğer yandan $A(x) = r(x)E(x) = e^{u(x)}E(x)$ fonksiyonunun sürekli olması için gvyk. u ve E fonksiyonlarının sürekli olmasıdır. $u \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ fonksiyonunun sürekli olması için gvyk. bir $a \in \mathbb{R}$ ile $u(x) = ax$ olmasıdır, bunu (4.0.9)'da öğrendik.

Gelelim $E : \mathbb{R} \rightarrow S$ fonksiyonuna! E sürekli olacaksa bu fonksiyonu $\alpha \neq 0$ olmak üzere $\mathbb{Q}\alpha$ 'da bilmek yeterlidir. Demek ki bir önceki çözümdeki (6)* denkleminin çözümlerini mercek altına almak yeterlidir. O çözümlerde k_j doğal sayılarını $0, 1, \dots, j$ sayıları arasından seçerek ω_n sayıları yardımıyla β_n sayılarını tanımlamıştık. Fakat k_j sayılarının seçiminde birbirini dışlayan iki durum vardır.

(I) Her $j \geq l$ için $k_j = 0$ ve $k_{l-1} \neq 0$ olacak biçimde bir l doğal sayısı vardır. Bu durumda kolayca görüleceği gibi her n için

$$\frac{\alpha\omega_n}{n!} \equiv \frac{\alpha\omega_l}{n!} \pmod{2\pi}, \text{ dolayısıyla } \beta_n = e^{\frac{\alpha\omega_n}{n!}} = e^{\frac{\alpha\omega_l}{n!}}$$

olur. Bunun sonucu ise her $r \in \mathbb{Q}$ için

$$E(r\alpha) = E\left(\frac{R}{n!}\alpha\right) = \beta_n^R = e^{i\omega_l r\alpha}$$

olur. Buradansa E fonksiyonunun $\mathbb{Q}\alpha$ kümesinde $g(x) = e^{i\omega_l x}$ fonksiyonuyla örtüştüğünü görüyoruz. E sürekli bir çözüm olacaksa elbette her $x \in \mathbb{R}$ için $E(x) = e^{i\omega_l x}$ olacaktır.

(II) Sonsuz çoklukta j için $k_j \neq 0$. Yeterince büyük n için $k_{n-1} \neq 0$ ise $\beta_n, \beta_n^2, \dots, \beta_n^{n-1}$ sayılarının tümü birim çember üzerinde aynı dördlükte bulunmazlar. Bunun bir sonucu şudur: $E(\frac{m}{n!}\alpha) = \beta_n^m$ olduğundan $n \rightarrow +\infty$ için bir yandan $\frac{m}{n!}\alpha \rightarrow 0$, diğer yandan $E(\frac{m}{n!}\alpha)$ değerlerinin birden fazla yığılma noktası vardır. $E : \mathbb{Q}\alpha \rightarrow S$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli değildir ve $\mathbb{R}$ 'de tanımlı sürekli bir fonksiyona genişletilmesi söz konusu değildir.

ω_l sayısı herhangi bir gerçekte sayı olabileceğinden denklem sistemimiz için sürekli A fonksiyonları $a, \omega \in \mathbb{R}$ herhangi iki gerçekte sayı olmak üzere $A(x) = e^{ax}e^{i\omega x}$ fonksiyonlarıdır. Böylece denklem sistemimizin sürekli çözümleri tamı tamına

$$C(x) = e^{ax} \cos \omega x, \quad S(x) = e^{ax} \sin \omega x, \quad (a, \omega \in \mathbb{R})$$

fonksiyonlarıdır³. $\square$

Problem 4.0.16 α herhangi bir sıra sayısı ve $(A_\xi)_{\xi < \alpha}$ ise $\mathbb{R}^n$ uzayımızın açık (kapalı) altkümelerinin kesin genişleyen (daralan) bir dizisi olsun. α 'nın sayılabilir olduğunu kanıtlayınız (**Cantor**).

³Denklem sistemimizin $!2^c$ tane süreksiz çözümü var. Bir çözümün sürekli olmasını istediğimizde kendiliğinden analitik olduğunu gördük. Benzeri bir durumla $f(x+y) = f(x) + f(y)$ denkleminin $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ çözümlerinde karşılaştık. Bu olguyla, d.d. bir denklemin çözümlerinin bir p özelliğine sahip olması istendiğinde kendiliğinden çok daha güçlü q özelliklerine sahip olmasıyla, başka yerlerde de karşılaşırız.

(3.3.5)'te kanıtlandı. $\square$

Problem 4.0.17 *Bir α sıra sayısının sayılabilir olmasının $\leq$ gerçekte sayılar arasındaki doğal sıralamayı göstermek üzere $\alpha \cong (S, \leq)$ olacak biçimde bir $S \subseteq \mathbb{R}$ altkümelerinin bulunmasıyla eş anlamlı olduğunu kanıtlayınız (**Cantor**).*

Not 3.3.6'da kanıtlandı. $\square$

Problem 4.0.18 $\mathbb{R}^n$ 'deki her kusursuz altkümenin gücü $\mathfrak{c}$ 'dir (**Cantor**).

(3.3.10)'da kanıtlandı. $\square$

Problem 4.0.19 $\mathbb{R}^n$ 'deki her kapalı ve sayılamaz küme bir kusursuz küme ve bir sayılabilir kümenin ayrık birleşimi olarak yazılabilir. $\mathbb{R}^n$ 'deki her kapalı kümenin gücü $\leq \aleph_0$ veya $= \mathfrak{c}$ 'dir (Cantor).

(3.3.8) ve (3.3.10)'da kanıtlandı. $\square$

Problem 4.0.20 $\mathbb{R}^n$ 'deki Borel kümelerinin $\mathcal{B}^n$ kümesinin gücü $\mathfrak{c}$ 'dir.

(3.6.10)'da kanıtlandı. $\square$

Problem 4.0.21 $C \subset \mathbb{R}$ Cantor kümesi ve $\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrasyonel sayıların kümesi olmak üzere her $1 \leq \mu \leq \aleph_0$ için $C \stackrel{\text{top}}{=} C^\mu$ ve $\mathbb{I} \stackrel{\text{top}}{=} \mathbb{I}^\mu$ olduğunu gösteriniz.

Not 3.2.10'da kanıtlandı. $\square$

Problem 4.0.22 Her $X \neq \emptyset$ topolojik uzay ve her sonsuz κ çokluk sayısı için X topolojik uzayının bir Y topolojik uzayına, her $1 \leq \mu \leq \kappa$ için $Y \stackrel{\text{top}}{=} Y^\mu$ olacak biçimde gömülebileceğini gösteriniz.

$Y := X^\kappa$ olsun. X uzayının Y uzayına nasıl gömülebileceğini (III.1)'de belirtmiştik. Kalan (3.1.2)'den çıkar. $\square$

Problem 4.0.23

$\mathbb{R}^2$ düzleminin x -eksenine koşut her doğruyla arakesiti bu doğruya yoğun bir kümeden, y -eksenine koşut her doğru ile arakesiti ise tek noktadan oluşan altkümelerinin varlığını kanıtlayınız.

$\omega \leq \mu \leq \mathfrak{c}$ ise her $y \in \mathbb{R}$ değerini tam μ kez alan $\mathbb{Q}$ -doğrusal $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümlerinin varlığını kanıtlayınız.

1. Aradığımız kümeler aslında bazı $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarıdır, dd. alışılmış sözlerle böyle f fonksiyonların graflarıdır.

Birinci Çözüm: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Problem 4.0.11'nin üçüncü çözümünde verilen örten ancak sürekli olmayan toplamsal fonksiyon olsun. İşimizi görür.

*İkinci Çözüm*⁴: Örnek 2.15.18'de verdiğimiz çözüm.

Üçüncü Çözüm: Aradığımız türden bir kümeyi sonluötesi tanımlamayla kuracağız. Oluşturacağımız kümeye A diyelim. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$A(x, \bullet) := \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\} \text{ ve } A(\bullet, y) := \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in A\}$$

olsun. Biz her $A(x, \bullet)$ kümesinin tek ögesi, her $A(\bullet, y)$ kümesinin ise $\mathbb{R}$ 'de yoğun olmasını istiyoruz. Son koşul ise a, b gerçekte sayıları $a < b$ olmak üzere nasıl verilirlerse verilsinler $A(\bullet, y) \cap (a, b) \neq \emptyset$, dd. $A \cap (a, b) \times \{y\} \neq \emptyset$ olması demektir. Demek ki

$$\mathcal{I} := \{(a, b) \times \{y\} \mid a, b, y \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$$

olmak üzere ikinci koşulumuz her $I \in \mathcal{I}$ için $I \cap A \neq \emptyset$ olması demektir. Bu aralıkların gücünün $\mathfrak{c}$ olduğu apaçıktır. Bir $f : \mathfrak{c} \rightleftharpoons \mathcal{I}$ tameşlemesiyle $\mathcal{I}$ aralıklar kümemizi $(I_\xi)_{\xi < \mathfrak{c}}$ olarak iyi sıralayalım. Şimdi işimiz bellidir: Her I_ξ aralığında bir (x_ξ, y_ξ) noktasını seçeceğiz ve bu arada $\xi \neq \xi'$ için $x_\xi \neq x_{\xi'}$ olmasını gözeteceğiz. Bu durumda ikinci koşul tam olarak sağlanır, ancak henüz $\mathbb{R} = \{x_\xi \mid \xi < \mathfrak{c}\}$ olması gerekmez. Bunu gidermek son derece kolaydır.

$\xi < \mathfrak{c}$ olsun ve her $\eta < \xi$ için (x_η, y_η) seçilmiş olsun. x_η ($\eta < \xi$) noktalarından geçen y -eksenine koşut doğruların kümesi

$$D_\xi := \bigcup_{\eta < \xi} \{x_\eta\} \times \mathbb{R}$$

ise, açıkça $\mathfrak{d}(I_\xi \cap D_\xi) \leq \mathfrak{d} \xi < \mathfrak{c}$ olduğundan, $I_\xi \setminus D_\xi \neq \emptyset$. Şimdi (x_ξ, y_ξ) olarak $I_\xi \setminus D_\xi$ kümesinin herhangi bir ögesini seçelim. Bu seçimden dolayı $\xi \neq \xi'$ için $x_\xi \neq x_{\xi'}$ sağlanmıştır. Şimdi $A_0 := \{(x_\xi, y_\xi) \mid \xi < \mathfrak{c}\}$ olsun. Her $A_0(\bullet, y)$ kümesi $\mathbb{R}$ 'de yoğundur. Her $A_0(x, \bullet)$ kümesi tek ögeli veya boş kümedir. Şimdi

$$A := A_0 \cup \{(x, 0) \mid A_0(x, \bullet) = \emptyset\}$$

olarak tanımlarsak bu küme istenen tüm özellikleri taşır.

2. $B \subset \mathbb{R}$ bir Hamel bazı olsun. B kümesini güçleri μ ve $\mathfrak{c}$ olan M ve C gibi iki ayrık parçaya ayıralım. Defalarca yaptığımız gibi çekirdeği

⁴Değerli dostum Koçak'ın Eskişehir'de dersi dinliyormuş gibi görünüp probleme getirdiği çözüm.

$\langle M \rangle_{\mathbb{Q}}$ olan bir $\mathbb{Q}$ -doğrusal ve örten $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlayalım. (2.15.22)'den $\natural \langle M \rangle_{\mathbb{Q}} = \aleph_0 * \mu = \mu$ olur. $y \in \mathbb{R}$ keyfi verilsin. ϕ örten olduğundan $\phi(x) = y$ olacak biçimde bir $x \in \mathbb{R}$ vardır. ϕ fonksiyonu $y \in \mathbb{R}$ değerini $x + \langle M \rangle_{\mathbb{Q}}$ kümesinde, dolayısıyla tam μ kez alır $\square$

1. **Problem 4.0.24** $\mathbb{R}^2$ düzleminin bu düzlemdeki her doğruyu tam iki noktada kesen altkümelerinin varlığını kanıtlayınız (**Mazurkiewicz, 1914**). Bu sav $n \geq 1$ olmak üzere her $\mathbb{R}^n$ 'de de doğrudur.

Düzlemde tam $\mathfrak{c}$ çoklukta farklı doğru vardır; bunları $(D_\xi)_{\xi < \mathfrak{c}}$ olarak iyi sıralayalım. $\mathfrak{c}$ 'de ξ üzerinden tümevarımla $\mathbb{R}^2$ düzlemimizin A_ξ altkümelelerini aşağıdaki koşulları sağlayacak biçimde tanımlayacağız:

- (1) A_ξ kümesi en fazla iki öge içerir.
- (2) $\bigcup_{\eta \leq \xi} A_\eta$ kümesinde bir doğru üzerinde bulunan üç nokta yoktur.
- (3) $\bigcup_{\eta \leq \xi} A_\eta$ kümesi D_ξ doğrusunun tam iki noktasını içerir.

Bunlar sağlandığında $A := \bigcup_{\xi < \mathfrak{c}} A_\xi$ kümesi problemin istediği türden bir kümedir. Öyleyse (1),(2),(3) sağlanacak biçimde A_ξ kümelerini seçebileceğimizi göstermek yeterlidir.

Şimdi $\xi < \mathfrak{c}$ olsun ve her $\eta < \xi$ için üç koşulumuz sağlanacak biçimde A_η kümelerimiz seçilmiş olsunlar. $\natural \xi < \mathfrak{c}$ ve $\natural A_\eta \leq 2$ olduğundan $B := \bigcup_{\eta < \xi} A_\eta$ kümesinin gücü $< \mathfrak{c}$ 'dir. Dolayısıyla B kümesine ait iki noktadan geçen tüm doğruların D_B kümesinin gücü de $\leq \natural B^2 < \mathfrak{c}$ 'dir. (2)'den dolayı $B \cap D_\xi$ en fazla iki öğelidir. Bu küme iki öğeli ise $A_\xi = \emptyset$ seçersek (1),(2),(3) sağlanır. $B \cap D_\xi$ ikiden az öge içeriyorsa D_ξ doğrusu her $D \in D_B$ doğrusunu en fazla bir noktada keser. Bu durumda

$$\natural \left(D_\xi \cap \bigcup D_B \right) = \natural \left(\bigcup_{D \in D_B} D_\xi \cap D \right) \leq \natural D_B < \mathfrak{c}.$$

Şimdi $A_\xi \subseteq D_\xi \setminus \bigcup D_B$ kümesi $B \cap D_\xi = \emptyset$ ise iki öğeli, $B \cap D_\xi$ tek öğeli ise bir öğeli olarak seçilsin. Her üç koşul da sağlanır.

$n > 2$ için de bu kanıt kelimesi kelimesine değişmeden geçerlidir. $n = 1$ için zaten tek bir doğrumuz vardır ve üzerinde seçeceğimiz iki öğenin oluşturduğu küme işimizi görür. $\square$

Problem 4.0.25 $\mathbb{R}^2$ düzleminin ayrık çemberlerin birleşimi olarak yazılamayacağını kanıtlayınız.

Düzlemin ayrık çemberlerle doldurulabileceğini varsayalım ve bunlardan herhangi bir C çemberini seçlim. Merkezi m yarıçapı ise r olsun. Düzlemi dolduran ayrık çemberlerimiz özellikle bu çemberin içini, dd. $D = D(m, r) =$

$\{x \mid \|x - m\| < r\}$ açık dairesini doldururlar. Ayrık çemberlerimizden tek olarak belirli bir C_1 çemberi m merkezinden geçer. C_1 çemberinin merkezine m_1 , yarıçapına r_1 dersek $C \cap C_1 = \emptyset$ olduğundan $r_1 < 2^{-1}r$ ve $m_1 \in D$ olmak zorundadırlar. Aynı mantıkla her $n \geq 2$ için m_{n-1} 'den geçen merkezi m_n yarıçapı r_n olan ayrık C_n çemberi seçilir ve elbette $\|m_{n+1} - m_n\| < 2^{-n-1}r$ olur. Bu çemberler bir anlamda içiçe çemberler dizisi oluştururlar. Bir $m^* \in \overline{D}$ ile $\lim m_n = m^*$ olduğunu görmek kolaydır. Düzlemi doldurduğumuz ayrık çemberlerden bir tanesi, ona C' diyelim, m^* noktasından geçer. Ancak m^* noktasından geçen ve her C_n çemberiyle ayrık olan bir çember yoktur. $\square$

Problem 4.0.26 $\mathbb{R}^3$ uzayımızın ayrık çemberlerin birleşimi olarak yazılabileceğini kanıtlayınız.

$\mathbb{R}^3$ uzayımızın noktalarını $(p_\xi)_{\xi < \mathfrak{c}}$ olarak iyi sıralayalım. Şimdi uzayımızı ayrık C_ξ , $\xi < \mathfrak{c}$ çemberleriyle dolduracağımızı umuyoruz. Ana düşüncemiz özetle şudur. $p_\xi \in C_0$ olacak biçimde herhangi bir C_0 çemberi alırız. Bu çember p_0 noktası dışında $\mathfrak{c}$ kadar başka p_ξ noktaları da içerir. İkinci adımı irdeleme ana fikir için yeterlidir. $p_1 \notin C_0$ ise p_1 noktasından geçen ve C_0 ile ayrık bir C_1 çemberi seçeceğiz. Eğer $p_1 \in C_0$ ise C_1 olarak C_0 ile ayrık herhangi bir çemberle yolumuza devam edeceğiz. Her iki durumda da hedefimiz $p_1 \in C_0 \cup C_1$ ve son seçtiğimiz çemberin kendinden önce seçilen(ler)le ayrıklığı olmuştur. Demek ki hedefimiz C_ξ çemberlerini

$$\text{Köşegen} \quad p_\xi \in \bigcup_{\eta \leq \xi} C_\eta =: B_\xi$$

$$\text{Koruma} \quad C_\xi \cap \bigcup_{\eta < \xi} C_\eta = \emptyset$$

olacak biçimde seçmektir. Eğer her ξ için böyle bir C_ξ çemberi seçebilirsek gerçekten de $\mathbb{R}^3 = \bigsqcup_{\xi < \mathfrak{c}} C_\xi$ olur.

Şimdi $\xi < \mathfrak{c}$ olsun ve $\{C_\eta \mid \eta < \xi\}$ çember ailesi her iki koşulu da sağlayacak biçimde seçilmiş olsunlar. $B_{<\xi} := \bigcup_{\eta < \xi} C_\eta$ olsun. $\mathbb{R}^3 \setminus B_{<\xi} \neq \emptyset$ olduğunu ve orada koşullarımız sağlanacak biçimde C_ξ çemberini seçebileceğimizi görelim. L , uzayımızın herhangi bir doğrusu olsun. L doğrusu herhangi bir C_η çemberini en fazla iki noktada keseceğinden ve $\mathfrak{h}\xi < \mathfrak{c}$ olduğundan $\mathfrak{h}(L \cap B_{<\xi}) \leq 2 * \mathfrak{h}\xi < \mathfrak{c}$. Diğer yandan $\mathfrak{h}L = \mathfrak{c}$ 'dir. Bu nedenle $B_{<\xi}$, L doğrusunu dolayısıyla uzayımızı dolduramaz.

Şimdi $p_\xi \notin B_{<\xi}$ ise $p = p_\xi$, $p_\xi \in B_{<\xi}$ ise p noktası $\mathbb{R}^3 \setminus B_{<\xi}$ kümesinden keyfi seçilsin. Şimdi C_ξ çemberini koruma koşulu sağlanacak biçimde seçebileceğimizi göstereceğiz. p noktasından geçen $\mathfrak{c}$ kadar düzlem varken C_η ($\eta < \xi$) çemberlerinden herhangi birini içeren $\mathfrak{h}\xi < \mathfrak{c}$ kadar düzlem vardır. Bu nedenle p noktasından geçen, ancak hiçbir C_η ($\eta < \xi$) çemberini içermeyen bir D düzlemi seçebiliriz. Bu düzlem yine de bazı C_η çemberlerini kesebilir; elbette en fazla iki noktada! Dolayısıyla $\mathfrak{h}(D \cap B_{<\xi}) \leq 2 * \mathfrak{h}\xi < \mathfrak{c}$

c. D düzleminde p noktasından geçen herhangi bir d doğrusu alalım. D düzleminde p noktasında d doğrusuna teğet $\mathfrak{c}$ kadar çember vardır. Bu çemberlerin tek ortak noktaları p noktasıdır. Diğer yandan $D \cap B_{<\xi}$ kümesinin gücü $< \mathfrak{c}$ olduğundan d düzleminde p noktasından geçen $D \cap B_{<\xi}$ ile ayrık çemberler vardır. Bunlardan birini seçip ona C_ξ dersek iki koşulumuz da sağlanır ve işimiz biter. $\square$

Problem 4.0.27 $n \geq 2$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ bir bölge ve $B \subseteq A$ sayılabilirse $A \setminus B$ de bir bölgedir. $A \setminus B$ kümesinin herhangi iki noktası bu kümedeki sonlu sayıda çember parçalarıyla birleştirilebilir. Kanıtlayınız.

Not 2.5.17'de kanıtlandı. $\square$

Problem 4.0.28 $\mathbb{R}^2$ düzleminde her sonsuz A altkümесinden sonsuz bir B altkümесinin izleyen koşul sağlanacak biçimde seçilebileceğini kanıtlayınız: B kümesinden rastgele dört farklı a, b, c, d noktaları verildiğinde a noktası b, c, d noktalarının gerdiği $\Delta(b, c, d)$ üçgeninin içinde değildir (**Koeperke**).

A kümesinin tümü aynı doğru üzerinde olan bir sonsuz B altkümесi varsa bu küme işimizi görür. Bu durumda $\Delta^\circ(b, c, d) = \emptyset$ olur ve elbette $a \notin \Delta^\circ(b, c, d)$.

Şimdi düzlemdeki her doğrunun A kümesini en fazla sonlu noktada kestiğini varsayalım. Önerme A kümesinin sayılabilir sonsuz bir altkümесi için kanıtlanırsa elbette A için de kanıtlanmış olur. Bu nedenle gbk.:

$$(*) \quad \mathfrak{d}A = \aleph_0 \text{ ve her } L \text{ doğrusu için } \mathfrak{d}(A \cap L) < \omega$$

alabiliriz. $f : [A]^4 \rightarrow 2$ fonksiyonu

$$f(u) := \begin{cases} 1 & \exists x_0, \dots, x_3 \in u \ (x_0 \in \Delta^\circ(x_1, x_2, x_3)) \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak açıklansın⁵. Ramsey Teoremi'nden dolayı gücü $\aleph_0$ olan bir $B \subseteq A$ altkümесi $f|[B]^4$ sabit olacak biçimde vardır. Bu sabit değerin zorunlu olarak 0 olduğunu kanıtlayacağız. Bu savı kanıtlar. Tersini varsayalım: $f|[B]^4 \equiv 1$ olsun. Şimdi herhangi üçü bir doğru üzerinde olmayan $x_0, \dots, x_4 \in B$ noktaları, $u = \{x_0, \dots, x_3\} \in [B]^4$ için $f(u) = 1$ ve $x_0 \in \Delta^\circ(x_1, x_2, x_3)$ olacak biçimde seçilsinler; bu $(*)$ koşulundan dolayı mümkündür. Şimdi düzlemde köşeleri x_1, x_2, x_3 olan bir üçgen çizip içine herhangi bir yere x_0 noktasını yerleştiriniz. x_4 noktasını bu üçgenin kenarlarını uzatarak elde ettiğimiz

⁵ $f(u) = 1$ olması u kümesindeki en az bir noktanın diğer üçünün gerdiği üçgenin içine düşmesi demektir.

doğrular üzerinde olmamak koşuluyla düzlemde nereye yerleştirirseniz yerleştirin daima $x_i, x_j \in \{x_1, x_2, x_3\}$ noktalarını $f(x_0, x_i, x_j, x_4) = 0$ olacak biçimde bulabilirsiniz. Bu ise $f|[B]^4 \equiv 1$ ile çelişir. Dolayısıyla $f|[B]^4 \equiv 0$ olmalıdır. $\square$

Problem 4.0.29 $\mathbb{R}$ 'de yoğun ve gücü $\mathfrak{c}$ olan birinci kategoriden altkümelerin varlığını kanıtlayınız.

C Cantor kümesi olmak üzere $X := C \cup \mathbb{Q}$ işimizi görür. $\square$

Problem 4.0.30 Her sayılamaz ve kapalı $K \subseteq \mathbb{R}^n$ için $A \cap K \neq \emptyset$ ve $A^c \cap K \neq \emptyset$ koşulunu sağlayan $A \subseteq \mathbb{R}^n$ altkümelerinin varlığını kanıtlayınız (*Oxtoby* [48]).

$\mathbb{R}^n$ 'de $\mathfrak{c}$ kadar kapalı küme vardır. Diğer yandan kapalı topları göz önüne alırsak $\mathbb{R}^n$ 'de tam $\mathfrak{c}$ tane sayılamaz kapalı küme vardır. Bunları $\mathcal{K} = (K_\alpha)_{\alpha < \mathfrak{c}}$ olarak iyi sıralayalım. Her K_α kümesini gücü $\mathfrak{c}$ 'dir (3.3.8). $\mathbb{R}^n$ kümesini ise $\prec$ ile iyi sıralayalım. Tekrarlı tanımlamayla $(p_\alpha)_{\alpha < \mathfrak{c}}$ ve $(q_\alpha)_{\alpha < \mathfrak{c}}$ dizilerini tanımlayacağız. K_0 kümesinin $\prec$ sıralamasına göre ilk iki öğesi sırasıyla p_0, q_0 olsunlar. $\alpha < \mathfrak{c}$ ve her $\beta < \alpha$ için p_β, q_β noktaları seçilmiş olsunlar.

$$M_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} \{p_\beta, q_\beta\}$$

için $\mathfrak{h}M_\alpha = \mathfrak{h}\alpha + \mathfrak{h}\alpha < \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ olduğundan $H_\alpha := K_\alpha \setminus M_\alpha$ kümesinin gücü $\mathfrak{c}$ 'dir. p_α, q_α noktaları bu sırada H_α kümesinin $\prec$ sıralamasına göre ilk iki öğesi olsun. Şimdi $A := \{p_\alpha \mid \alpha < \mathfrak{c}\}$ kümesi işimizi görür; çünkü her α için $p_\alpha \in A \cap K_\alpha$ ve $q_\alpha \in A^c \cap K_\alpha$. $\square$

Problem 4.0.31 1. $\mathbb{R}^n$ 'de, kapalı her altkümesi sayılabilir olan sayılamaz bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin varlığını kanıtlayınız.

2. $\mathbb{R}^n$ 'de, ne $\mathbb{R}^n \setminus A$ ne de A 'nın kusursuz bir altküme içermediği kümelerin varlığını kanıtlayınız.

1. Bir önceki çözümdeki A kümesini alınız.

2. *Birinci Çözüm.* Her kusursuz kümenin gücü $\mathfrak{c}$ olduğundan aynı A kümesi işimiz görür.

2. *İkinci Çözüm:* Bir önceki problemin çözümünü bu kez K_α kümelerini kusursuz kümeler olarak tekrarlayarak elde ettiğimiz kümeye B dersek her kusursuz küme kısmen B 'nin, kısmen de $\mathbb{R}^n \setminus B$ 'nin içine düşecektir. $\square$

Problem 4.0.32 V bir $\mathbb{K}$ vektör uzayı ise İyi Sıralama Aksiyomunu kullanarak V vektör uzayının bir bazının varlığını kanıtlayınız. Ayrıca baştan bir

$A \subseteq V$ doğrusal bağımsız kümesi verilirse $A \subseteq B$ olmasının sağlanabileceğini kanıtlayınız.

$\kappa := \aleph V$ olmak üzere V kümesinin $V = (x_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ olarak iyi sıralayalım. Tekrarlı tanımlamayla bir B bazını tanımlayacağız. $x_0 \neq 0$ ise $x_0 \in B$, $x_0 = 0$ ise $x_1 \in B$ olsun. $\alpha < \kappa$ ve her $\beta < \alpha$ için x_β vektörünün B kümesinde olup olmadığına karar verilmiş olsun. $V_\alpha := \langle \{x_\beta \mid \beta < \alpha\} \rangle$ için $x_\alpha \in B : \iff x_\alpha \notin V_\alpha$ olsun.

B bir bazdır. Tanım gereği her α için ya $x_\alpha \in B$ ya da $x_\alpha \in V_\alpha \subseteq \langle B \rangle$. Dolayısıyla $V = \langle B \rangle$. Diğer yandan B doğrusal bağımsız bir kümedir. Gerçekten $S \subseteq B$ sonlu bir altküme olmak üzere her $x_\beta \in S$ için $\lambda_\beta \neq 0$ olmak üzere $\sum_{x_\beta \in S} \lambda_\beta x_\beta = 0$ olsun. Buradan $\alpha := \max\{\beta \mid x_\beta \in S\}$ olmak üzere

$$x_\alpha = - \sum_{x_\beta \in S \setminus \{x_\alpha\}} \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha} x_\beta \in V_\alpha$$

çelişisini elde ederiz.

Baştan doğrusal bağımsız bir A kümesi verildiğinde V kümesini iyi sıralarken önce A iyi sıralanarak işe başlarız. Bu durumda $A \subseteq B$ olacağı apaçıktır⁶. $\square$

Problem 4.0.33 $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ uzayının Lebesgue ölçülebilir ve ölçüsü sıfır olan bir Hamel bazı olduğunu kanıtlayınız. Not: Cantor'un süreklilik hipotezi altında Lebesgue ölçülemeyen Hamel bazları da vardır.

Birinci çözüm: (3.4.4).

İkinci çözüm: $C \subset [0, 1]$ Cantor kümemiz olsun. $A := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n + C)$ olsun. $\mathbb{R} = A + C$ (3.4.3) olduğundan $\langle A \rangle_{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. $\langle A \rangle_{\mathbb{Q}}$ için seçeceğimiz bir $B \subseteq A$ bazı aynı zamanda $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ uzayının da bir bazıdır. μ ile $\mathbb{R}$ 'nin Lebesgue ölçüsünü gösterirsek $\mu(C) = 0$ olduğundan önce $\mu(A) = 0$, dolayısıyla $\mu(B) = 0$ elde edilir. $\square$

Problem 4.0.34 Bir $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesini ve sayılabilir sonsuz bir $I \subseteq \mathbb{R}$ kümesini her $i \in I$ için $A_i := i + A$ ötelemesi $\mathbb{R}$ 'de yoğun ve $\{A_i\}_{i \in I}$ ise $\mathbb{R}$ 'nin bir parçalanışı olacak biçimde bulunuz (**Rubin** [49]).

$\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ uzayımızın bir H Hamel bazını ve onun bir $h \in H$ ögesini seçelim. $A := \langle H \setminus \{h\} \rangle_{\mathbb{Q}}$ olsun. $0 \neq h^* \in H \setminus \{h\}$ için $\mathbb{Q}h^*$ kümesi $\mathbb{R}$ 'de yoğun ve $\mathbb{Q}h^* \subseteq A$ olduğundan A kümesi $\mathbb{R}$ 'de yoğundur. Her $q \in \mathbb{Q}$ için $A_q := qh + A$ kümesi de $\mathbb{R}$ 'de yoğundur. Bir bazdan yola çıktığımızdan $q \neq q'$ için açıkça $A_q \cap A_{q'} = \emptyset$ ve $\mathbb{R} = \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q$. $\square$

⁶Bu kanıt Hamel'in [29] makalesinden esinlenmiştir.

Problem 4.0.35 $\mathbb{R}$ gerçek sayılar kümesinin bir A öz altkümesinin, her $r \in \mathbb{R}$ için

$$\mathcal{A}_r := \{A + nr \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ailesi sonlu olacak biçimde bulunabileceğini kanıtlayınız (**Rubin** [49]).

$\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ vektör uzayının bir H Hamel bazını alalım.

$$A := \left\{ \sum_{h \in S} m_h h \mid S \subseteq H \wedge \#S < \omega \wedge \forall h \in S (m_h \in \mathbb{Z}) \right\}$$

olsun. Her şeyden önce gerçekten $A \subset \mathbb{R}$ bir öz altkümedir. $q_h \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ olmak üzere, H bir baz olduğundan $\sum_{h \in S} q_h h \notin A$. $r \in \mathbb{R}$ için $\mathcal{A}_r = \{A + nr \mid n < \omega\}$ ailesi işimizi görür. $r = 0$ ise $\mathcal{A}_r = \{A\}$. Şimdi $r \neq 0$ olsun. $r \in \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ olduğundan $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Q}^*$ sıfırdan farklı rasyonel sayılar ve $h_1, \dots, h_n \in H$ olmak üzere tek türlü $r = \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_n h_n$ olarak yazılabilir. Kısaltılmış gösterimlerle

$$\alpha_i = \frac{p_i}{q_i}, q_i > 0, i = 1, \dots, n$$

ve $q \in \mathbb{N}$ ise $q_1, \dots, q_n$ sayılarının en küçük ortak katı olsun. Bu durumda $qr \in A$ olur ve A toplamaya göre bir grup olduğundan $A + qr = A$ olur. Buradan da $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m \equiv n(q)$, dd. m ve n sayıları q ile bölündüğünde aynı kalanı veriyorlarsa $A + mr = A + nr$ elde edilir. Sonuçta

$$\mathcal{A}_r = \{A + nr \mid 0 \leq n \leq q - 1 \wedge n \in \mathbb{N}\}$$

ailesi q ögeli bir küme olur. $\square$

Problem 4.0.36 $\mathcal{A} = \{x + A \mid x \in \mathbb{R}\}$ sayılabilir olacak biçimde $\mathbb{R}$ 'nin bir A öz altkümesinin olduğunu kanıtlayınız.

(4.0.34)'teki A kümesi işimizi görür. Gerçekten de H , $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ uzayının bir Hamel bazı olsun. $h \in H$ ve $A := \langle H \setminus \{h\} \rangle_{\mathbb{Q}}$ olsun. Elbette $A \subset \mathbb{R}$. $\mathbb{R} = A \oplus \mathbb{Q}h$. Her $x \in \mathbb{R}$ için tek olarak belirli $y \in A$ ve $q \in \mathbb{Q}$ ile $x = qh + y$. Dolayısıyla her $a \in A$ için $a + A = A$ olduğundan

$$x + A = qh + y + A = qh + A$$

Dolayısıyla $\{x + A \mid x \in \mathbb{R}\} = \{qh + A \mid q \in \mathbb{Q}\}$. $\square$

Problem 4.0.37 Cantor kümesini oluştururken atılan her açık aralıkta sabit olan sürekli bir $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunun ayrıca $f(0) = 0$ ve $f(1) = 1$ olacak biçimde bulunabileceğini kanıtlayınız.

C Cantor kümesi oluşturulurken n . adımda atılalan açık aralıklardan sonra geriye kalan 2^n kapalı aralıkların birleşimi C_n ise tanım gereği $C = \bigcap C_n$. $I = [0, 1]$ birim kapalı aralık ve $D_n := I \setminus C_n$ olsun. İlk n adımda atılan açık aralıklar soldan sağa $I_i^n, 1 \leq i \leq 2^n - 1$ olarak sıralansın. Parçalı doğrusal sürekli $f_n : I \rightarrow I$ fonksiyonu I_i^n açık aralığında sabit olarak $i2^{-n}$ değerini alsın ve diğer yerlerde doğrusal genişletilsin (böylece grafi bir poligondur).

$$f_{n+1}|_{I_i^n} = f_n|_{I_i^n}, \quad 1 \leq i \leq 2^n - 1.$$

(f_n) dizisi artandır ve

$$\|f_{n+1} - f_n\| = \sup\{|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \mid x \in I\} < 2^{-n}$$

Dolayısıyla dizimiz I aralığında düzgün yakınsaktır. $f = \lim f_n$ fonksiyonu istenen özellikleri sağlar, ayrıca artandır ve **Cantor-Lebesgue** fonksiyonu olarak bilinir. $\square$

Problem 4.0.38 X bir küme ve $\mathcal{F}$ ise değer bölgeleri $[X]^{\leq \omega}$ veya X , tanım bölgeleri ise $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere X^n tipinde kümeler olan bir fonksiyonlar ailesi olsun. Burada n doğal sayısı farklı fonksiyonlarda farklı olabilir. $\mathcal{F}$ sayılabilir olsun. Bu durumda:

1. Her $Z \subseteq X$ altkümesine karşılık bu kümeyi içerip $\mathcal{F}$ 'nin etkisi altında kapalı olan kümeler içinde $\subseteq$ bağıntısına göre en küçük olan bir Y kümesi vardır. Bu kümeyi $kp_{\mathcal{F}}(Z)$ ile göstereceğiz. $\aleph kp_{\mathcal{F}}(Z) \leq \aleph Z + \aleph_0$, dolayısıyla Z sonsuz ise $\aleph kp_{\mathcal{F}}(Z) = \aleph Z$;
2. $\aleph X = \kappa > \aleph_0$ ise X kümesinin, $\mathcal{F}$ 'nin etkisi altında kapalı olan altkümelerinin artan bir $(X_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ dizisi her $\alpha < \kappa$ için $\aleph X_\alpha < \kappa$, $X = \bigcup_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ ve her limit λ için $X_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ olacak biçimde vardır.

$\mathcal{F}$ ailesindeki $f : X^n \rightarrow X$ tipindeki fonksiyonları $f^*(x) = \{f(x)\}$ ile tanımlanmış $f^* : X^n \rightarrow [X]^1$ tipindeki fonksiyonla özdeşleyeceğiz.

1. $\mu := \aleph Z + \aleph_0$ olsun. Tümevarımla bir $(Z_n)_{n < \omega}$ küme dizisi tanımlayacağız. $Z_0 = Z$ olsun. Z_n tanımlanmışsa

$$Z_{n+1} := Z_n \cup \bigcup \{F(z) \mid F \in \mathcal{F} \wedge \text{tan} F = X^m \wedge z = (z_1, \dots, z_n) \in Z_n^m\}$$

olarak açıklansın. Tümevarımla $\aleph Z_n \leq \mu$ olduğu kolayca görülebilir. Sav $n = 0$ için doğrudur ve n için kanıtlanmış olsun. Tanım gereği Z_{n+1} iki kümenin birleşimidir. Birincisi Z_n ve tümevarım koşulundan $\aleph Z_n \leq \mu$. İkincisi ise $F(z)$ kümelerinin birleşimidir. $\aleph F(z) \leq \aleph_0$ ve ikinci birleşimin

damga kümesi $\mathcal{F} \times [Z_n]^{<\omega}$ 'nın bir altkümesidir. Tanım gereği μ sonsuz olduğundan her $m < \omega$ için $\mathfrak{h}Z_n^m \leq \mu$, dolayısıyla $\mathfrak{h}[Z_n]^{<\omega} \leq \mu$. Böylece damga kümesinin gücü $\leq \mathfrak{h}\mathcal{F} * \mathfrak{h}[Z_n]^{<\omega} \leq \mu$ olur. Ayrıca daima $\mathfrak{h}F(z) \leq \aleph_0$ olduğundan birleşimin gücü $\leq \aleph_0 * \mu = \mu$ olur.

$kp_{\mathcal{F}}(Z) := \bigcup_{n < \omega} Z_n$ olsun. Tanım gereği $Z \subseteq kp_{\mathcal{F}}(Z) \subseteq X$ ve $\mathfrak{h}kp_{\mathcal{F}}(Z) \leq \aleph_0 * \mu = \mu$. Şimdi $kp_{\mathcal{F}}(Z)$ 'nin $\mathcal{F}$ 'nin etkisi altında kapalı olduğunu görelim. $F \in \mathcal{F}$ keyfi verilsin ve $\tan F = X^m$ olsun. Eğer $z_1, \dots, z_m \in kp_{\mathcal{F}}(Z)$ ise bir $n < \omega$ ile $z_1, \dots, z_m \in Z_n$, dolayısıyla $F(z_1, \dots, z_m) \subseteq Z_{n+1} \subseteq kp_{\mathcal{F}}(Z)$ olur.

$Z \subseteq Y$ ve Y kümesi $\mathcal{F}$ 'nin etkisi altında kapalı ise tümevarımla her n için $Z_n \subseteq Y$ olduğunu görmek kolaydır, bu ise $kp_{\mathcal{F}}(Z) \subseteq Y$ demektir.

2. X kümesini $(x_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ olarak iyi sıralayalım ve $\alpha < \kappa$ için $Y_\alpha := \{x_\xi \mid \xi < \alpha\}$ ve $X_\alpha := kp_{\mathcal{F}}(Y_\alpha)$ olsun. $\mathfrak{h}Y_\alpha = \mathfrak{h}\alpha < \kappa$ olduğundan (1)'den dolayı $\mathfrak{h}X_\alpha \leq \mathfrak{h}\alpha + \aleph_0 < \kappa$ olur. $X = \bigcup_{\alpha < \kappa} Y_\alpha$ olduğundan $X = \bigcup_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ olduğu apaçıktır. λ bir limit sıra sayısı ise $Y_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} Y_\alpha$ olduğundan $X_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} X_\alpha$ olur. $(Y_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ kesin artan bir dizi olduğundan $(X_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ de artandır. $\square$

Problem 4.0.39 $\mathbb{R}^2$ düzleminin her X altkümesinin sayılabilir bir $\mathcal{A}$ parçalanışının her $A \in \mathcal{A}$ kümesinin farklı iki noktasının birbirine uzaklığı daima irrasyonel olacak biçimde bulunabileceğini kanıtlayınız (Erdős-Hajnal).

Önermeyi $\kappa = \mathfrak{h}X$ üzerinden tümevarımla kanıtlayacağız. $\kappa \leq \aleph_0$ ise kanıtlanacak bir şey yoktur: X kümesi sayılabilir çoklukta tek ögeli kümelelerin birleşimi olarak yazılabilir ve sav doğrudur. Şimdi $\kappa > \aleph_0$ olsun ve önerme gücü κ 'dan küçük olan her $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ için kanıtlanmış olsun. Her $p, q \in (\mathbb{R}^2)^2$ için $F_{pq} : (\mathbb{R}^2)^2 \longrightarrow [\mathbb{R}^2]^{<\omega}$ fonksiyonu

$$F_{pq}(x, y) := \{z \mid \|x - z\| = p \wedge \|y - z\| = q\}, (x \neq y \text{ için}), \text{ ve} \\ F_{pq}(x, x) := \emptyset$$

ile tanımlansın. $x \neq y$ için düzlemde iki çemberin arakesiti olarak $F_{pq}(x, y)$ en fazla iki ögeli bir kümedir. Bir önceki problemde $\mathcal{F} := \{F_{pq} \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$ olarak $\mathcal{F}$ 'nin etkisi altında kapalı genişleyen bir $(X_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ dizisini $X = \bigcup_{\alpha < \kappa} X_\alpha$ olacak biçimde oluşturalım.

Aradığımız A_n kümelerini bir $g : X \longrightarrow \omega$ yardımıyla $A_n := g^{-1}[\{n\}]$ olarak kazanmak istiyoruz. Bu durumda

$$(*) \quad g(x) = g(y) \wedge x \neq y \implies \|x - y\| \notin \mathbb{Q}$$

olmalıdır. Böyle bir fonksiyonu α üzerinden tümevarımla tanımlayacağız.

$\alpha < \kappa$ ve önerme her $\beta < \alpha$ için kanıtlanmış olsun. Eğer α bir limit sıra sayısı ise g şimdiden $X_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta$ 'da tanımlanmıştır ve $(*)$ özelliğini

sağlar. Şimdi α bir ardıl, örneğin $\alpha = \beta + 1$ olsun. g fonksiyonu X_β kümesinde tanımlanmıştır ve biz onu $Z = X_{\beta+1} \setminus X_\beta$ kümesine genişleteceğiz.

$Z = \emptyset$ ise yapacağımız bir iş yoktur. Şimdi $Z \neq \emptyset$ olsun. $\aleph Z \leq \aleph X_{\beta+1} < \kappa$ olduğundan tümevarım koşulundan dolayı (*) bağıntısını sağlayan bir $h : Z \rightarrow \omega$ fonksiyonu bulabiliriz. İlk akla gelen şey, g fonksiyonunu Z kümesine h olarak genişletmek, doğru değildir. Açalım: X_β kümesi $\mathcal{F}$ ailesinin etkisi altında kapalıdır. Bu tam da uzayımızın X_β kümesinin *iki farklı* noktasına uzaklıkları rasyonel sayılar olan noktalarının da X_β kümesinde olduğunu söyler. Ancak uzayımızda X_β kümesinin *bir tek* noktasına rasyonel uzaklıkta noktalar olabilir ve bu noktalardan bir kısmı Z kümesinde olabilir. Bir $z \in Z$ noktasının X_β kümesinin bir noktasına uzaklığı rasyonel ise *tek* olarak belirli olan bu noktayı x_z ile gösterelim. Şimdi bir $h^* : Z \rightarrow \omega$ fonksiyonunu $z \in Z$ için $h^*(z) \in \{2n, 2n+1\}$ olarak tanımlayalım. Elbette h^* fonksiyonu da (*) koşulunu sağlar. Şimdi g fonksiyonunu Z kümesine, gerekirse bir ince ayarla, h^* olarak genişleteceğiz; ancak bir z için sözünü ettiğimiz türden bir x_z varsa $g(z)$ değerini $g(x_z)$ 'den farklı olacak biçimde ayarlayacağız. Tümevarım tamamlanmıştır. $A_n := g^{-1}[\{n\}]$ olmak üzere $\mathcal{A} = \{A_n \mid n < \omega\}$ işimizi görür. $\square$

Problem 4.0.40 $\mathbb{R}^2$ düzlemimizin aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\{A, B\}$ parçalanışının olamayacağını gösteriniz:

1. y -eksenine koşut her doğru B kümesini sayılabilir noktada keser.
2. x -eksenine koşut her doğru A kümesini sonlu noktada keser (**Tietze** [57]).

Böyle bir $\mathbb{R}^2 = A \sqcup B$ parçalanışının bulunduğunu varsayalım. Herhangi bir $M \subseteq \mathbb{R}^2$ altkümesi ve $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$M(x, \bullet) := \{y \mid (x, y) \in M\} \text{ ve } M(\bullet, y) := \{x \mid (x, y) \in M\}$$

olsun. Şimdi $X \subset \mathbb{R}^2$ sayılabilir sonsuz bir küme olsun. Her $x \in X$ için $B(x, \bullet)$ sayılabilir olduğundan $Y := B(X, \bullet) := \bigcup_{x \in X} B(x, \bullet)$ sayılabilir. $\exists y^* \in \mathbb{R} \setminus Y$. Tanım gereği her $x \in X$ için $(x, y^*) \notin B$. $\{A, B\}$ uzayımızın bir parçalanışı olduğundan hipotezimize aykırı biçimde her $x \in \mathbb{R}$ için $(x, y^*) \in A$ olur ve x -eksenine koşut $y = y^*$ doğrusu A kümesini sonsuz noktada keser! $\square$

Problem 4.0.41 X ve Y güçleri $\aleph_\mu$ olan iki küme ve $\aleph_\nu < \aleph_\mu$ bir başka çokluk sayısı olsun. $Z = X \times Y$ kümesinin bir $Z = A \sqcup B$ parçalanışının her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $\aleph(B \cap \{x\} \times Y) \leq \aleph_\nu$ ve $\aleph(A \cap X \times \{y\}) \leq \aleph_\nu$

olacak biçimde bulunabilmesi için gerek ve yeter koşulun $\mu = \nu + 1$ olduğunu gösteriniz(**Tietze** [57])⁷.

$\kappa = \aleph_\mu$ olmak üzere X ve Y kümelerinin öğelerini $(x_\xi)_{\xi < \kappa}$ ve $(y_\xi)_{\xi < \kappa}$ olarak iyi sıralayalım. $M(x, \bullet)$ ve $M(\bullet, y)$ bir önceki çözümdeki gösterimler olsunlar.

1. $\mu = \nu + 1$ olsun.

$$A := \{(x_\alpha, y_\beta) \mid \alpha \leq \beta < \kappa\} \text{ ve } B := \{(x_\alpha, y_\beta) \mid \beta < \alpha < \kappa\}$$

aldığımızda $Z = A \sqcup B$ istenen türden bir parçalanıştır.

2. Şimdi $\mu > \nu + 1$ olsun ve $Z = A \sqcup B$ 'nin istenen türden bir parçalanış olduğunu varsyalım. $N \subseteq Y$ gücü $\aleph_{\nu+1}$ olan bir altküme olsun. Her $y \in N$ için $\mathfrak{h}A(\bullet, y) \leq \aleph_\nu$ olduğundan

$$\mathfrak{h}A(\bullet, Y) = \mathfrak{h}\left(\bigcup_{y \in Y} A(\bullet, y)\right) \leq \aleph_\nu * \aleph_{\nu+1} = \aleph_{\nu+1} < \aleph_\mu.$$

Bu nedenle bir $x^* \in X \setminus A(\bullet, Y)$ seçebiliriz. Bu durumda her $y \in N$ için $(x^*, y) \notin A$, dolayısıyla $(x^*, y) \in B$ olacağından

$$\mathfrak{h}(B \cap \{x^*\} \times Y) \geq \mathfrak{h}(\{x^*\} \times N) = \mathfrak{h}N = \aleph_{\nu+1} > \aleph_\nu$$

olur ki bu önermenin koşullarıyla çelişir. $\square$

Problem 4.0.42 Cantor'un süreklilik hipotezi, $\mathbb{R}^2$ düzleminin x -eksenine koşut her doğruyla sayılabilir noktada kesişen bir A kümesiyle y -eksenine koşut her doğruyla sayılabilir noktada kesişen bir $B = \mathbb{R}^2 \setminus A$ kümesine parçalanabilmesine denktir(**Sierpinski** [55])⁸.

Bir önceki problemde $\aleph_\mu = \mathfrak{c}$ ve $\nu = 0$ aldığımızda sav elde edilir. $\square$

Problem 4.0.43 a, b, c gerçekte sayıları $\mathbb{Q}$ üzerinden doğrusal bağımsızsalar $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının, f fonksiyonu a , g fonksiyonu b ve $f + g$ fonksiyonu c periyotlu olacak biçimde bulunabileceklerini kanıtlayınız.

a, b, c gerçekte sayıları $\mathbb{Q}$ üzerinden doğrusal bağımsız olsunlar. $\{a, b, c\}$ kümesini $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ uzayımızı bir H Hamel bazına tamamalayalım. $f(0) = f(a) =$

⁷Tietze bu teoremi bir sonraki problemde işleyeceğimiz Sierpinski Teoremi'ndeki düşünceleri izleyerek kanıtladığını belirtir. Bu çalışmada aslında daha genel olarak $\mathfrak{h}X = \kappa_1$, $\mathfrak{h}Y = \kappa_2$, $\mu_1 \leq \kappa_1, \mu_2 \leq \kappa_2$ olmak üzere x -eksenine koşut doğrular tarafından en fazla μ_1 noktada ve y -eksenine koşut doğrular tarafından en fazla μ_2 noktada kesilen parçalanmaları araştırmıştır.

⁸Aynı yöntemle $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ birim kareyi de aynı özellikli A, B kümelerine parçalayabilirsiniz. Bu durumda Fubini Teoremi'ni kullanarak A, B kümelerinin Lebesgue ölçülemez olduklarını kolayca görebilirsiniz.

$0, f(c) = 2$ ve her $x \in H \setminus \{a, c\}$ için $f(x) = 1, g(0) = g(b) = 0, g(c) = -2$ ve her $x \in H \setminus \{b, c\}$ için $g(x) = 1$ olsun. Bu fonksiyonları $\mathbb{Q}$ doğrusal olarak $\mathbb{R}$ 'ye genişletelim. f ve g işimizi görürler. $\square$

Problem 4.0.44 $\mathbb{R}$ uzayının her kusursuz altkümesinde her x değerini $\mathfrak{c}$ kez alan bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun varlığını kanıtlayınız (**Halperin** [28]).

$\mathbb{R}$ kümesini $\prec$ ile $(x_\alpha)_{\alpha < \mathfrak{c}}$ olarak iyi sıralayalım. $\mathbb{R}$ uzayımızın $\mathfrak{c}$ kadar kusursuz kümesi vardır ve her kusursuz kümenin gücü de $\mathfrak{c}$ 'dir. Şimdi kusursuz kümelerimizi bir kez $(K_\alpha)_{\alpha < \mathfrak{c}}$ olarak iyi sıralayalım, bir kez de her biri tam $\mathfrak{c}$ kez geçecek biçimde bir $(P_\alpha)_{\alpha < \mathfrak{c}}$ dizisi oluşturalım. Tekrarlı seçmeyle $p_\alpha \in P_\alpha$ noktalarını seçeceğiz. $\alpha < \mathfrak{c}$ ve her $\beta < \alpha$ için p_β seçilmiş olsun. $\mathfrak{c} \alpha < \mathfrak{c}$ olduğundan $P_\alpha^* := P_\alpha \setminus \{p_\beta \mid \beta < \alpha\} \neq \emptyset$. p_α ise $\prec$ iyi sıralamasına göre P_α^* kümesinin minimumu olsun. Böylece her K_α kusursuz kümesinden $\mathfrak{c}$ nokta seçmiş oluruz; bunlar $\{y_{\alpha\beta} \mid \beta < \mathfrak{c}\}$ olsunlar. Şimdi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\alpha, \beta < \mathfrak{c}$ için $f(y_{\alpha\beta}) := x_\alpha$, ve $\mathbb{R} \setminus \{y_{\alpha\beta} \mid \alpha, \beta < \mathfrak{c}\}$ içinse istenildiği gibi açıklansın. Bu fonksiyon elbette her x_α değerini tam $\mathfrak{c}$ kez alır. $\square$

Problem 4.0.45 Her gerçek değeri her açık aralıkta sonsuz kez almasına karşın yine de Lebesgue ölçüsüne göre hemen her yerde sıfır olan bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun varlığını kanıtlayınız.

Problem 4.0.33'te kanıtlandığı gibi $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ uzayının Lebesgue ölçülebilir ve $\mu(H)$ Lebesgue ölçüsü 0 olan bir H Hamel bazını alalım. $\mathfrak{c}H = \mathfrak{c}$ olduğundan bir örten $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü vardır. Bir $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $0 \neq q \in \mathbb{Q}$ ve her $h \in H$ için $f(qh) := f(h)$, diğer yerlerde özdeş olarak 0 olarak açıklansın. Şimdi $a < b$ ve λ gerçek sayıları keyfi verilsinler. $f|H$ örten olduğundan $f(h) = \lambda$ olacak biçimde bir $h \in H$ vardır. $\mathbb{Q}h$ kümesi $\mathbb{R}$ 'de yoğun olduğundan bu kümenin (a, b) aralığında sıfırdan farklı sonsuz ögesi vardır ve tüm bu noktalarda f fonksiyonu λ değerini alır. $\mu(H) = 0$ olduğundan $S := \bigcup_{h \in H} \mathbb{Q}h$ bir sıfır kümesidir. Diğer yandan f fonksiyonu $\mathbb{R} \setminus S$ kümesinde tanım gereği özdeş olarak sıfırdır. $\square$

Problem 4.0.46 Her $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun Lebesgue ölçüsü sıfır olan bir küme dışında bir Darboux fonksiyonuna eşit olduğunu kanıtlayınız.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ keyfi verilsin. g fonksiyonu Problem 4.0.45'teki Darboux fonksiyonu olsun. $h := f + g$ bir yandan Darboux fonksiyonudur, diğer yandan hemen her yerde f fonksiyonuna eşittir. $\square$

Problem 4.0.47 Hiçbir aralıkta sabit olmamasına karşın sürekli türevlenebilir bir $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\{f(x) \mid f'(x) = 0\}$ tekil değerler kümesinin sayılamaz olabileceğini kanıtlayınız.

$C \subset [0, 1] =: I$ Cantor kümesi olsun. C kümesini oluştururken I 'dan attığımız sayılabilir çoklukta açık aralıklar $I_n = (a_n, b_n), n < \omega$ olsunlar. Bir $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$g(x) := \begin{cases} 0 & x \in C \\ (x - a_n)(b_n - x) & x \in I_n, n < \omega \end{cases}$$

olarak açıklayalım. g fonksiyonu sürekli olduğundan her $x \in I$ için

$$f(x) := \int_0^x g(t)dt$$

ile açıklanan $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli türevlenebilir. $\{x \mid f'(x) = 0\}$ tekil noktalarının kümesi tam da C Cantor kümesidir. $f' = g$ türevi hiçbir yerde yoğun olmayan bir küme dışında pozitif olduğundan f kesin artandır. Bu nedenle $\{f(x) \mid x \in C\}$ tekil değerler kümesi sayılamaz. $\square$

Problem 4.0.48 X ve Y güçleri $\kappa \geq \aleph_0$ olan iki küme, $F := \{f \mid \text{tan} f \subseteq X \wedge f : \text{tan} f \rightarrow Y\}$ ve $\aleph F = \kappa$ olsun. Bir $g : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun X kümesinin gücü κ olan hiçbir altkümesinde hiçbir $f \in F$ ile çakışmayacak biçimde bulunabileceğini gösteriniz.

X ve F kümelerini $(x_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ ve $(f_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ olarak iyi sıralayalım. Sonluötesi tümevarımla bir $g : X \rightarrow Y$ fonksiyonunu her $\xi < \alpha < \kappa$ için $x_\alpha \in \text{tan} f_\xi$ ise $g(x_\alpha) \neq f_\xi(x_\alpha)$ olacak biçimde tanımlayalım. Bu mümkündür. $\alpha < \kappa$ keyfi verilsin ve her $\beta < \alpha$ için g fonksiyonu her $\xi < \beta$ için $x_\beta \in \text{tan} f_\xi$ ise $g(x_\beta) \neq f_\xi(x_\beta)$ olacak biçimde açıklanmış olsun. $\aleph \beta \leq \aleph \alpha < \kappa$ olduğundan her $\beta < \alpha$ için,

$$Y_\beta := \{f_\xi(x_\beta) \mid \xi < \beta \wedge x_\beta \in \text{tan} f_\xi\}$$

olmak üzere $\mu_\beta := \aleph Y_\beta \leq \aleph \beta \leq \aleph \alpha < \kappa$. Dolayısıyla $\aleph \left(\bigcup_{\beta < \alpha} Y_\beta \right) \leq \aleph \alpha * \aleph \alpha$. Şimdi $\aleph \alpha$ sonlu ise $\aleph \alpha * \aleph \alpha$ de sonlu olacağından, $\aleph \alpha$ sonsuz ise $\aleph \alpha * \aleph \alpha = \aleph \alpha$ olacağından daima $\aleph \alpha * \aleph \alpha < \kappa$ olur. $g(x_\alpha)$ değeri $Y \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} Y_\beta \neq \emptyset$ kümesinden seçilebilir.

Herhangi bir $\alpha < \kappa$ için

$$E_\alpha := \{x_\beta \mid g(x_\beta) = f_\alpha(x_\beta)\} \subseteq \{x_\beta \mid \beta < \alpha\}$$

olduğundan $\aleph E_\alpha \leq \aleph \alpha < \kappa$. $\square$

Problem 4.0.49 Bir $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun, gücü $\mathfrak{c}$ olan hiçbir altkümeye sürekli olmayacak biçimde bulunabileceğini kanıtlayınız.

Kanıt. Bir önceki problemde $\kappa = \mathfrak{c}$, $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$ ve $F := \{f \mid \tan f \subseteq \mathbb{R}^n \text{ bir } G_\delta \text{ kümesi} \wedge f : \tan f \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli}\}$ alacağız.

$$\mathcal{G}_\delta := \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid A \text{ bir } G_\delta \text{ kümesi}\}$$

olsun. $\mathcal{T}$ ile $\mathbb{R}^n$ uzayımızın topolojisini gösterelim. $\mathfrak{h}\mathcal{T} = \mathfrak{c}$ olduğunu biliyoruz. Bu nedenle $\mathfrak{h}\mathcal{G}_\delta \geq \mathfrak{c}$. Diğer yandan her $A \in \mathcal{G}_\delta$ sayılabilir çoklukta açık kümelerin arakesiti olduğundan $\mathfrak{h}\mathcal{G}_\delta \leq \mathfrak{h}\mathcal{T}^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Sonuçta $\mathfrak{h}\mathcal{G}_\delta = \mathfrak{c}$. Her bir $A \in \mathcal{G}_\delta$ ayrılabilir metrik uzay olduğundan $\mathfrak{h}\{f \mid f : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli}\} = \mathfrak{c}$, dolayısıyla $\mathfrak{h}F = \mathfrak{c} * \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. Böylece bir önceki problemin koşulları sağlanır. g orada tanımlanan fonksiyon olsun. Şimdi bu g fonksiyonunun işimizi göreceğini kanıtlayacağız.

Bir an için herhangi bir $A^* \subseteq \mathbb{R}^n$ altkümesinde verilen sürekli bir $f^* : A^* \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $A^* \subseteq A$ koşulunu sağlayan bir G_δ kümesinde sürekli olan bir $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna genişletilebileceğini varsayalım. O zaman işimiz gerçekten bitmiştir. Çünkü $f \in F$ olacağından gücü $\mathfrak{c}$ olan bir altkümeye $f = g$ olamaz, dolayısıyla $f^* = g$ de olamaz!

Geriye varsayımın kanıtlanması kalıyor. Bunun içi yol gösterip, tamamlamayı ödev olarak bırakacağız. $x \in \overline{A^*}$ için

$$\omega(x) := \inf\{d(f^*(B_r(x) \cap A^*) \mid r > 0\}$$

(= f^* fonksiyonunun x noktasındaki salınımı) olmak üzere $A := \{x \in A^* \mid \omega(x) = 0\}$ olsun. Aşağıdaki önermeleri ödev olarak bırakıyoruz:

1. $x \in A$ ve $(x_n)_{n < \omega} \subseteq A^*$ için $x = \lim x_n$ ise $(f^*(x_n))_{n < \omega}$ Cauchy dizisidir.
2. $f(x) := \lim_{n < \omega} f^*(x_n)$ iyi tanımlıdır.
3. $A \in \mathcal{G}_\delta$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ süreklidir. ■

Problem 4.0.50 *Bir X normal Hausdorff uzayında normlanmış bir μ ölçüsünün, dd. $\mu(X) = 1$ koşulunu sağlayan bir μ ölçüsünün desteğinin ölçüsünün 0 olabileceğini örnekleyiniz.*

Örnek 3.6.23'te verilen Dieudonné ölçüsü bir örnektir. □

Şimdi problemleri girişte vermemizin üçüncü nedenini söyleyebiliriz. Problemlerimizin bir çoğu birer teoremdir. Belli bir düzeydeki her konuda problemlerin çoğunu zorluk bakımından bir teoremden ayırmak zordur. Ancak “tanım+teorem” biçimindeki bir ders veya bir kitap sıkıcı bulunmaktadır. Teorem niteliğindeki bazı bilgilerin örnek veya problem adı ile sunulmasının derslerde öğrenciyi psikolojik olarak rahatlattığını gözlemledim. Üçüncü nedenimiz budur.



Kaynakça

- [1] **Banach, S. - Tarski, A.:** *Sur la decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fund. Math. IV, 1926.
- [2] **Bourbaki, N.:** *Elements of mathematics: theory of sets*, Berlin: Springer, 2004.
- [3] **Bourbaki, N.:** *General Topology, Part I*, Paris: Hermann, 1966.
- [4] **Cameron, P. J.:** *Sets, logic and categories*, London; New York, Springer, 1999.
- [5] **Cantor, G.:** *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, Crelle Journal f. Mathematik, Bd.77, 1874.
- [6] **Cantor, G.:** *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten 1.*, Mathematische Annalen, Vol. 15, 1879.
- [7] **Cantor, G.:** *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten 2.*, Mathematische Annalen, Vol. 17, 1880.
- [8] **Cantor, G.:** *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten 3.*, Mathematische Annalen, Vol. 20, 1882.
- [9] **Cantor, G.:** *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten 4.*, Mathematische Annalen, Vol. 21, 1883.

- [10] **Cantor, G.:** *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten 5.*, Mathematische Annalen, Vol. 21, 1883.
- [11] **Cantor, G.:** *Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles des points situés dans un espace continu a n dimension*, Acta Mathematica Bd. 2, 1883.
- [12] **Cantor, G.:** *Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten 6.*, Mathematische Annalen, Vol. 23, 1884.
- [13] **Cantor, G.:** *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*, Jahresbericht der Deutsch. math. Vereinig., Bd. I., 1890-91.
- [14] **Cantor, G.:** *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Mathematische Analen, Vol. 46, 1895.
- [15] **Cantor, G.:** *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Mathematische Analen, Vol.49, 1897.
- [16] **Cantor, G.:** *Gesammelte Abhandlungen*, Springer Verlag, 1932.
- [17] **Ciesielski, K.:** *Set theory for the working mathematician*, Cambridge University Press, 1997.
- [18] **Corput, J.G. van der :** *Gonimetrische functies gekarakteriseerd door een functinaalbetrekking*, Euclides 17, 1940.
- [19] **Dedekind, R.:** *Was sind und was sollen die Zahlen*, Gesammelte Werke, Vol.3, 1930
- [20] **Devlin, K.:** *The joy of sets*, New York: Springer -Verlag, 1993.
- [21] **Ebbinghaus, H. D.:** *Einführung in die Mengenlehre*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1979.
- [22] **Finsler, P.:** *Gibt es Widersprüche in der Mathematik?*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Vol.34, 1926.
- [23] **Fraenkel, A.:** *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre*, Mathematische Annalen, Vol.86, 1922.
- [24] **Fraenkel, A.:** *Einleitung in die Mengenlehre*, Springer- Verlag, Berlin 1928.
- [25] **Fraenkel, A.:** *Die neuere Ideen zur Grundlegung der Analysis und Mengenlehre*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Verinigung, Vol.33, 1925.

- [26] **Fraenkel, A.:** *Foundations of set theory. [By] Abraham A. Fraenkel, Yehoshua Bar-Hillel [and] Azriel Levey. With the collaboration of Dirk van Dalen, Amsterdam, North Holland, 1973.*
- [27] **Friedrichsdorf, U.- Prestel, A.:** *Mengenlehre für den Mathematiker*, Vieweg, 1985.
- [28] **Halperin, I.:** *Discontinuous functions with Darboux property*, American Math. Monthly, Vol. 57, 1950.
- [29] **Hamel, G.:** *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$* , Mathematische Annalen, Vol. 60, 1905.
- [30] **Hausdorff, F.:** *Grundzüge der Mengenlehre*, Chelsea Publishing Company, New York 1978 (İlk baskı, Berlin 1914).
- [31] **Heyting, A.:** *Intuitionism: Introduction*, North-Holland, Amsterdam, 1966.
- [32] **Hilbert, D.:** *Über das Unendliche*, Mathematische Annalen, Vol. 95, 1926.
- [33] **Hilbert, D.:** *Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre*, Mathematische Annalen, Vol. 104, 1931.
- [34] **İfrah, G.:** *Rakamların Evrensel Tarihi I*, Tübitak Popüler Bilim Kitapları, 1999.
- [35] **Jech, T.:** *Set theory*, Springer- Verlag, Berlin- New York, 1997.
- [36] **Just, W.-Weese, M.:** *Discovering Modern Set Theory I, II*, American Mathematical Society, Graduate Studies in Math. Volume 8, 1998.
- [37] **Kuratowski, K.:** *Topology I, II*, Academic Press, New York and London, 1966.
- [38] **Landau, E.:** *Grundlagen der Analysis*, Chelsea Publishing Company, New York, 1965.
- [39] **Menger, K.:** *Bemerkungen zu Grundlagenfragen II, Die Mengentheoretischen Paradoxien*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Vol.37, 1928.
- [40] **Monk, J. D.:** *Introduction to set theory*, Huntington, New York, 1980.

- [41] **Neumann, J. von.:** *The Mathematician*, Collected Works I, Pergamon Press. Oxford-London-New York-Paris, 1961.
- [42] **Neumann, J. von.:** *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, J.f. Math.154, 1925.
- [43] **Neumann, J. von.:** *Die Axiomatisierung der Mengenlehre*, Math. Zschr., Vol. 27, 1928.
- [44] **Neumann, J. von.:** *Zur Einführung der transfiniten Zahlen*, Acta Szeged: 1, Vol. 1, No. 3, 1923.
- [45] **Neumann, J. von.:** *Die Zerlegung eines Intervalls in abzählbar viel kongruente Teilmengen*. Fund. Math. 11, Vol. I, No.13, 1928.
- [46] **Neumann, J. von.:** *Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre*, Mathematische Annalen, Vol. 99, 1928.
- [47] **Neumann, J. von.:** *Zur allgemeinen Theorie des Masses*. Fund. Math. 13, Vol. I, No. 26, 1929.
- [48] **Oxtoby, J. C.:** *Measure and Category*, Second edition, Springer- Verlag, New York, 1980.
- [49] **Rubin, L. A.:** *Set Theory for the Mathematician*, Holden-Day, Sanfrancisco, 1967.
- [50] **Rudin, W.:** *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill (1976).
- [51] **Schmidt, J.:** *Mengenlehre I*, Bibliographisches Institut, Manheim, 1966.
- [52] **Schoenflies, A.:** *Über die Stellung der Definition in der Axiomatik*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Verinigung, Vol.20, 1911.
- [53] **Sierpinski, W.:** *Sur quelques problèmes concernant la congruence des ensembles de points*, Elemente der Mathematik, Vol. V, 1950.
- [54] **Sierpinski, W.:** *Sur une décomposition d'ensembles*, Monatsh. Math., 35, 1928.
- [55] **Sierpinski, W.:** *Sur l'hypothèse du continu ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$)*, Fundamenta Mathematicae 5, 179 1924.

- [56] **Suppes, P.:** *Axiomatic set theory*, Dover Publications, New York, 1972.
- [57] **Tietze, H.:** *Beiträge zur allgemeinen Topologie I*, Math. Annalen, Vol. 88, 1923.
- [58] **Vietoris, L.:** *Zur Kennzeichnung der Sinus und verwandter Funktionen durch Funktionalgleichung*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 186, 1949.
- [59] **Weyl, H.:** *Der circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis*, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung 28, 1919.
- [60] **Weyl, H.:** *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik*, Mathematische Zeitschrift 10, 1921.
- [61] **Weyl, H.:** *Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik*, Symposion 1, 1925.
- [62] **Weyl, H.:** *Mathematics and logic. A brief survey, serving as a preface to a review of "The Philosophy of Bertrand Russell"*, The American Mathematical Monthly 53, 1946.
- [63] **Wise, G. L.- Hall, E. B.:** *Counterexamples in probability and real analysis*, Oxford University Press, 1993.
- [64] **Zermelo, E.:** *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, Mathematische Annalen, Vol.65, 1908.
- [65] **Zermelo, E.:** *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)*. Mathematische Annalen, Vol. 59, 1908.
- [66] **Zermelo, E.:** *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*. Mathematische Annalen, Vol. 65, 1908.

Kaynakçalarda verilen kaynakların dışında Geschke, Koepke, Pohlers, Jensen, Spinas ve Rautenberg'in ders notlarından da yararlanılmıştır. Küme-ler kuramının çok bilinen gerçekleri için bir kaynak gösterilmemiştir

İmler Tablosu

$\widetilde{\mathbb{U}}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$	9	$\rightarrow, \Rightarrow, \Leftrightarrow$	71	$\sim, \approx$	111
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	9	I_A	72	c_X	112
$\underline{n}$	10,93	$<, \leq$	75	$\ x\ , B_r(a)$	116
$\neg, \vee, \wedge$	11	$\underline{R}, R^-$	75	$\mathcal{P}^n(\mathbb{N}), \mathcal{P}^\omega(\mathbb{N})$	122
$\Rightarrow, \Leftrightarrow$	11	$\max_R A, \max A$	76	$\mathcal{P}^n(A), \mathcal{P}^\omega(A)$	122
$\exists, \forall$	11	$\min_R A, \min A$	76	$+^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}$	122
$\in, \notin$	11	$\sup_R A, \sup A$	76	$\prod A$	126
$=, \neq$	11	$\inf_R A, \inf A$	76	$\mathbb{N}^*$	129
$:=, =:$	11	$\sup_R^+ A, \inf_R^+ A$	76	$A^{<\omega}$	130
$:\Leftrightarrow, \Leftarrow:$	11	$[y]_R, \mathcal{P}_R, R_{\mathcal{A}}$	77	$\mathcal{P}_\omega(A)$	131
$\stackrel{(2.4.11)}{=}$	11	$\sqcup, \sqcup$	78	$\mathcal{N}m^n, \overline{A}$	132
$\stackrel{(i)}{\Rightarrow}, \stackrel{top}{=}$	11	$X/R, A_y^f$	78	$ A , \natural A$	134
$V_{\mathbb{K}}, \dim V_{\mathbb{K}}$	12	$\{A_i\}_{i \in I}$	79	$\kappa \dot{+} \lambda$	136
$\langle A \rangle, \langle A \rangle_{\mathbb{F}}$	12	$\bigcap_{i \in I} A_i$	79	$\kappa * \lambda$	136
$\sum_{b \in B}^s \lambda_b b$	12	$\prod_{i \in I} A_i$	79	$!\kappa^\lambda, \aleph_0$	136
$Hom_{\mathbb{F}}(V, W)$	13	$(x_i)_{i \in I}$	79	$\mathfrak{c}$	136
$\mathbb{I}$	17	$(P1), (P2)$	83	$\sum, \sum^*$	136
$\equiv$	24	$(P3)^{(2)}$	83	(A, B)	141
$\mathcal{P}(A)$	28	(STV)	83	B_x^R, B_x	142
S_φ	61	TVI, TVII	84	B_R^x, B^x	142
$\subset, \subseteq$	62	$\mathbb{N}_k$	84	$\mathcal{X}$	142
$\cup, \cap, \setminus$	62	t_m, t_a	85, 116	$\overline{M}$	143
$\mathbb{U}$	63	TF	86	$\overline{A}, stA$	144
$\bigcup, \bigcap$	64	$\mathcal{P}^*(A)$	89	$srsA$	144
A^c	66	s^A	89	$\mathcal{X}_x$	145
$(a, b), A^n$	69	$\cong, \widetilde{\rightarrow}$	90,141	$srs\mathcal{X}$	148
$A \times B$	69	t_m^A, p_m^A, e_m^A	91-2	$\alpha', \beta - 1$	150
$\tan R$	70	m^x, ard	93-4	$\exists \alpha, \forall \alpha$	151
$resR, R[X]$	70	$\underline{\mathcal{N}}, \underline{\mathbb{N}}$	94	$Srs, \{\alpha ..\}$	151
$R^{-1}, R^{-1}[Y]$	70	a^n	104	$Lim, Lim_{\mathcal{A}}$	157
$R[X, R X]$	70	$\sum_{i=0}^n$	106	$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$	158
$S \circ R$	70	$\sum_{i < n+1}$	106	$\alpha \cdot \beta, \alpha\beta$	159
$\longrightarrow, \xrightarrow{F}$	71	$\prod_{i=0}^n$	106	$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$	160
$F(a)$	71	$\prod_{i < n+1}$	106	$\alpha + \beta$	160
$\tan F, resF$	71	$n!$	107	$\bigoplus_{i \in I} \mathcal{A}_i$	162
${}^A B, \rightsquigarrow$	71	$\prec, \preceq$	111	$\sum_{i \in I} \alpha_i$	162

İmler Tablosu

$\bigotimes_{i \in I}^s \mathcal{A}_i$	163	ε -sayıları	198	$\overline{B}_r^d(a)$	268
ω	163	(CNG)	200	$\Delta(a, b), \underline{s}$	269
$\varepsilon_0, F_\alpha, G_\alpha$	165-6	$\sum_{\xi < \gamma} \alpha_\xi$	201	$\mathbb{Q}^+, d(A)$	270
$-\alpha + \beta$	166	$\prod_{\xi < \gamma} \alpha_\xi$	201	$yk(x)$	273
$\mathcal{SRS}$	170	$Cks, \natural A$	208	$s^\wedge t$	274
$A^\circ, \overline{A}, \mathcal{T}_A$	173	$Cksz, \kappa^+, \mathcal{K}$	211	$\mathcal{C} := 2^{\mathbb{N}}, D(\kappa)$	275
$\mathcal{K}_x^T, \mathcal{K}_x, \mathcal{B}_x$	173	$\aleph_\alpha, (CH)$	211-2	$\mathbb{B} := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$	275
$A', \mathcal{T}_s$	174	$sd(X)$	223	$A^\star$	279
$(\leftarrow, x), (x, \rightarrow)$	174	$[X]^\kappa, [X]^{<\kappa}$	236	$X^{(\alpha)}$	283
$(a, b), [a, b]$	174	$!\lambda^{<\kappa}, !\lambda^{\tilde{\kappa}}$	236	∂A	285
$(a, b], [a, b]$	174	$\kappa \longrightarrow (\mu)_\nu^n$	239	$\mathcal{T}^C$	288
$(a_\xi)_{\xi < \lambda}$	175	$\text{tson}X, \text{tsay}X$	242	$\overset{m}{=}, \overset{m,n}{=}$	292
λ -dizisi	175	κ -tam	244	σ -cebiri, $\sigma(\mathcal{A})$	296
$\lim_{\xi < \lambda} \alpha_\xi$	175	$Kasz_\lambda$	246	$\mathfrak{B}\mathfrak{r}(\mathcal{T})$	297
$(\text{TVK}), (\text{TVK}\varphi)$	182	$\Delta_{\sigma < \kappa} A_\sigma$	246	$\mathfrak{B}\mathfrak{r}(X), \mathfrak{B}\mathfrak{r}^n$	297
(TF)	183	$\mathbb{V}, \mathbb{V}_\alpha$	250-1	F_σ, G_δ	297
$(\text{GTF}), TkrG$	184	$sv(x)$	252	$F_{\sigma\delta}, G_{\delta\sigma}$	297
$Tkr(a, H, K)$	186	$Tv(X), (\text{Soz})$	259	$\mathcal{M}, \mathcal{M}^n$	299
$H^\xi(a)$	187	$\overset{top}{=}, \underline{U}_S$	265-6	$\mathcal{S}^n$	300
T_α	191	$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{T}_i$	266	$\mathcal{L}^n, \mathcal{BR}^n$	301
P_α, E_α	192	$\mathcal{T}_a, B_r^d(a)$	268	$(X, \mathcal{A}, \mu), des\mu$	303



Index

0-boyutlu, 272

A

açık küme, 173, 272

açmaz

berber $*_1$, 33

Cantor $*_1$, 28

Finsler $*_1$, 33

mantık $*_1$ ları, 33

Richard $*_1$, 30

Russell $*_1$, 29

sıra sayıları $*_1$, 29

üst oyun $*_1$, 30

yalancı $*_1$ ları, 32

yapay $*_1$ lar, 33

ağaç, 273

Aksiyom

Basit Kümeler $*_u$, 44

Belirlilik $*_u$, 44

Cantor Derleme $*_u$, 26

Derleme $*_u$, 44

İndirgenabilirlik $*_u$, 42

Kaplam $*_u$, 26

Küçük Çokluk $*_u$, 258

Neumann Derleme $*_u$, 55

Russell Derleme $*_u$, 41

Seçme $*_u$, 27

Sınırlılık $*_u$, 48

Uzantı $*_u$, 26

Yerine Koyma $*_u$, 47

alt örtü, 272

altbaz, 173

altdizi, 176

anlamsal farklı, 24

arakesit, 62

ardıl, 90

ardıl çokluk, 211

asal ideal, 241

aşırı süzgeç, 241

ava., 11

ayrık metrik, 268

ayrılabilir, 270

ayrık aile, 77

ayrık nokta, 174

B

bağıntı

*ların bileşimi, 70

*nın kısıtlanması, 70

bağlantılı *, 74

bakışimli *, 74

denklik *sı, 74

geçişli *, 74

n-li *, 70

özdeşlik *sı, 72

sıralama *sı, 75, 141

ters *, 70

ters bakışimli *, 74

yansımali *, 74

yansımasız *, 74

Baire özellikli küme, 301

Baire uzayı, 275

başlangıç, 142

bb., 11

Bernstein kümeleri, 302

Bir, 65

birinci kategori, 299

birleşim, 62

bölüm uzayı, 78

Borel cebiri, 297

Borel kümeleri, 297

budanmış, 274

C

çekirdek, 13

Cantor Kümeler Kuramı, 9

Cantor uzayı, 275

Cantor-Bendixon türevleri, 283

çap, 270

çarpma, 92, 266

Cauchy dizisi, 270

çekilmiş fonk., 248

çift, 65

çıkarma, 166, 198

cılız, 299

CKK, 9

çokluk sayısı, 135, 208, 211

D

daha güçlü, 111

dal, 273

dallanma noktası, 273

dd., 11

denklik sınıfı, 77

DerC, 26

DerCs, 61

destek, 303

Dieudonne ölçüsü, 303

dizi

artan *, 155

durağan *, 155

kesin artan *, 155

dizi limiti, 176

dolaysız ardıl, 150, 157

dolaysız öncül, 150, 157

dolgun, 299

D-sonlu, 129

düğüm, 273

durağan, 248

düzenli sıra sayısı, 225, 288

E

eklenmiş, 274

eş güçlü, 111

eşlek ideal, 241

eşyapı dönüşümü, 90, 141

eşyapı dönüşümü, 141

eşyapılı, 13

evren

matematik *i, 28

evrencik, 253

F

fark, 62

fonksiyon, 71

*un doğal parçalanışı, 78

*un kısıtlanması, 72

birebir *, 71

bölüm $\ast u$, 78
 Darboux $\ast$ ları, 13
 dogrusal $\ast$, 13
 dışbükey $\ast$, 14
 güçlü Darboux $\ast u$, 14
 izdüşüm $\ast u$, 72
 karakteristik $\ast$, 112
 orta nokta dışbükey $\ast$, 14
 örten $\ast$, 71
 özdeşlik $\ast u$, 72
 özgün $\ast$, 112
 seçen $\ast$, 27
 toplamsal $\ast$, 13
 üs $\ast u$, 93
 üzerine $\ast$, 71
 fonksiyon iterasyonu, 188
 fonksiyon tekrarı, 188
 fonksiyon tekrarlaması, 184
 formül, 60
 asal $\ast$, 60
 atomar $\ast$, 60
 Genel Tekrarlama $\ast ü$, 86
 Tekrarlama $\ast ü$, 87
 yüklemsel $\ast$, 55
 Frechet süzgeci, 242
 f-türdeş, 239

G

gbk., 11
 gömme, 265
 görelî topoloji, 173
 gvyk., 11

H

Hamel bazı, 13
 Hausdorff uzayı, 174
 her yerde seyrek, 285
 hiçbir yerde yoğun değil, 285

İ

iç, 173
 ideal, 206, 241

ikinci ayrılabilir, 270
 ikinci kategori, 299
 ince, 265
 infumum, 76
 iyi sıralanmış sınıf, 142
 iyi tanımlı, 25
 iyi temelli, 253
 izometri, 292
 izometrik, 292

K

kaba, 265
 kalanlı bölme, 167, 198
 kalıtsal sonlu, 259
 kapalı küme, 173
 kapanış, 173
 kaplamsal eşit, 24
 kardinal sayısı, 135
 kartezyen çarpım, 69
 kasız, 245
 kesişim, 62
 kompakt, 272
 komşuluk, 174
 komşuluk bazı, 174
 köşegensel arakesit, 246
 küme, 59
 kümesel evren, 54, 253
 $\ast$ aileleri, 64
 $\ast$ ailesi, 78
 boş $\ast$, 59
 Cantor $\ast si$, 116
 geçişli $\ast$, 94
 güç $\ast si$, 28, 64
 ikilik $\ast$, 62
 temelli $\ast$, 29
 temelsiz $\ast l$, 29
 kusursuz kümeler, 279

L

Lebesgue ölçülebilir, 301
 Lebesgue ölçüsü, 304

limit nokta, 174
 limit öge, 157
 Lindelöf uzayları, 288
 logaritma, 198

M

Mahlo çokluk sayısı, 250
 maksimal ideal, 206
 maksimum, 76
 metadil, 36
 metateorem, 37
 metrik, 267
 metrik uzay, 267
 metriklenebilir top., 268
 metriksel
 eşit, 292
 n-parçalı metriksel eşit, 292
 tameşleme, 292
 metriksel eşyapılı, 292
 minumum, 76

N

neredeyse ayrık, 12
 nesne, 97
 nesnedili, 36
 Neumann doğal sayıları, 94
 normal uzay, 288

O

öge
 asal *, 59
 büyük *, 76
 en büyük *, 76
 en küçük *, 76
 küçük *, 76
 maksimal *, 76
 minimal *, 76
 Öklid normu, 267
 ölçü, 303
 öz infimum, 76
 öz supremum, 76

P

parçalanış, 77
 Peano yapısı, 89
 Polonya uzayı, 275

R

resim, 70
 resim bölgesi, 70

S

sap, 78
 sayma fonksiyonu, 146
 seviye, 252
 sezgisel
 * doğal sayılar, 83
 * sayılabilir, 125
 * sayılabilir sonsuz, 125
 * sayılamaz, 125
 * sonlu, 125
 * sonsuz, 125
 sınıf, 59
 sıfır kümesi, 300
 silindir, 266
 sınırsız, 224, 285
 sıralı ikili, 68, 144, 146, 148, 160,
 174
 sistem, 97
 sınıf, 54
 alt*, 62
 öz *, 54, 59
 öz alt*, 62
 sıralanmış *, 141
 sınır
 alt *, 75
 en büyük alt *, 76
 en küçük üst *, 76
 öz alt *, 76
 öz üst *, 75
 üst *, 75
 sondaş, 223
 sondaşlık, 223

sonlu arakesit özelliği, 242
 sonlu dallanmış ağaç, 273
 sonlu dizi, 176
 sonluötesi dizi, 176
 sonluötesi tekrarlama, 187
 sonluötesi tümevarım, 187
 sonrası, 142
 sonsuz dal, 274
 Soz*, 65
 sözedendil, 36
 sözedenteorem, 37
 sıralama
 * tipi, 144
 Artinsel *, 155
 doğrusal *, 75, 141
 iyi *, 142
 kısmi *, 75
 Noethersel *, 155
 yansımali *, 75
 supremum, 76
 sürekli, 174, 212
 süzgeç, 241

T

tam metriklenabilir, 275
 tam uzay, 270
 tameşleme, 71
 öz atıflı *, 35
 döngülü *, 35
 öz döngülü *, 35
 yüklemsel *, 36
 tanım bölgesi, 70
 tekil sıra sayısı, 225
 tekrarlı
 * kurma, 84
 * seçme, 84
 * teorem, 87
 temelli, 253
 Teorem
 Artin tümevarımı, 156
 Baire, 299

Cantor, 117, 119, 270, 282
 Cantor normal gösterimi, 200
 Cantor-Bendixon, 283
 Cantor-Schröder-Bernstein *i,
 113
 çekmece, 235
 Dedekind Tümevarımıyla tanımlama
 *i, 102
 ekleme cikarma, 231
 Genel Tekrarlı, 184
 Genel Tekrarlı *, 86
 Hausdorff, 293
 Hausdorff maksimum ilkesi, 205
 Hessenberg, 214
 iyi sıralama, 203
 Kalmar, 85
 König, D., 273
 König, J., 220
 Neumann çökmesi, 171
 Neumann Çökmesi *i, 154
 Noether tümevarımı, 156
 Ramsey, 240
 sabit nokta, 178
 Sierpinski, 309
 Şıklıtekrarlı, 186
 Sonluötesi tümevarım, 182
 Tarski, 243
 Tekrarlı, 185
 Tekrarlı *, 87
 Tekrarlı Seçme, 189
 Ulam-Solovay, 249
 Zorn, 203
 Teorem Menger, 62
 Teroem
 Dedekind Tümevarım *i, 99
 ters resim, 70
 ters sözlüksel sıralama, 158
 toplama, 92
 topolji bazı, 173
 topoloji, 173

topolojik dönüşüm, 265
topolojik uzay, 173
tümevarım ilkesi, 83, 259
tümevarım ilkesi, 89
tümleyen, 62
türev, 174

U

ulaşılamaz, 230
uzantı, 26, 142
UzC, 26
UzCs, 61

W

Weyl'in kısır döngüsü, 31

Y

yakınsak, 270
Yer, 65
yığılma noktası, 174
yoğun, 270
yoğunlaşma noktası, 279
yükseklik, 273

Z

zayıf ulaşılamaz, 230
zincir, 203